



**HAL**  
open science

## Obtention numérique des modes de propagation élastiques dans un guide d'onde hélicoïdal

Fabien Treyssède

► **To cite this version:**

Fabien Treyssède. Obtention numérique des modes de propagation élastiques dans un guide d'onde hélicoïdal. 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. 6 p. hal-01066400

**HAL Id: hal-01066400**

**<https://hal.science/hal-01066400v1>**

Submitted on 22 Sep 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Obtention numérique des modes de propagation élastiques dans un guide d'onde hélicoïdal

Fabien Treyssède

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées  
Division for Metrology and Instrumentation  
Route de Pornic, BP 4129, 44341 Bouguenais Cedex, FRANCE  
[fabien.treysede@lcpc.fr](mailto:fabien.treysede@lcpc.fr)

## Résumé :

*Les câbles de précontrainte, très utilisés dans les ouvrages de génie civil, sont généralement constitués d'assemblages de plusieurs brins hélicoïdaux enroulés autour d'un brin central droit. Leur auscultation par méthodes non destructives ultrasonores constitue une voie prometteuse pour détecter la présence de dégradations mais leur utilisation est compliquée par l'absence de modèles adéquats. L'objectif de ce papier est de résoudre une première difficulté en proposant une méthode d'éléments finis pour l'investigation des modes se propageant dans un brin hélicoïdal simple. La méthode est basée sur la théorie des ondes dans les structures périodiques. Une étude de convergence est d'abord réalisée en comparant les solutions numériques obtenues pour un cylindre infini isotrope avec celles analytiques de Pochhammer-Chree. Le cas du brin hélicoïdal est ensuite abordé et les courbes de dispersion calculées. Les résultats numériques sont validés en basse fréquence par comparaison avec un modèle de poutre de Timoshenko hélicoïdale.*

## Abstract :

*Steel multi-wire cables are widely employed in civil engineering. They are usually made of a straight core and one layer of helical wires. In order to detect material degradation, non-destructive evaluation methods based on ultrasonics are one of the most promising techniques. However, their use is complicated by the lack of accurate cable models. As a first step, the goal of this paper is to propose a numerical method for the study of elastic guided waves inside a single helical wire. A finite element technique is used based on the theory of wave propagation inside periodic structures. The convergence and accuracy of the proposed method are assessed by comparing finite element results with Pochhammer-Chree solutions for the infinite isotropic cylinder. Dispersion curves for a typical helical waveguide are then obtained. In the low-frequency range, results are validated with a helical Timoshenko beam model.*

**Mots-clefs : propagation, guide d'ondes, hélicoïdal**

## 1 Introduction

Les câbles multi-brins sont très largement utilisés en génie civil. Leur élément de base est généralement constitué de six brins hélicoïdaux enroulés autour d'un brin central droit. Afin de détecter voire d'empêcher les ruptures de brins, qui se produisent principalement à cause de la corrosion, il existe une forte demande en matière de techniques d'auscultation non-destructives. L'analyse des ondes guidées ultrasonores, multimodales et dispersives, représente une technique prometteuse, pour laquelle l'utilisation de modèles s'avère souvent nécessaire pour améliorer la compréhension ou l'interprétation physique.

Le modèle approché le plus simple d'un câble multi-brins est celui d'un cylindre infini. Depuis les travaux de Pochhammer en 1876 et Chree en 1889, la propagation des ondes dans les cylindres élastiques a été très largement étudiée que ce soit sur le plan théorique, numérique ou expérimental (voir par exemple le papier de Zemanek 1972).

Cependant, des résultats expérimentaux récemment obtenus par Kwun et al. (1998), Beard et al. (2003) et Rizzo et al. (2004) montrent que les courbes de dispersion de Pochhammer-Chree ne décrivent pas suffisamment précisément la propagation des ondes dans les câbles

multi-brins. En fait, la compréhension théorique des ondes guidées dans de telles structures est compliquée par les géométries hélicoïdales des brins périphériques, les effets de contacts interfilaires, la présence de précontrainte et éventuellement d'un enrobage.

L'objectif de ce papier est de résoudre la première difficulté susmentionnée, en proposant une méthode numérique permettant l'étude des ondes élastiques guidées dans un brin hélicoïdal simple, pour lequel aucune solution ne semble disponible dans la littérature.

Pour des géométries complexes, l'une des méthodes numériques les plus répandues est celle des éléments finis (EF). La méthode EF semi-analytique (SAFE en anglais) constitue une première approche utilisable pour des guides uniformes de section arbitraire – à titre indicatif voir Gavric et al. (1995), Hayashi et al. (2003), Damljanovic et (2004), Demma et al. (2005).

Une seconde approche est basée sur la théorie des ondes dans les structures périodiques. A partir du principe de Floquet, elle permet l'étude de la sous-structure répétitive unitaire seule, grâce à l'application de conditions aux limites périodiques impliquant une constante de propagation correspondant à la valeur propre. Une étude bibliographique sur le sujet a été donnée par Mead (1996). Fondées sur une théorie générale présentée par Mead (1973), des méthodes et techniques EF périodiques ont été développées – consulter Gry et al. (1997), Mace et al. (2005) par exemple.

Pour modéliser un brin simple hélicoïdal, guide d'onde uniforme, les deux approches sont applicables. Cependant, l'utilisation d'une méthode SAFE apparaît sensiblement plus compliquée à mettre en œuvre. Premièrement, elle nécessite d'écrire les équations d'équilibre dans un système de coordonnées hélicoïdal, non orthogonal a priori, invariant par translation le long de l'hélice. Deuxièmement, la résolution de ces équations dans un code EF classique requiert une programmation spécifique des opérateurs. Dans cet article, la technique numérique développée est basée sur une approche EF périodique et un maillage particulier, invariant par translation. Cette technique constitue une assez simple étape de post-traitement des matrices de raideur, masse et amortissement, obtenues à partir de tout code EF conventionnel.

## 2 Méthode EF périodique

L'application d'une méthode EF aux équations d'équilibre de l'élastodynamique aboutit à un système discrétisé de la forme:

$$(\mathbf{K} - i\omega\mathbf{C} + \omega^2\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1)$$

où  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{C}$  sont les matrices de raideur, masse et amortissement.  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{f}$  sont respectivement les vecteurs des déplacements et efforts aux nœuds.  $\mathbf{u}$  peut être partitionné selon les degrés de liberté (ddl) associés aux sections de chaque extrémité du guide, i.e. gauche ( $L$ ) et droite ( $R$ ), et à l'intérieur ( $I$ ) du guide, ce qui donne:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LI} & \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{II} & \mathbf{D}_{IL} & \mathbf{D}_{IR} \\ \mathbf{D}_{RI} & \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_R \end{Bmatrix} \quad (2)$$

où l'on a introduit la matrice de rigidité dynamique  $\mathbf{D} = \mathbf{K} - i\omega\mathbf{C} + \omega^2\mathbf{M}$ . La condition périodique est donnée par  $\mathbf{u}_R = \lambda\mathbf{u}_L$  et  $\mathbf{f}_R = -\lambda\mathbf{f}_L$ , où  $\lambda$  est une inconnue à trouver. En posant  $\lambda = e^{ikL}$ ,  $ikL$  est assimilé à une constante axiale de propagation ( $L$  est la longueur de la cellule périodique unitaire étudiée,  $k$  est le nombre d'onde axial). En appliquant ces conditions aux limites de périodicité à l'Eq. (2), on montre que le système aux valeurs propres suivant peut être obtenu :

$$\left( \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_3 - \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_3 & -\mathbf{D}_1 \end{bmatrix} - \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{D}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \lambda\mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

avec les notations:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} & \mathbf{D}_{LI} \\ \mathbf{D}_{IL} & \mathbf{D}_{II} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RI} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{u}_I \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Soulignons que l'éq. (3) correspond à une reformulation du problème aux valeurs propres, écrite en terme de  $\lambda + 1/\lambda$ , afin de pallier des problèmes de conditionnement pour des systèmes de grande taille. On consultera les papiers de Gry et al. (1997) et Mace et al. (2005) pour plus de précisions. Notons juste que les ddls intérieurs n'ont pas été condensés dans ce papier – comme effectué en général – afin d'éviter le calcul de l'inverse de  $\mathbf{D}_{II}$ .

Si  $\lambda$  est valeur propre, alors  $1/\lambda$  l'est aussi: le problème aux valeurs propres possède ainsi deux ensembles de solutions propres  $(\lambda_j, \boldsymbol{\varphi}_j^+)$  et  $(1/\lambda_j, \boldsymbol{\varphi}_j^-)$  ( $j=1, \dots, n$ ), représentant  $n$  modes se dirigeant dans un sens et  $n$  dans l'autre. En l'absence d'amortissement, les solutions  $|\lambda_j|=1$  ( $k$  réel) représentent des ondes propagatives et celles à  $\lambda_j$  réel ( $k$  imaginaire) des ondes évanescentes. Les autres ( $k$  complexe) correspondent aux modes dits inhomogènes.

### 3 Cas de guides d'ondes hélicoïdaux

Le volume de la cellule unitaire est maillé par des éléments finis 3D standards de type Lagrange. Cependant, les maillages 2D des sections aux extrémités du guide doivent être compatibles, car chaque ddl gauche doit être associé à un ddl droit de manière que les conditions de périodicité soient satisfaites.

A première vue, la longueur de la cellule périodique d'un guide hélicoïdal est donnée par le pas d'hélice, noté  $L_0$ , ce qui nécessiterait un maillage 3D impliquant un grand nombre de ddls en pratique. Heureusement, la longueur de cette cellule peut être arbitrairement réduite en utilisant une transformation spécifique, invariante par translation le long de l'axe de l'hélicoïde.

Cet axe peut être décrit par le vecteur position suivant, écrit dans la base cartésienne orthonormée:

$$\mathbf{R}(s) = R_0 \cos\left(\frac{2\pi}{l_0}s\right) \mathbf{e}_x + R_0 \sin\left(\frac{2\pi}{l_0}s\right) \mathbf{e}_y + \frac{L_0}{l_0} s \mathbf{e}_z \quad (5)$$

où  $l_0 = (L_0^2 + 4\pi^2 R_0^2)^{1/2}$ .  $R_0$  et  $L_0$  sont respectivement le rayon de l'axe dans le plan  $(x,y)$  et le pas d'hélice selon l'axe  $z$ . Les tangente, normale et binormale unitaires à l'axe sont respectivement obtenues par  $\mathbf{T} = d\mathbf{R}/ds$ ,  $d\mathbf{T}/ds = \kappa_0 \mathbf{N}$  et  $d\mathbf{N}/ds = \tau_0 \mathbf{B} - \kappa_0 \mathbf{T}$  (formules de Frenet), où la courbure  $\kappa_0 = 4\pi^2 R_0 / l_0^2$  et la tortuosité  $\tau_0 = 2\pi L_0 / l_0^2$  sont constantes.

Ensuite, un nouveau système de coordonnées est construit à partir de la base orthonormée  $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ , dans laquelle tout vecteur  $\mathbf{x}$  s'exprime:

$$\mathbf{x}(s, \alpha, \beta) = \mathbf{R}(s) + \alpha \mathbf{N}(s) + \beta \mathbf{B}(s) \quad (6)$$

On montre aisément que cette transformation aboutit à une base covariante non-orthogonale, notée  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ , et que le tenseur métrique associé ne dépend pas de la troisième coordonnée curviligne  $s$ . Si la section du guide ne varie pas selon  $s$  (ni les propriétés mécaniques), cela signifie que  $s$  n'apparaît pas dans les équations d'équilibre écrites dans le système curviligne, à l'exception des dérivées par rapport à  $s$ . Une transformée de Fourier dans cette direction peut ainsi être effectuée (comme dans une méthode SAFE), si bien que l'on peut toujours parler de modes de propagation. En d'autres termes, la transformation proposée est bien invariante par translation le long de  $s$ .

Avec la méthode proposée, il faut seulement veiller à placer les nœuds gauches et droits du maillage 3D selon la transformation (6). La conséquence de l'invariance par translation est que la longueur d'une cellule unitaire périodique peut être arbitrairement réduite, comme c'est le cas avec un cylindre infini. Les ddls gauches et droits doivent cependant être exprimés dans la base

curviligne. Les composantes nodales des déplacements et forces, initialement cartésiennes, sont transformées selon des composantes curvilignes par les matrices jacobiniennes, comme suit :

$$\begin{Bmatrix} u_k^x \\ u_k^y \\ u_k^z \end{Bmatrix} = \mathbf{J}(\alpha_k, \beta_k, s_k) \begin{Bmatrix} u_k^1 \\ u_k^2 \\ u_k^3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} f_k^x \\ f_k^y \\ f_k^z \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-T}(\alpha_k, \beta_k, s_k) \begin{Bmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

où les indices  $k$  représentent les numéros des nœuds,  $u_k^i$  est la composante contravariante du déplacement dans la base covariante  $\mathbf{g}_i$ .  $\mathbf{J}(\alpha_k, \beta_k, s_k)$  est la matrice jacobienne covariante, dont la colonne  $i$  correspond aux composantes cartésiennes de  $\mathbf{g}_i$  évaluées au nœud  $k$ . A partir de ces notations,  $\mathbf{J}^{-T}$  correspond à la matrice jacobienne contravariante et  $f_{ik}$  est la composante  $i$  covariante de l'effort au nœud  $k$  dans la base contravariante  $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$ .

La matrice  $\mathbf{J}(\alpha_k, \beta_k, s_k)$  est assemblée sur les ddls gauches (resp. droits), aboutissant à une matrice  $\mathbf{J}_L$  (resp.  $\mathbf{J}_R$ ). Les composantes cartésiennes initiales, notées par un exposant  $c$ , sont alors transformées en utilisant une matrice de transformation globale  $\mathbf{Q}$  selon  $\mathbf{u}^c = \mathbf{Q}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{f}^c = \mathbf{Q}^{-T}\mathbf{f}$ , avec les notations:

$$\mathbf{u}^c = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_L^c \\ \mathbf{u}_I^c \\ \mathbf{u}_R^c \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_R \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}^c = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_L^c \\ \mathbf{f}_I^c \\ \mathbf{f}_R^c \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_I \\ \mathbf{f}_R \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_L & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_R \end{bmatrix} \quad (8)$$

Finalement, avant d'appliquer la procédure décrites dans la section 2 précédente, le système dynamique obtenu à partir d'un code EF standard, cartésien et noté  $\mathbf{D}^c\mathbf{u}^c = \mathbf{f}^c$ , doit être d'abord transformé selon  $\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ , où  $\mathbf{D}$  est donné par  $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T\mathbf{D}^c\mathbf{Q}$ . Notons que  $\mathbf{D}$  reste symétrique en raison du choix d'écriture (7).

## 4 Résultats numériques

Le matériau est supposé isotrope, sans amortissement matériel. Pour de l'acier, une valeur typique de coefficient de Poisson est 0.30. Des guides d'ondes de section circulaire de rayon  $a$  sont considérés. Afin d'obtenir le maillage adéquat entre les sections aux extrémités, la technique utilisée consiste à générer un maillage 2D sur la section gauche (avec des triangles à 3 nœuds). Ce maillage est ensuite extrudé selon un maillage 3D (avec des prismes à 6 nœuds) simplement en translatant chaque nœud le long de l'axe de l'hélice.

### 4.1 Validation et convergence pour un cylindre infini isotrope

Les nombres d'ondes axiaux obtenues numériquement et analytiquement sont comparés pour une fréquence adimensionnelle donnée,  $\omega a/c_s = 1$ , où  $c_s$  est la célérité des ondes de cisaillement. Les erreurs de dispersion selon le paramètre de maillage  $1/h$  sont données en Fig. 1 ( $h$  est choisi comme étant la longueur maximale d'un coté d'un élément).

On peut observer que le taux de convergence approche un comportement quadratique (courbe en pointillés sur la Fig. 1) pour tous les types de modes considérés. Avec le maillage 3, l'erreur de dispersion reste inférieure à 1%, excepté pour le mode inhomogène (2%). Ce maillage correspond à un critère approximatif en  $\lambda_s/h=25$ .

### 4.2 Analyse de dispersion sur un brin hélicoïdal typique en génie civil

Les modes de propagation dans un brin périphérique constituant un câble typique de génie civil, constitué de 7 brins, sont étudiés. Le rayon d'hélice d'un tel brin est  $R_0=2a$ , l'angle

d'hélice par rapport à l'axe  $z$  est  $\phi=7.5^\circ$  ( $\phi = \tan^{-1}(2\pi R_0/L_0)$ ). Dans la suite, la longueur  $L$  de la cellule unitaire EF, représente la longueur curviligne le long de l'axe de l'hélice.

Pour valider le modèle EF, les résultats sont comparés dans les basses fréquences avec un modèle de poutre hélicoïdale de Timoshenko, proposé par Wittrick (1966).

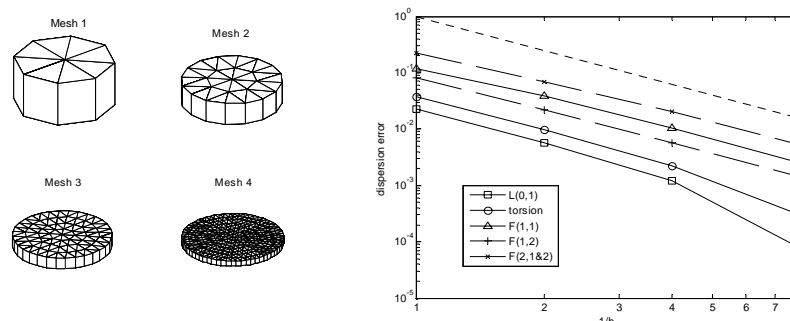


FIG. 1 – Erreur de dispersion (à droite) par rapport à la solution de Pochhammer-Chree en fonction de  $1/h$  pour  $\omega a/c_s = 1$ , obtenue par raffinement successif du maillage (à gauche).

La Figure 2 donne les courbes de dispersion obtenues par les deux modèles dans le domaine basse fréquence, avec un maillage en  $\lambda_s/h=25$ . Un bon accord est obtenu. La limite haute fréquence liée à l'approximation cinématique de Timoshenko peut être observée. Les nombres d'ondes des modes de compression  $L(0,1)$  et de torsion ne sont pas affectés par la géométrie hélicoïdale. Ce n'est pas le cas des modes de flexion, qui apparaissent en deux racines distinctes (notées par des exposants + and -) au lieu de racines doubles en raison de la perte d'axisymétrie du guide hélicoïdal. Notons qu'un phénomène similaire a également été observé par Demma et al. (2005) sur des guides toroïdaux.

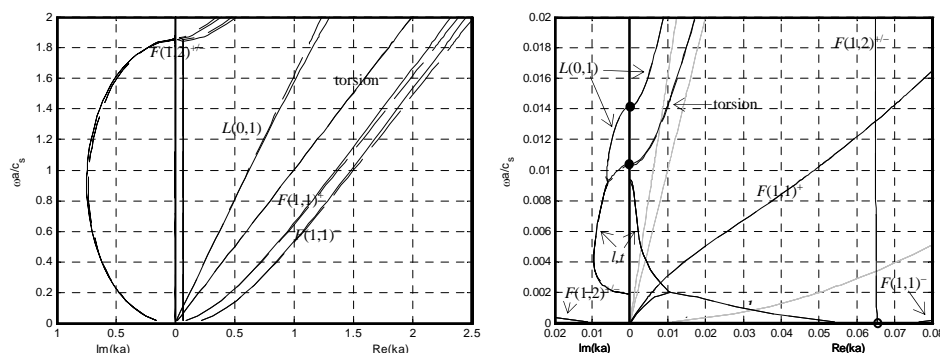


FIG. 2 – Courbes de dispersion pour  $\omega a/c_s$  de 0.02 à 2 (gauche) et 0 à 0.02 (droite). Traits pleins: solution EF, hachés: modèle de Timoshenko, grisés: cylindre.

Pour des fréquences très basses, des différences significatives apparaissent entre cylindrique et hélicoïdal, si bien qu'une analogie directe devient difficile. Pour le cas hélicoïdal, on peut remarquer qu'une bande de coupure existe pour les modes de torsion et  $L(0,1)$ .

Enfin, afin de montrer les potentialités de la méthode EF proposée, la Fig. 3 donne les courbes de dispersion d'un guide hélicoïdal avec une fréquence variant de 0 à 5. Un maillage en  $\lambda_s/h=20$  a été utilisé. Les nombres d'ondes des modes de compression (traits gras) et de torsion (trait grisé) restent inchangés comparés au cas cylindrique, alors que ceux de chaque mode de flexion ne se présentent plus en racines doubles mais en deux racines distinctes.

## 5 Conclusions

Les ondes élastiques d'un guide d'ondes hélicoïdal ont été étudiées numériquement par une méthode EF 3D basée sur des conditions de périodicité et une transformation invariante par translation. Contrairement aux méthodes SAFE, cette méthode peut être implémentée comme un post-traitement d'un code de calcul EF standard. La convergence et la précision de la méthode ont été évaluées avec des éléments de type prisme.

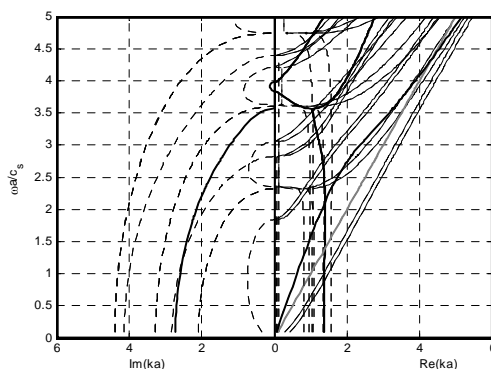


FIG. 3 – Courbes de dispersion EF d'un guide hélicoïdal pour  $\omega a/c_s$  de 0 à 5. Les traits sont pointillés pour des modes non propagatifs (évanescents ou inhomogènes).

Sur le plan physique, les courbes de dispersion d'un guide hélicoïdal font apparaître plusieurs différences comparées au cylindre. Les nombres d'ondes des modes de compression et de torsion restent identiques mais les modes de flexion ne se présentent plus en racines doubles en raison de la perte d'axisymétrie. De plus, il existe des bandes de coupures très basse fréquence pour lesquelles les modes de compression  $L(0,1)$  et de torsion ne se propagent plus.

## Références

- J. Zemanek 1972 An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder. *Journal of the Acoustical Society of America* **51**, 265–283.
- H. Kwun, K. A. Bartels, and J. J. Hanley 1998 Effects of tensile loading on the properties of elastic-wave propagation in a strand. *Journal of the Acoustical Society of America* **103**, 3370–3375.
- M. D. Beard, M. J. S. Lowe, and P. Cawley 2003 Ultrasonic guided waves for inspection of grouted tendons and bolts. *Journal of Materials in Civil Engineering* **212**, 212–218.
- P. Rizzo, and F. Lanza di Scalea 2004 Wave propagation in multi-wire strands by wavelet-based laser ultrasound. *Experimental Mechanics* **44**, 407–415.
- L. Gavric 1995 Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique. *Journal of Sound and Vibration* **185**, 531–543.
- T. Hayashi, W.-J. Song, and J. L. Rose 2003 Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example. *Ultrasonics* **41**, 175–183.
- V. Damljanovic, and R. L. Weaver 2004 Propagating and evanescent elastic waves in cylindrical waveguides of arbitrary cross-section. *Journal of the Acoustical Society of America* **115**, 1572–1581.
- A. Demma, P. Cawley, and M. Lowe 2005 The effect of bends on the propagation of guided waves in pipes. *Journal of Pressure Vessel Technology* **127**, 328–335.
- D. J. Mead 1996 Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964–1995. *Journal of Sound and Vibration* **190**, 495–524.
- D. J. Mead 1973 A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. *Journal of Sound and Vibration* **27**, 235–260.
- L. Gry, and C. Gontier 1997 Dynamic modeling of railway track: a periodic model based on a generalized beam formulation. *Journal of Sound and Vibration* **199**, 531–558.
- B. R. Mace, D. Duhamel, and M. J. Brennan 2005 Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. *Journal of the Acoustical Society of America* **117**, 2835–2843.
- W. H. Wittrick 1966 On elastic wave propagation in helical springs. *International Journal of Mechanical Sciences* **8**, 25–47.