



**HAL**  
open science

# Approche basée sur la méthode des éléments finis de Whitney : induction et effet dynamo dans une configuration de type von Kármán

Houda Zaidi, Caroline Nore

## ► To cite this version:

Houda Zaidi, Caroline Nore. Approche basée sur la méthode des éléments finis de Whitney : induction et effet dynamo dans une configuration de type von Kármán. Symposium de Génie Électrique 2014, Jul 2014, Cachan, France. hal-01065400

**HAL Id: hal-01065400**

**<https://hal.science/hal-01065400>**

Submitted on 18 Sep 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Approche basée sur la méthode des éléments finis de Whitney : induction et effet dynamo dans une configuration de type von Kármán

Houda Zaidi<sup>1,2</sup>, Caroline Nore<sup>2</sup>, Alain Bossavit<sup>1</sup>, Frédéric Bouillault<sup>1</sup>, Jean-Luc Guermond<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>LGEP-UMR 8507 11, rue Joliot Curie, Plateau de Moulon, 91192 Gif sur Yvette, France.

<sup>2</sup>LIMSI, CNRS, UPR3251, BP 133, 91403 Orsay cedex, France et Université Paris-Sud, France.

<sup>3</sup>Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, TX 77843-3368, USA.

**RESUME** – Dans des géométries cylindriques, nous étudions numériquement l’induction et l’amplification d’un champ magnétique en présence d’un écoulement de fluide conducteur (appelée effet dynamo). Nous présentons un code dénommé DOLMEN basé sur la méthode des éléments finis de Whitney, capable de simuler l’équation de l’induction magnétique dans des géométries complexes. Nous exposons dans cet article des cas de validation en étudiant les courants de Foucault induits dans des cylindres (périodique ou fini) et un cas d’effet dynamo en relation avec l’expérience von Kármán Sodium (VKS) qui a récemment mis en évidence un champ magnétique stationnaire ou intermittent [1].

**MOTS-CLES** – Éléments finis, éléments de Whitney, équation de convection-diffusion magnétique, couplage électromagnétisme-champ de vitesse.

## 1 Méthode des éléments finis de Whitney avec vitesse imposée

Le but de cet article est de présenter et valider un nouveau code, DOLMEN, basé sur les éléments finis de Whitney avec vitesse imposée. L’algorithme utilisé dans DOLMEN résout l’équation d’induction magnétique (ou équation de convection-diffusion magnétique) avec le potentiel vecteur modifié  $\mathbf{A}$  défini par  $\mathbf{A} = -\int_0^t \mathbf{E}(\tau) d\tau$ . L’équation à résoudre s’écrit :

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) + \sigma [\partial_t \mathbf{A} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})] = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

où la perméabilité magnétique est donnée par  $\mu = \mu_0 \mu_r$  et la conductivité électrique par  $\sigma = \sigma_0 \sigma_r$  ( $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide,  $\sigma_0$  la conductivité électrique du fluide et  $\mu_r$  et  $\sigma_r$  les perméabilité et conductivité relatives respectivement). Etant données une longueur caractéristique  $\mathcal{L}$  et une vitesse caractéristique  $\mathcal{U}$ , l’équation adimensionnée devient :

$$\sigma_r \partial_t \mathbf{A} + \frac{1}{R_m} \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{A} \right) - \sigma_r \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

où  $R_m = \sigma_0 \mu_0 \mathcal{L} \mathcal{U}$  est le nombre de Reynolds magnétique mesurant le rapport de l’inertie et de la diffusion magnétique. Le vecteur  $\mathbf{A}$  est discrétisé avec des éléments d’arête (H-div conformes) et le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  avec des éléments de facette (H-rot conformes). Le domaine de calcul est discrétisé à l’aide d’éléments tétraédriques. L’intégration temporelle est effectuée par un schéma de Crank-Nicolson. Notons que les éléments d’arête ont montré leur aptitude à être utilisés pour résoudre l’équation de diffusion pour des milieux ayant des perméabilités et des conductivités non uniformes. On se propose dans cet article de montrer la possibilité de prendre également en considération le terme convectif  $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})$  avec ces éléments.

On considère ici seulement des configurations *cinématiques* où le champ de vitesse est constant en temps et défini par une fonction analytique. Nous étudions l’induction à l’intérieur d’un cylindre infini ou fini (cf. section 2) et un cas de

dynamo cinématique (cf. section 3). Nous comparons les résultats obtenus avec DOLMEN à ceux issus d'un autre code bien validé (SFEMaNS). L'algorithme utilisé dans SFEMaNS s'appuie sur une résolution en termes de champ magnétique  $\mathbf{H}^c$  dans les conducteurs (après une élimination standard du champ électrique) et de potentiel magnétique scalaire  $\phi$  dans le vide. Les inconnues dans chaque région sont approchées en utilisant des éléments de Lagrange et les conditions de passage à l'interface entre les régions sont imposées de façon faible par une méthode de pénalisation (voir les détails dans [2]).

## 2 Validation : courants de Foucault dans des cylindres

L'écoulement le plus simple à considérer est la rotation solide qui ne peut pas produire d'effet dynamo. Ainsi un champ magnétique externe imposé ( $\forall t \geq 0$ ) est nécessaire pour obtenir des solutions stationnaires non nulles. La solution analytique pour le cylindre infini (i.e. numériquement périodisé) soumis à un champ magnétique uniforme, constant en temps et perpendiculaire à l'axe de rotation, est connue : des reconnexions avec changement de topologie des lignes de champ ont lieu au sein du conducteur et induisent de la dissipation par effet Joule ; le champ interne diminue et la solution stationnaire est atteinte quand le champ ne pénètre plus que sur l'épaisseur de peau. Nous avons étudié ces effets transitoires avec DOLMEN et SFEMaNS.

### 2.1 Courants de Foucault dans un cylindre infini

On impose la périodicité dans la direction  $Oz$ . Le cylindre tourne à la vitesse angulaire  $\omega \mathbf{e}_z$  et est soumis à un champ appliqué  $H_0 \mathbf{e}_x$  ( $\forall t \geq 0$ ). Après un régime transitoire caractérisé par des reconnexions, un courant permanent vertical induit un champ dipolaire dans le vide. A faibles  $Rm = \mu_0 \sigma_0 R^2 \omega$ , le moment dipolaire induit doit être orthogonal à  $H_0 \mathbf{e}_x$  et à l'axe de rotation. A grands  $Rm$ , il doit s'orienter de façon anti-parallèle à  $H_0 \mathbf{e}_x$  et ainsi expulser le champ de l'intérieur du conducteur. La figure 1(a) présente l'évolution temporelle de l'énergie magnétique contenue dans le conducteur à  $Rm = 100$  pour un cylindre de rayon  $R = 1$  et de longueur verticale périodique  $L_z^c = 1$ . Pour DOLMEN (SFEMaNS), le pas de maillage est  $h = 1/20$  ( $h = 1/50$ ) et le pas de temps est  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$  ( $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$ ). L'accord entre les deux codes est très satisfaisant.

### 2.2 Courants de Foucault dans un cylindre fini

Le cas du cylindre fini n'a pas de solution analytique. Afin de valider notre approche, nous choisissons la même configuration que celle de la référence [3] : le cylindre a un rayon  $R = 1$  et une hauteur  $L_z^c = 1,6$ . La région isolante est un cylindre de rayon  $R_v = 1,6$  et de hauteur  $L_z^v = 5$ . Pour DOLMEN (SFEMaNS), le pas de maillage est  $h = 1/20$  ( $h = 1/100$ ) et le pas de temps est  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$  ( $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$ ). L'évolution temporelle de l'énergie magnétique de la figure 1(b) montre un nombre de reconnexions plus faible que dans le cas d'un cylindre infini. La première reconnexion se déroule de  $t = 2$  jusqu'à  $t = 6$  et les lignes de champ sont présentées en figure 2(a-c). Le courant au sein du conducteur est restreint à l'épaisseur de peau comme montré en figure 2(d). L'accord entre les deux codes est aussi très satisfaisant.

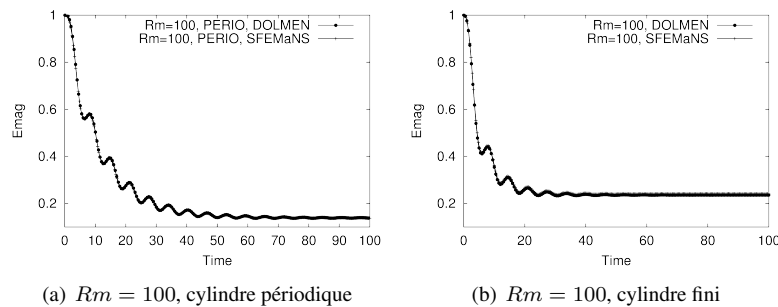


FIGURE 1 – Evolution temporelle de l'énergie magnétique contenue dans un cylindre en rotation solide à  $Rm = 100$  obtenue avec DOLMEN et SFEMaNS : (a) cylindre périodique, (b) cylindre fini.

## 3 Dynamo cinématique dans une configuration de type VKS

### 3.1 Configuration de type VKS

Nous nous intéressons à l'expérience de von Kármán Sodium [1] (VKS) située à Cadarache qui, en septembre 2006, a démontré un effet dynamo au-delà d'un nombre de Reynolds magnétique critique  $Rm^c \approx 32$ . La configuration VKS

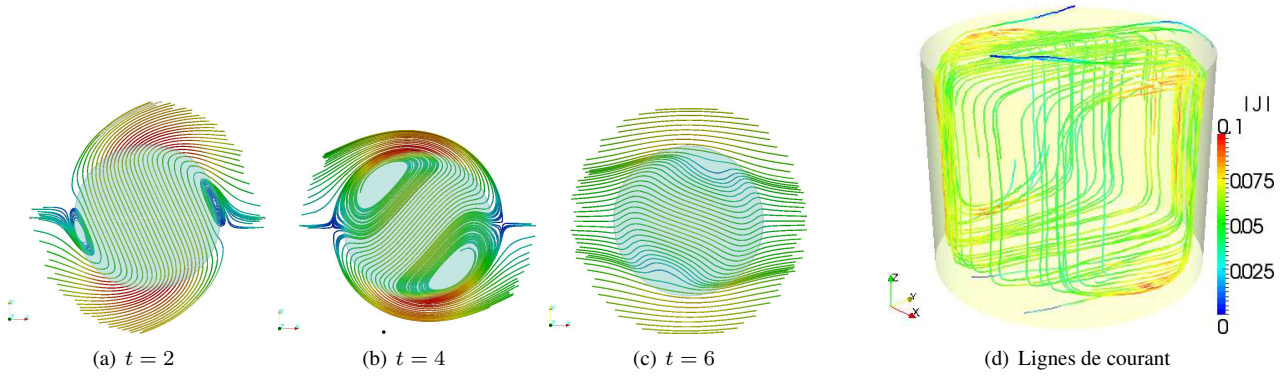


FIGURE 2 – Cylindre fini tournant dans le sens trigonométrique dans le plan médian à  $Rm = 100$  : première reconnexion entre (a)  $t = 2$ , (b)  $t = 4$  et (c)  $t = 6$ ; (d) solution stationnaire montrant les lignes de champ du courant colorées par la norme de  $|\mathbf{J}|$ .

correspond à un cylindre fermé par deux turbines supérieure/inférieure tournant en contra-rotation et entraînant vigoureusement 150 litres de sodium liquide. Chaque turbine est constituée d'un disque et de 8 pales courbées. A la puissance maximale, seules des turbines en fer doux ont permis de générer un champ magnétique (aucun autre matériau n'a permis d'observer d'effet dynamo). Le rôle joué par le fer dans le mécanisme de l'effet dynamo reste incomplètement compris. Nous souhaitons apporter des éléments de réponse en définissant un modèle simplifié de l'expérience : nous avons choisi de modéliser la moitié de l'expérience dans un cylindre de dimensions caractéristiques  $-0.2 \leq z \leq 0.5$  et  $0 \leq r \leq 1$ . Le disque est un cylindre de rayon  $R_d = 0.54$  et de hauteur  $l_d = 0.06$  ( $-0.2 \leq z \leq -0.14$ ) et les pales balaient une zone cylindrique de rayon  $R_b = 0.54$  et de hauteur  $l_b = 0.14$  ( $-0.14 \leq z \leq 0$ ). Nous imposons un champ de vitesse stationnaire analytique et des conditions aux limites simplifiées (sur le couvercle du haut,  $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0$  est imposé tandis que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$  est imposé sur la paroi latérale et le couvercle du bas ). Le champ de vitesse dans le fluide est donné par :

$$\begin{aligned}
 u_r(r, z) &= (\pi/2L) \cos(\pi z/L) r(1-r)^2(1+2r), \\
 u_\theta(r, z) &= 4\epsilon r(1-r^5) \sin(\pi(L-z)/2L), \\
 u_z(r, z) &= -(1-r)(1+r-5r^2) \sin(\pi z/L),
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $L = 0,5$  est la distance entre le couvercle du haut et la partie supérieure des pales et  $\epsilon = 0,7259$  est le rapport entre les vitesses toroidale et poloidale [4]. Le champ de vitesse de la turbine est une rotation solide  $u_\theta(r) = r$ . On applique une interpolation pour  $u_\theta$ . L'ensemble du champ de vitesse interpolé dans le fluide et la turbine est dénoté  $\mathbf{V}_0$ . Le nombre de Reynolds magnétique est ici défini par  $Rm = \mu_0 \sigma_0 U_{\max} R$  où  $U_{\max}$  est le maximum de la vitesse.

### 3.2 Dynamo cinématique dans une configuration axisymétrique

Nous simplifions encore plus le problème en ne tenant pas compte des pales, la géométrie est alors axisymétrique. Nous présentons des résultats de dynamo cinématique obtenus avec les deux codes pour des perméabilités du disque et des pales  $\mu_d = \mu_b = \mu_0$ . Comme le champ de vitesse  $\mathbf{V}_0$  est axisymétrique et la géométrie aussi, le terme  $\mathbf{V}_0 \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{V}_0 \times \mathbf{H}^c$  ne peut pas transférer d'énergie entre les différents modes de Fourier de  $\mathbf{H}^c$ , ces derniers sont donc découplés. Le vecteur propre le plus instable est alors le mode de Fourier  $m = 1$  qui tourne dans le sens de la turbine avec une période 4 fois plus lente que celle de la turbine. Il a la structure attendue d'un dipôle équatorial comme décrit dans [5] (voir figure 3).

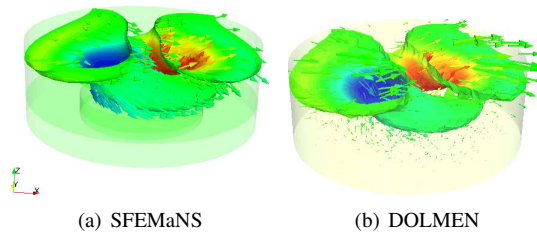


FIGURE 3 – Vecteur propre magnétique (à  $R_m = 50$  avec  $\mu_b = \mu_d = \mu_0$ ) représenté par des vecteurs et l'isosurface  $\|\mathbf{H}^c\|^2$  (10% de sa valeur maximale) colorée par la composante verticale (minimum en bleu et maximum en rouge). Notez la structure portée par le mode de Fourier  $m = 1$ .

## 4 Conclusion

Par la suite, nous allons étudier numériquement la dynamo cinématique avec une configuration prenant en compte les pales de la turbine (géométrie non axisymétrique et champ de vitesse axisymétrique) et faire varier les perméabilités relatives du disque et des pales afin de voir l'influence d'un matériau ferromagnétique.

## Références

- [1] R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoïn, Ph. Odier, M. Moulin, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marié, and F. Ravelet. Generation of magnetic field by a turbulent flow of liquid sodium. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :044502, 2007.
- [2] J.-L. Guermond, J. Léorat, F. Luddens, C. Nore, and A. Ribeiro. Effects of discontinuous magnetic permeability on magnetodynamic problems. *J. Comput. Phys.*, 230 :6299–6319, 2011.
- [3] L. Martin Witkowski, P. Marty, and J.S. Walker. Multidomain analytical-numerical solution for a rotating magnetic field with finite-length conducting cylinder. *IEEE Trans. on Magnetics*, 36 :452–460, 2000.
- [4] L. Marié, C. Normand, and F. Daviaud. Galerkin analysis of kinematic dynamos in the von Kármán geometry. *Phys. Fluids*, 18 :017102, 2006.
- [5] R. Laguerre, C. Nore, J. Léorat, and J.-L. Guermond. Induction effects of conductivity jumps in the envelope of a kinematic dynamo flow. *C. R. Mécanique*, 334 :593–598, 2006.