

Relation entre les opérateurs fractionnaires pour la modélisation de la polarisation diélectrique dynamique champ fort et de la permittivité diélectrique complexe.

Benjamin DUCHARNE, Bin ZHANG, Daniel GUYOMAR

LGEF Insa LYON

RESUME - Les opérateurs fractionnaires sont particulièrement bien adaptés pour modéliser les pertes diélectriques des matériaux ferroélectriques. Là où les opérateurs à dérivées entières sont toujours limités à des bandes passantes réduites, une approche à base d'opérateurs fractionnaires permet d'obtenir de bons résultats même pour des fréquences qui dépassent les fréquences classiques d'utilisation des systèmes piézoélectriques. Dans cet article est démontrée la relation entre la modélisation à base d'opérateurs fractionnaires de l'hystérésis dynamique, à fort champ, et pour des fréquences relativement basses, et la modélisation classique utilisant le modèle de Cole-Cole diélectrique bas niveau, haute fréquence. Dans les deux cas de figure, des comparaisons entre simulation et expérience ont été effectuées en utilisant les mêmes paramètres de simulation, montrant une très bonne corrélation entre résultats prédits et ceux mesurés. Ceci permet d'attribuer la même origine physique des pertes diélectriques dynamiques modélisées (relaxation diélectrique). Ces bons résultats de simulation obtenus pour ces deux lois de comportement distinctes sont avantageux, car ils permettent de limiter la caractérisation d'une céramique à son comportement bas niveau (à l'impédance-mètre). On peut ensuite, en simulation, prévoir son comportement sous contrainte d'amplitude supérieure lorsque celui-ci est requis. Finalement, il confirme les bons comportements des opérateurs fractionnaires et surtout leur universalité quant à la modélisation des matériaux hystérétiques sous contrainte dynamique.

MOTS-CLES – Hystérésis, dérivée fractionnaire, modèle Cole-Cole, polarisation diélectrique.

1. Introduction

De nombreuses approches ont été adoptées pour expliquer la dépendance fréquentielle de la polarisation des matériaux ferroélectriques. Les opérateurs fractionnaires sont particulièrement bien adaptés pour modéliser l'évolution dynamique de l'hystérésis diélectrique [1]. Classiquement les pertes diélectriques sont introduites dans le modèle d'hystérésis diélectrique comme un champ électrique équivalent, produit d'une constante et de la dérivée temporelle de la polarisation. En remplaçant, l'opérateur de dérivée entier par une dérivée fractionnaire, la bande passante du modèle est largement amplifiée et de bons résultats de simulation sont obtenus même pour des niveaux de fréquence bien supérieurs aux fréquences d'utilisation classiques. De bons résultats de simulation de l'hystérésis diélectrique sont obtenus à partir de la résolution du système d'équations suivant [1]:

$$P_i(t) = f \left(E(t) - E_{c_i} \cdot \text{sign} \left(\frac{dP_i(t)}{dt} \right) + \rho \cdot \frac{d^\alpha P_i(t)}{dt^\alpha} \right) \rightarrow \sum_{i=1}^k \text{Spectrum}(i) P_i(t) = P(t) \quad (1)$$

Le comportement des céramiques bas niveaux est généralement décrit via des relations de linéarités autour d'un point de fonctionnement. Leur évolution lorsque les fréquences augmentent est appelée relaxation diélectrique. Elle donne de précieuses informations sur la constitution des céramiques piézoélectriques et sur les relations physiques décrivant les comportements de polarisation. Cette caractéristique est habituellement mesurée grâce à un analyseur fréquentielle. La relaxation

diélectrique est classiquement décrite via la dépendance fréquentielle de la permittivité. Cette relation est mathématiquement donnée par l'équation fractionnaire de Cole-Cole [2]:

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (2)$$

2. Relation entre le modèle d'hystérésis fractionnaire et le modèle de permittivité diélectrique complexe Cole-Cole

Partons du modèle d'hystérésis dynamique eq. (1), si l'on considère une excitation de faible amplitude suffisamment basse pour supposer une relation de linéarité entre la polarisation P et le champ électrique E . Si la polarisation est cosinusoidale $P(t) = P_0 \cdot \cos(\omega t)$. La contribution statique de E est donnée par :

$$E_{stat}(t) = \frac{P_0 \cdot \cos(\omega t)}{\varepsilon_{static}} \quad (3)$$

Lorsque la fréquence augmente la contribution dynamique est obtenue à partir de la relation fractionnaire:

$$E_{dynamic}(t) = \rho \cdot \frac{d^\alpha P}{dt^\alpha} \quad (4)$$

Comme P est de type harmonique, cette contribution possède une solution analytique:

$$E_{dynamic}(t) = \rho \cdot P_0 \cdot \omega^\alpha \cdot \cos(\omega t + \alpha \cdot \frac{\pi}{2}) \quad (5)$$

Finalement, pour des fréquences supérieures, le champ électrique incluant toutes les contributions est donnée par :

$$E(t) = \rho \cdot P_0 \cdot \omega^\alpha \cdot \cos(\omega t + \alpha \cdot \frac{\pi}{2}) + \frac{P_0 \cdot \cos(\omega t)}{\varepsilon_{static}} \quad (6)$$

Ce qui permet en complexe après simplification de revenir sur l'équation de Cole-Cole : $R\{\underline{E}(t)\} = E(t)$

$$\underline{E}(t) = P_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon_{static}} + \rho \cdot \omega^\alpha \cdot e^{j\alpha \frac{\pi}{2}} \right] \rightarrow \underline{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{static}} + \rho \cdot \omega^\alpha \cdot e^{j\alpha \frac{\pi}{2}}} \rightarrow \underline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{static}}{1 + (\tau \cdot \omega \cdot j)^\alpha} \text{ avec } \tau^\alpha = \varepsilon_{static} \cdot \rho \quad (7)$$

3. Conclusion

Dans cet article, le lien est fait entre la modélisation de l'hystérésis dynamique ferroélectrique utilisant des opérateurs fractionnaires et le modèle de permittivité complexe diélectrique de Cole-Cole. La comparaison entre la simulation et la mesure à partir de ces deux modèles renseignés et paramétrés de la même façon permet de conclure quant à l'universalité des effets dynamiques au sein d'une céramique piézoélectrique notamment (la relaxation diélectrique).

4. Références

- [1] Daniel Guyomar, Benjamin Ducharne, Gael Sebald, « Dynamical hysteresis model of ferroelectric ceramics under electric field using fractional derivatives », J. Phys.D: Appl.Phys., 2007.
- [2] Kenneth S. Cole, Robert H. Cole, « Dispersion and absorption in Dielectrics 1. Alternating current characteristics », J. of Chemical Physics 9, p.341, 1941.