



**HAL**  
open science

## Modélisation numérique des guides d'onde ouverts : cas des structures élastiques courbes

Khac-Long Nguyen, Fabien Treyssede, Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia,  
Christophe Hazard

► **To cite this version:**

Khac-Long Nguyen, Fabien Treyssede, Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Christophe Hazard. Modélisation numérique des guides d'onde ouverts : cas des structures élastiques courbes. 12ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2014, Poitiers, France. 7p. hal-01064517

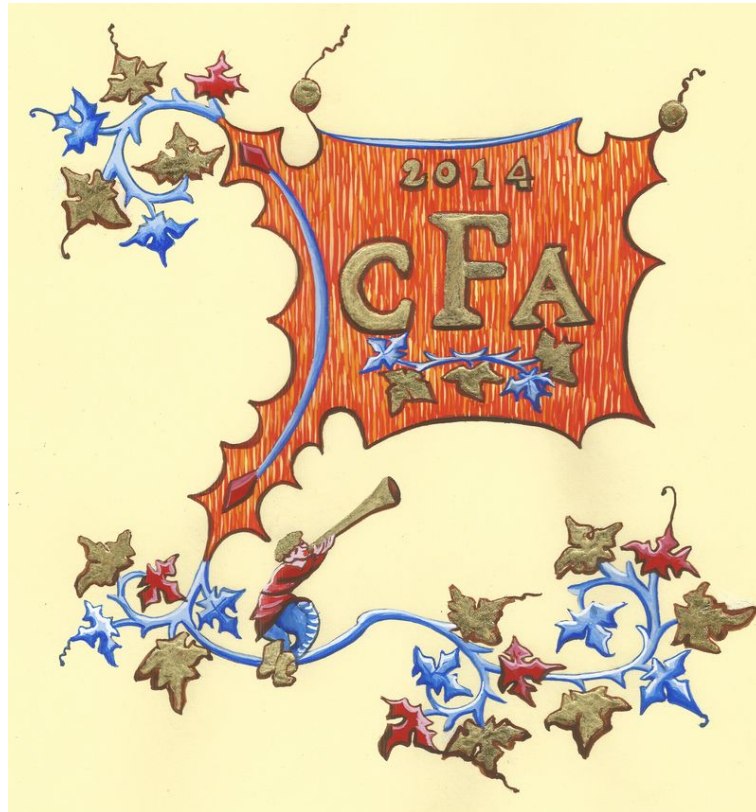
**HAL Id: hal-01064517**

**<https://hal.science/hal-01064517v1>**

Submitted on 24 Feb 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## **Modélisation numérique des guides d'onde ouverts : cas des structures élastiques courbes**

K.L. Nguyen<sup>a</sup>, F. Treyssède<sup>a</sup>, A.-S. Bonnet-Bendhia<sup>b</sup> et C. Hazard<sup>b</sup>

<sup>a</sup>IFSTTAR, GERS/AI, Route de Bouaye - CS4, 44344 Bouguenais, France

<sup>b</sup>ENSTA/POEMS, 828, Boulevard des Maréchaux, 91120 Palaiseau, France

khac-long.nguyen@ifsttar.fr

Pour le contrôle non destructif des matériaux et structures, les ondes élastiques guidées sont intéressantes en raison de leur longue distance de propagation. Cependant pour les guides enfouis dans un milieu infini, les modes peuvent devenir à fuite et s'atténuer selon l'axe du guide, ce qui réduit leur distance de propagation. La recherche des modes les moins atténués est donc nécessaire. Une technique consiste à combiner la méthode des éléments finis semi-analytique (SAFE) et la méthode des couches parfaitement adaptées (PML). Cette approche a été implémentée récemment par les auteurs pour simuler des guides droits enrobés, sans courbure. Nous nous intéressons ici à la modélisation par méthode SAFE-PML des structures courbes, plus particulièrement hélicoïdales, enrobées dans une matrice solide. L'application de ce travail est le contrôle non destructif des torons, structures multi-brin hélicoïdales, constituant les câbles de génie civil. Dans le vide, les guides hélicoïdaux peuvent être modélisés par une méthode SAFE spécifiquement formulée en coordonnées hélicoïdales ou twistées. Notre travail consiste à appliquer des PML selon les directions transversales twistées pour calculer les modes à fuite.

## 1 Introduction

Les méthodes de contrôle non destructif (CND) permettent d'évaluer la santé des matériaux et structures sans les dégrader. Les ondes élastiques guidées sont intéressantes en raison de leur longue distance de propagation. Cependant pour les guides enfouis dans un milieu infini, les modes peuvent devenir à fuite. Ces modes s'atténuent selon l'axe du guide en raison du rayonnement de l'énergie, ce qui réduit leur distance de propagation et donc limite l'application des ondes guidées pour le CND. La recherche des modes les moins atténués est alors nécessaire pour maximiser la distance d'inspection [1, 2].

Des modèles analytiques ont été développés pour les guides élastiques enrobés [3, 4] ayant des géométries simples (plaques et cylindres). Pour les géométries complexes, une approche numérique est nécessaire. Pour simuler les guides dans le vide, une méthode connue est celle des éléments finis semi-analytique (SAFE) [5, 6]. Cette méthode permet de restreindre le domaine de calcul sur la section transversale du guide. Le calcul numérique des modes dans les guides enfouis soulève cependant des difficultés en raison de la section non bornée du guide. Cette difficulté est d'autant plus sévère que les modes à fuite ont un comportement étrange : leur amplitude croît dans la direction transversale. Cette propriété est connue en électromagnétique [7, 8] ou en acoustique [9] et mentionnée parfois pour les guides élastiques enrobés [10, 11].

Pour pallier ces difficultés, la méthode SAFE a été combinée avec d'autres méthodes. Une technique simple, proposée dans [12, 13], consiste à créer des couches viscoélastiques pour absorber les ondes dans le milieu extérieur. Mazzotti et al. [14] ont couplé la méthode SAFE avec la méthode des éléments finis de frontière (BEM). Une méthode alternative est la méthode des couches parfaitement adaptées (PML). La méthode SAFE-PML a été implémentée récemment par les auteurs [15, 16] pour simuler des plaques multicouches enfouies et des guides enrobés de section arbitraire. Néanmoins, ces travaux ne considèrent que des guides droits, sans courbure.

Ce papier consiste à proposer une modélisation des structures courbes hélicoïdales enrobées dans un solide par la méthode SAFE-PML. Le contexte de ce travail est le contrôle non destructif des torons, structures multibrins hélicoïdales, constituant les câbles de génie civil. La courbure d'un guide enrobé a pour effet d'augmenter l'atténuation des modes par fuite [17, 18], ce qui réduit davantage la distance de propagation. L'influence de la courbure des guides a été aussi étudiée en électromagnétisme [19, 20].

Dans le vide, la simulation des brins et du toron a été

effectuée par une méthode SAFE formulée en coordonnées hélicoïdales et twistées [21, 22]. Notre travail consiste à appliquer une PML selon des directions transversales twistées pour calculer des modes à fuite dans les structures hélicoïdales enfouies. Cette technique est appelée SAFE-PML twistée par la suite.

Dans la section 2, la formulation SAFE-PML twistée est introduite. La section 3 présente trois cas. Le premier cas correspond à un cylindre, considéré comme twisté, dans une matrice solide. Ce cas permet de valider la méthode SAFE-PML twistée. L'effet du twist sur le spectre des modes propres est présenté. Le deuxième cas consiste à simuler un brin hélicoïdal enrobé. L'effet de la courbure du guide sur l'atténuation axiale des modes est étudié. Le troisième cas correspond à la simulation d'un toron plongé dans le béton.

## 2 Formulation SAFE-PML twistée

### 2.1 Elastodynamique en système twisté

Le système de coordonnées twistées  $(x, y, z)$  est défini en fonction des coordonnées Cartésiennes  $(X, Y, Z)$  comme suit [21, 22] :

$$\begin{aligned} x &= X \cos(\tau Z) + Y \sin(\tau Z) \\ y &= -X \sin(\tau Z) + Y \cos(\tau Z) \\ z &= Z \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\tau$  dénote la torsion (rotation) du plan  $(x, y)$  autour de l'axe  $z$ .

On suppose que la section du guide d'onde dans le plan  $(x, y)$  est invariante selon la direction axiale twistée  $z$ . Le matériau est élastique linéaire. La dépendance des grandeurs physiques est harmonique en temps en  $e^{-i\omega t}$ . Pour chercher les modes propres, on suppose qu'il n'y a pas d'actions extérieures appliquées sur le domaine ni de sources acoustiques à l'intérieur.

La formulation variationnelle du problème élastodynamique sur le domaine  $\tilde{\Omega} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, z)\}$  est donnée par :

$$\int_{\tilde{\Omega}} \delta \tilde{\epsilon}^T \tilde{\sigma} d\tilde{\Omega} - \omega^2 \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\rho} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}} d\tilde{\Omega} = \mathbf{0} \quad (2)$$

avec  $d\tilde{\Omega} = d\tilde{x}d\tilde{y}dz$ . La notation tilde sera expliquée par la suite, lors de l'introduction de la PML.

La formulation variationnelle est valable pour tout déplacement cinématiquement admissible  $\delta \tilde{\mathbf{u}} = [\delta \tilde{u}_x \ \delta \tilde{u}_y \ \delta \tilde{u}_z]^T$ .  $\delta \tilde{\epsilon} = [\delta \tilde{\epsilon}_{xx} \ \delta \tilde{\epsilon}_{yy} \ \delta \tilde{\epsilon}_{zz} \ 2\delta \tilde{\epsilon}_{xy} \ 2\delta \tilde{\epsilon}_{xz} \ 2\delta \tilde{\epsilon}_{yz}]^T$  est le vecteur des déformations virtuelles.  $\tilde{\sigma} = [\tilde{\sigma}_{xx} \ \tilde{\sigma}_{yy} \ \tilde{\sigma}_{zz} \ \tilde{\sigma}_{xy} \ \tilde{\sigma}_{xz} \ \tilde{\sigma}_{yz}]^T$  est le vecteur des contraintes.  $\tilde{\rho}$  est la masse volumique. L'exposant  $T$  représente la transposée.

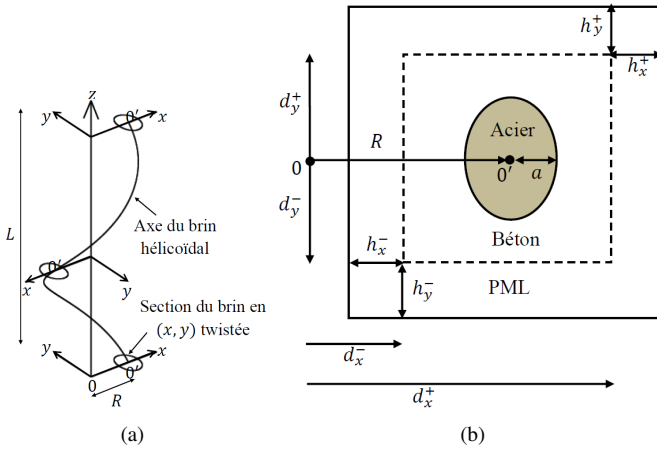


FIGURE 1 – a) Section du brin hélicoïdal dans le plan  $(x, y)$  twisté, b) section du brin enrobé avec la PML twistée.

La relation entre les contraintes et les déformations est  $\bar{\sigma} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\epsilon}$ , où  $\bar{\mathbf{C}}$  est la matrice contenant les propriétés matérielles. En séparant les dérivées transversales et axiales, la relation de déformation-déplacement s'écrit :

$$\bar{\epsilon} = \left( \mathbf{L}_{\bar{x}\bar{y}} + \mathbf{L}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{\mathbf{u}} \quad (3)$$

où :

$$\mathbf{L}_{\bar{x}\bar{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & \tau \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \tau \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial}{\partial \bar{x}} & 0 \\ \tau \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \tau \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} & -\tau & \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \\ \tau & \tau \bar{y} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} - \tau \bar{x} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 2.2 Combinaison entre SAFE et PML

La figure 1 montre un exemple de guide hélicoïdal enrobé. La figure 1a représente la géométrie simplifiée du guide et sa section dans le plan  $(x, y)$  twisté. Une hélice est caractérisée par deux paramètres : le rayon  $R$  de l'hélice dans le plan  $Z = 0$  et le pas d'hélice  $L$  selon l'axe  $Z$ . La torsion des coordonnées twistées (1) associées au brin hélicoïdal est donc égale à  $2\pi/L$ . La courbure du brin est définie par :  $\kappa = 4\pi^2 R / (L^2 + 4\pi^2 R^2)$  [21, 22]. Cette courbure peut être exprimée en fonction de l'angle d'hélice  $\phi$  par  $\kappa = \sin^2 \phi / R$  et  $\tan \phi = 2\pi R / L$ . Plus l'angle d'hélice est grand, plus le brin est courbe. D'après la figure 1a, la section du brin dans le plan  $(x, y)$  twisté est invariante selon l'axe  $z$ , ce qui permet d'appliquer la méthode SAFE [21, 22].

L'application d'une PML dans les directions transversales twistées  $x$  et  $y$  prolonge analytiquement la formulation (2) en coordonnées complexes  $\bar{x}, \bar{y}$  définies par :

$$\bar{x} = d_x^- + \int_{d_x^-}^x \gamma_x(s) ds, \quad \bar{y} = d_y^- + \int_{d_y^-}^y \gamma_y(s) ds \quad (5)$$

$\gamma_x$  et  $\gamma_y$  sont des fonctions complexes de  $x$  et  $y$  respectivement, vérifiant :

- $\gamma_x(x) = 1$  si  $d_x^- \leq x \leq d_x^+$  ;  $\gamma_y(y) = 1$  si  $d_y^- \leq y \leq d_y^+$
- $\text{Im}\{\gamma_x(x)\} > 0$  si  $x < d_x^-$  ou  $x > d_x^+$  ;  $\text{Im}\{\gamma_y(y)\} > 0$  si  $y < d_y^-$  ou  $y > d_y^+$

où  $d_x^\pm$  et  $d_y^\pm$  sont les positions de l'interface entre la PML et le domaine physique (voir figure 1b).

En pratique, la PML est tronquée sous la forme d'un rectangle avec des conditions aux limites arbitraires appliquées sur son bord extérieur. Dans ce papier, une condition de type Dirichlet ( $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ) est choisie.

D'après l'Eq. (5), le changement de variable  $\bar{x} \mapsto x, \bar{y} \mapsto y$  donne :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad d\bar{x} = \gamma_x dx, \quad d\bar{y} = \gamma_y dy \quad (6)$$

où  $\bar{f}(\bar{x}(x), \bar{y}(y), z) = f(x, y, z)$  et  $f$  est une fonction quelconque.

La méthode SAFE est maintenant appliquée, ce qui revient à supposer la dépendance des vecteurs de déplacement  $\mathbf{u}$  et  $\delta \mathbf{u}$  en  $e^{ikz}$  et  $e^{-ikz}$  respectivement, où  $k$  est le nombre d'onde axial. Le problème est donc réduit de trois dimensions  $(x, y, z)$  aux deux dimensions transversales  $(x, y)$ . L'application de la méthode SAFE-PML twistée permet de réécrire la relation de déformation-déplacement (3) sous la forme suivante :

$$\epsilon = \left( \mathbf{L}_{\bar{x}\bar{y}} + ik\mathbf{L}_z \right) \mathbf{u} \quad (7)$$

où l'opérateur  $\mathbf{L}_{\bar{x}\bar{y}}$  donné par l'Eq. (4) est réécrit en remplaçant  $\partial/\partial \bar{x}, \partial/\partial \bar{y}$  par  $1/\gamma_x \partial/\partial x, 1/\gamma_y \partial/\partial y$ .

Après discrétisation par éléments finis de la section  $S$ , on obtient le problème aux valeurs propres suivant :

$$\{\mathbf{K}_1 - \omega^2 \mathbf{M} + ik(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^T) + k^2 \mathbf{K}_3\} \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (8)$$

avec les matrices élémentaires :

$$\mathbf{K}_1^e = \int_{S^e} \mathbf{N}^e T \mathbf{L}_{\bar{x}\bar{y}}^T \mathbf{C} \mathbf{L}_{\bar{x}\bar{y}} \mathbf{N}^e \gamma_{xy} dx dy$$

$$\mathbf{K}_2^e = \int_{S^e} \mathbf{N}^e T \mathbf{L}_{\bar{x}\bar{y}}^T \mathbf{C} \mathbf{L}_z \mathbf{N}^e \gamma_{xy} dx dy$$

$$\mathbf{K}_3^e = \int_{S^e} \mathbf{N}^e T \mathbf{L}_z^T \mathbf{C} \mathbf{L}_z \mathbf{N}^e \gamma_{xy} dx dy$$

$$\mathbf{M}^e = \int_{S^e} \rho \mathbf{N}^e T \mathbf{N}^e \gamma_{xy} dx dy$$

où  $\gamma_{xy} = \gamma_x \gamma_y$  et  $\mathbf{U}$  est le vecteur des déplacements nodaux et  $\mathbf{N}^e$  est la matrice des fonctions d'interpolation dans un élément  $e$ .

Pour une fréquence  $\omega$  fixée, le problème (8) est quadratique en  $k$  et doit être linéarisé [16].

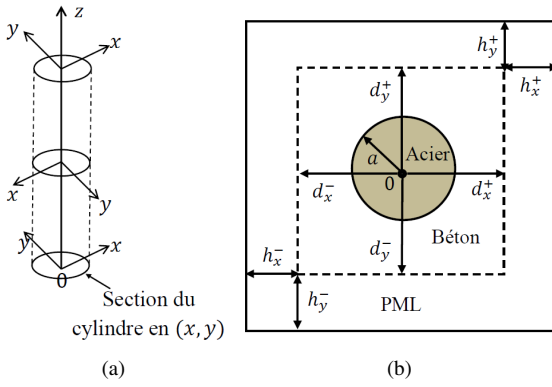


FIGURE 2 – a) Section du cylindre dans le plan  $(x, y)$  twisté, b) section du cylindre enrobé avec la PML twistée.

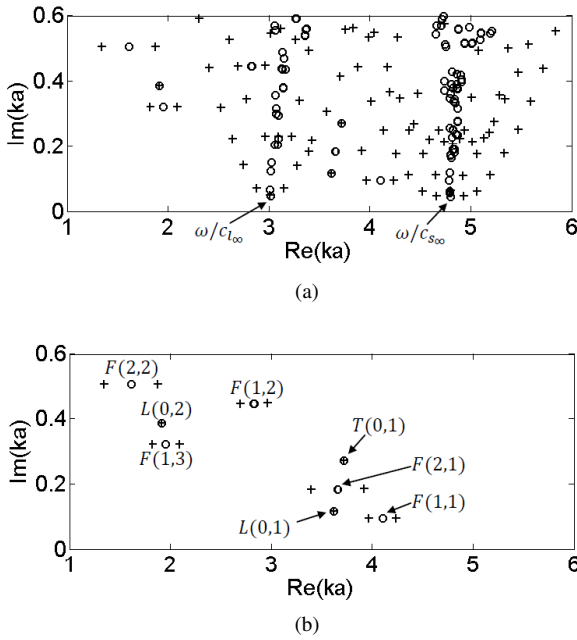


FIGURE 3 – Spectres des modes dans un cylindre acier enrobé dans le béton, calculés par méthode SAFE-PML non twistée (cercles) et SAFE-PML twistée pour  $\tau a=0.134$  (plus) : a) sans filtrage, b) après filtrage.

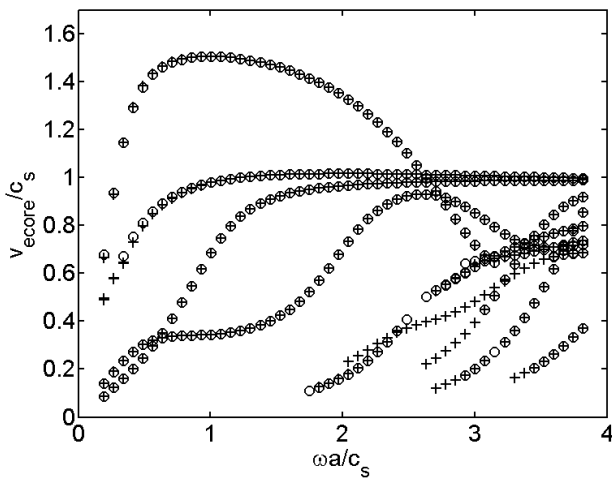


FIGURE 4 – Courbes de dispersion en vitesse d'énergie d'un cylindre acier enrobé dans le béton, calculées par SAFE-PML non twistée (cercles) et SAFE-PML twistée pour  $\tau a=0.5$  (plus).

## 2.3 Paramètres de la PML

D'après la définition des coordonnées complexes (5), la PML dépend de trois paramètres : la largeur de la PML ( $h_x^\pm, h_y^\pm$ ), la position de l'interface de la PML ( $d_x^\pm, d_y^\pm$ ) et les fonctions d'absorption ( $\gamma_x, \gamma_y$ ). Dans ce papier, ces fonctions sont paraboliques [15]. Leurs moyennes dans la PML sont définies par :

$$\bar{\gamma}_x^\pm = \pm \frac{1}{h_x^\pm} \int_{d_x^\pm}^{d_x^\pm \pm h_x^\pm} \gamma_x(s) ds, \quad \bar{\gamma}_y^\pm = \pm \frac{1}{h_y^\pm} \int_{d_y^\pm}^{d_y^\pm \pm h_y^\pm} \gamma_y(s) ds \quad (9)$$

## 3 Résultats

### 3.1 Cylindre twisté enrobé

Comme la section transverse d'un cylindre est un cercle, un cylindre "twisté" reste un cylindre pour n'importe quelle valeur de torsion  $\tau$  (voir figure 2a). Ce cas test peut donc être utilisé pour valider la méthode SAFE-PML twistée. La géométrie de la section transversale du cylindre enrobé avec la PML twistée est représentée par la figure 2b.

On considère un cylindre acier de rayon  $a$ , enrobé dans le béton. Les masses volumiques, les vitesses longitudinale et transversale des matériaux sont :  $\rho_0=7932\text{kg/m}^3$ ,  $c_{l_0}=5960\text{m/s}$ ,  $c_{s_0}=4222.1\text{m/s}$  pour l'acier et  $\rho_\infty=2300\text{kg/m}^3$ ,  $c_{l_\infty}=3260\text{m/s}$ ,  $c_{s_\infty}=2637.5\text{m/s}$  pour le béton. La vitesse transversale du cœur (acier) est plus grande que dans le milieu enrobant (béton). Pour ce cas test, tous les modes sont à fuites. Les paramètres de la PML sont :  $d_x^\pm = d_y^\pm = \pm 1.1a$ ,  $h_x^\pm = h_y^\pm = 0.9a$ ,  $\bar{\gamma}_x^\pm = \bar{\gamma}_y^\pm = 2 + 4i$ , où  $a$  est le rayon du cœur. Soulignons que l'interface de la PML est placée proche de la section du brin pour éviter la croissance transversale des modes à fuite [9, 23, 25].

La figure 3a représente les spectres des nombres d'onde axiales  $ka$  obtenus par la méthode SAFE-PML twistée avec  $\tau a=0.134$  et par SAFE-PML non twisté ( $\tau a=0$ ) à une fréquence normalisée  $\omega a/c_{s_0}=3.85$ . Les éléments finis sont des triangles à six nœuds dont la taille moyenne  $l_e$  est  $0.2a$ .

D'après la figure 3a, la méthode PML ne calcule pas que les modes physiques (modes à fuite) mais aussi d'autres modes, qui sont des modes de rayonnement oscillant principalement dans la PML. Sans twist, ces modes de rayonnement forment presque deux branches ayant pour origines  $\omega/c_{l_\infty}$  et  $\omega/c_{s_\infty}$  et correspondent à la discrétisation de deux continua, respectivement associés aux ondes longitudinales et transversales [16] (les modes de rayonnement d'ordre élevé, éloignés des origines, dévient de leur branche respective en raison d'une discrétisation insuffisante). Avec twist, on observe un évasement prononcé du spectre des modes de rayonnement.

Les modes radiatifs ne sont pas intrinsèques à la physique parce qu'ils dépendent des paramètres de la PML. Ils ne sont pas donc intéressants pour le CND. De plus, leur présence empêche une visualisation claire des modes physiques. Une étape de post-traitement est de les filtrer. Le critère de filtrage proposé est basé sur le rapport de l'énergie cinétique dans la PML sur l'énergie cinétique dans tout le domaine de calcul [16]. Les modes physiques sont ainsi identifiés lorsque ce critère est plus petit qu'une valeur donnée (à fixer par l'utilisateur). L'efficacité de ce critère est illustrée en figure 3b, où les modes à fuite sont bien identifiables après filtrage.

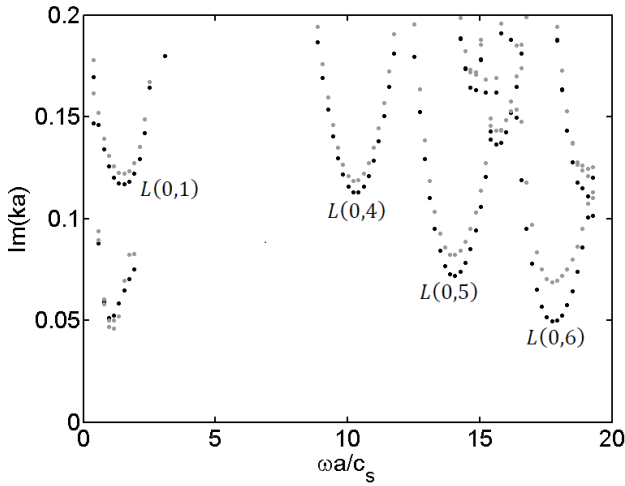


FIGURE 5 – Atténuation des modes dans un cylindre enrobé (noir) et dans un brin hélicoïdal enrobé pour  $\phi=15^\circ$  et  $R=2a$  (gris).

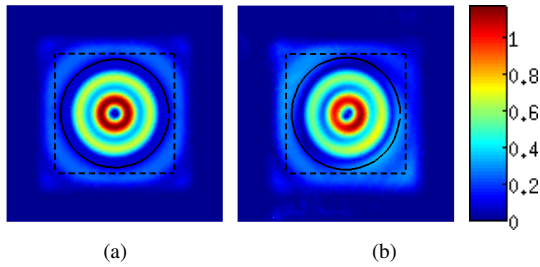


FIGURE 6 – Module du déplacement axial du mode  $L(0,6)$  à  $\omega a/c_{s0}=17.73$  dans : a) un cylindre et b) un brin hélicoïdal enrobés ( $\phi=15^\circ$ ,  $R=2a$ ).

La figure 3b montre également l'influence du twist sur le spectre des modes à fuite. On remarque que les modes de compression  $L(0,n)$  et de torsion  $T(0,1)$  sont inchangés par le twist en raison de leur axisymétrie. En revanche, les nombres d'onde axiaux des modes de flexion  $F(m,n)$ , qui ne sont pas axisymétriques, sont différents dans un système twisté. En non twisté ( $\tau a=0$ ), les nombres d'onde axiaux des  $F(m,n)$  sont des solutions doubles. En système twisté, ces nombres d'onde se dédoublent et sont translatés de  $\pm \tau m a$  en raison de la rotation du plan  $(x,y)$  autour de l'axe  $z$ . Pour plus de détails, on pourra consulter [22, 24].

La translation des nombres d'onde axiaux de  $ka$  à  $ka \pm \tau m a$  ne change pas la nature physique des modes cylindriques. En effet, la figure 4 montre la concordance entre les vitesses d'énergie obtenues selon les deux systèmes, twisté et non twisté. Pour illustrer la validité de la méthode, une forte valeur de torsion a été appliquée ( $\tau a=0.5$ ). Pour chaque fréquence, 100 modes ont été calculés autour de  $+\omega a/c_{l\infty}$ , ce qui permet de calculer les modes ne se propageant que dans une seule direction. La taille moyenne des éléments a été fixée à  $l_e = 0.1a$ . Notons que les résultats obtenus sont en accord avec ceux de la littérature [12, 14].

### 3.2 Brin hélicoïdal enrobé

Le deuxième cas test consiste en un brin hélicoïdal enfoui dans une matrice solide. Le but est d'étudier l'influence de la courbure du brin sur l'atténuation des ondes.

Contrairement à la section perpendiculaire à l'hélice, qui est parfaitement circulaire de rayon  $a$ , celle dans le plan  $(x,y)$  n'est plus un cercle et est désaxée par rapport à l'axe  $z$  (voir figure 1a).

La figure 5 compare l'atténuation selon l'axe  $z$  d'un brin hélicoïdal enrobé pour  $\phi=15^\circ$  et  $R=2a$  ( $\tau a=0.134$ ) avec celle du cylindre enrobé considéré dans la section 3.1. Le cœur est en acier et le solide enrobant est en béton. En raison de la courbure assez faible du guide hélicoïdal, on utilise les mêmes dénominations de modes que pour les cylindres :  $L(0,n)$ ,  $T(0,n)$  et  $F(m,n)$  pour les modes de compression, de torsion et de flexion respectivement.

Dans cette étude, on s'intéresse aux modes longitudinaux qui ont en général une atténuation minimale et une vitesse d'énergie maximale [17]. Ces modes sont donc intéressants pour le CND. En haute fréquence, leurs vitesses de phase sont proches de la vitesse longitudinale  $c_{l0}$  du cœur [17]. Pour trouver ces modes, le calcul est donc centré autour de  $\omega/c_{l0}$ , ce qui permet de ne calculer que quelques modes (ici, 25 modes à chaque fréquence). La taille des mailles dans le cœur est de l'ordre de  $l_e = c_{s0}/5f_{max}$  et génère environ 25000 degrés de liberté (ddl).

Les paramètres de la PML sont données par :  $d_x^- = 0.9a$ ,  $d_x^+ = 3.1a$ ,  $d_y^\pm = \pm 1.1a$ ,  $h_x^\pm = h_y^\pm = 0.9a$ ,  $\bar{\gamma}_x^\pm = \bar{\gamma}_y^\pm = 2 + 4i$ .

D'après la figure 5, l'atténuation axiale des modes de type  $L(0,n)$  dans un brin hélicoïdal enrobé est plus grande que dans un cylindre. Cette différence devient plus importante au fur et à mesure que l'ordre des modes s'élève. Ce résultat montre que la courbure d'un brin hélicoïdal diminue la distance de propagation des modes, ce qui peut rendre leur contrôle non destructif plus difficile. Ce phénomène a été aussi observé pour d'autres types de courbures en élastodynamiques [17, 18] ainsi qu'en électromagnétisme [19, 20]. La figure 6 compare le déplacement axial du mode  $L(0,6)$  dans un cylindre et dans un brin hélicoïdal. Dans ce dernier, le déplacement à l'interface entre le cœur et le milieu enrobant devient sensiblement plus important. Ceci se traduit par une fuite d'énergie dans le milieu enrobant plus élevée.

### 3.3 Toron enrobé

L'application finale de ces travaux est un toron acier enrobé dans le béton. Le maillage de la section transversale du toron enrobé est donné par la figure 7a. Ce toron est constitué de six brins hélicoïdaux autour d'un brin central droit de rayon  $a$ . Chaque brin périphérique a un rayon de  $0.967a$ . Leur angle et rayon d'hélice sont  $\phi=7.9^\circ$  et  $R=1.967a$ . La torsion du système est  $\tau a=0.0705$ .

Il n'y a pas de contact direct entre les brins périphériques, mais chaque brin périphérique est en contact avec le brin central (voir figure 7b). Pour simplifier notre étude, ce contact est supposé ponctuel et collant. Il n'y a ni glissement, ni décollement, ni frottement. La continuité du déplacement dans les trois directions est imposée à l'interface entre le toron et le milieu enrobant. Entre deux brins périphériques consécutifs, le béton est rempli jusqu'à un certain niveau en pratique (voir figure 7b). La région que le béton ne remplit pas est supposée vide. Pour améliorer la précision des résultats numériques, le maillage est raffiné au niveau des points de contact et des extrémités de remplissage du béton. Au total, 14913 ddl sont générés.

Les paramètres de la PML sont :  $d_x^\pm = \pm 3.1a$ ,  $d_y^\pm = \pm 3.1a$ ,

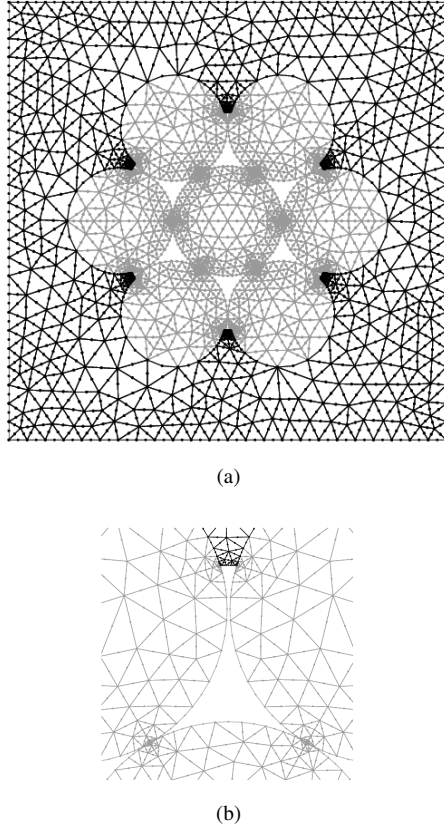


FIGURE 7 – a) Maillage du toron (gris) enrobé dans une matrice solide (noir) b) Zoom du maillage.

$$h_x^\pm = h_y^\pm = 0.9a, \bar{\gamma}_x^\pm = \bar{\gamma}_y^\pm = 2 + 4i.$$

La figure 8a représente la vitesse d'énergie du toron enrobé calculée par la méthode SAFE-PML twistée. Pour chaque fréquence, 150 modes sont calculés autour de  $+\omega/c_{l_0}$ . En comparant avec les résultats du toron dans le vide (figure 9), l'introduction du milieu enrobant modifie significativement le comportement des modes de propagation. Par exemple, pour le mode  $L(0,1)$ , la chute de sa vitesse d'énergie à  $\omega a/c_{s_0} \approx 0.35$  dans le cas sans enrobé [22] se produit à une fréquence plus élevée  $\omega a/c_{s_0} \approx 0.6$  en présence du milieu enrobant. Dans le cas sans enrobé, cette chute se produit sous l'action de deux branches différentes, notées  $L(0,1)a$  et  $L(0,1)b$ . Avec enrobé, le mode  $L(0,1)$  n'est représentée que par une seule branche dans la gamme de fréquence étudiée.

L'atténuation des modes dans un toron enrobé est donnée par la figure 8b. En basse fréquence (entre 0 et 1.5), ce sont les modes  $F(1,1)^+$  et  $F(1,1)^-$  qui ont les atténuations axiales les plus faibles.

Signalons que, en plus de l'atténuation par fuite, la présence de l'enrobant a pour effet de mettre presque en contact les brins périphériques entre eux (voir figure 7b), ce qui modifie davantage les courbes de dispersion par rapport au cas non enrobé.

## 4 Conclusion

Ce papier propose une modélisation par la méthode SAFE-PML twistée des structures hélicoïdales enrobées dans un solide. La technique a été validée par le cas test du cylindre dit twisté.

Une première application de cette méthode a consisté à

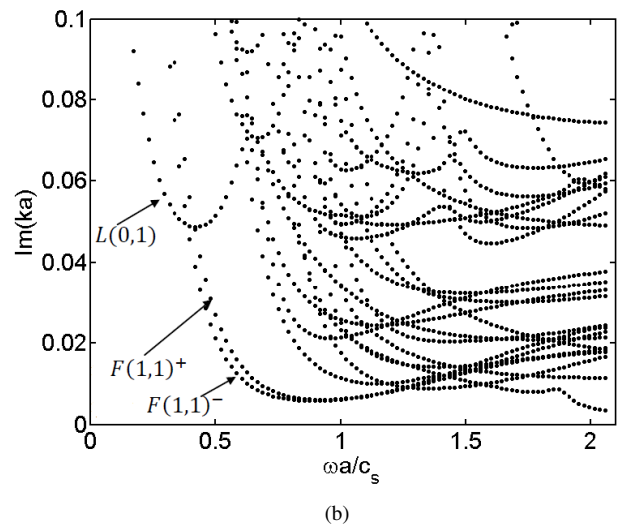
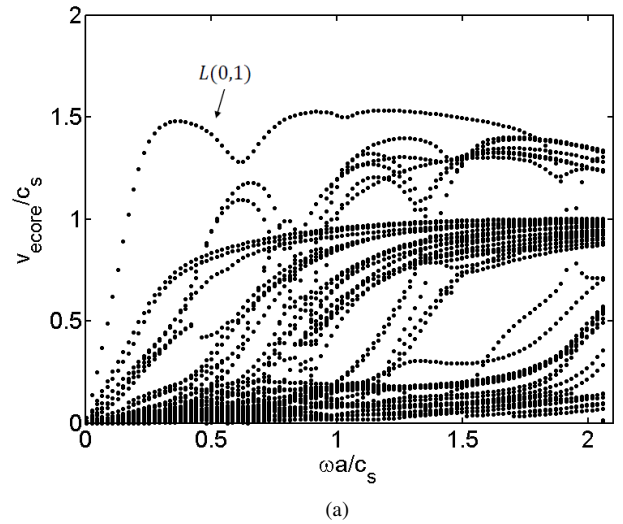


FIGURE 8 – Courbes de dispersion d'un toron acier enrobé dans le béton ( $\phi=7.9^\circ$ ,  $R = 1.967a$ ) en a) vitesse d'énergie et b) atténuation axiale.

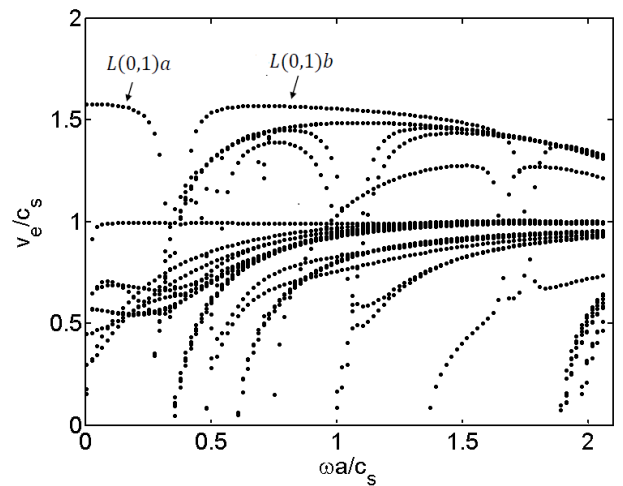


FIGURE 9 – Vitesse d'énergie d'un toron acier dans le vide ( $\phi=7.9^\circ$ ,  $R = 1.967a$ ).

étudier un brin hélicoïdal enfoui dans une matrice solide. Cette étude a montré que la courbure hélicoïdale augmente l'atténuation axiale des modes, ce qui réduit leur distance de propagation et peut donc rendre le CND de ces structures plus difficile.

La seconde application a été celle d'un toron enrobé. D'après les résultats obtenus, l'introduction du milieu enrobant modifie grandement le comportement des modes par rapport au cas du toron dans le vide. Dans la gamme de fréquence considérée, relativement basse, les modes de flexion de type  $F(1, 1)$  se révèlent les moins atténués.

## Références

- [1] M. J. S. Lowe, *Plate waves for the NDT of diffusion bonded titanium*, PhD Thesis Mechanical Engineering Department, Imperial College London (1992).
- [2] N. Ryden and M. J. S. Lowe, Guided wave propagation in three-layer pavement structures, *Journal of the Acoustical Society of America* **116(5)**, 2902-2913 (2004).
- [3] M. J. S. Lowe and P. Cawley, Comparison of the modal properties of a stiff layer embedded in a solid medium with the minima of the plane-wave reflection coefficient, *Journal of the Acoustical Society of America* **97(3)**, 1625-1637 (1995).
- [4] B. Pavlakovic, *Leaky guided ultrasonic waves in NDT*, PhD Thesis Mechanical Engineering Department, Imperial College London (1998).
- [5] T. Hayashi, W. J. Song and J. L. Rose, Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example, *Ultrasonics* **41**, 175-183 (2003).
- [6] I. Bartoli, A. Marzani, F. Lanza di Scalea and E. Viola, Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section, *Journal of Sound and Vibration* **295**, 685-707 (2006).
- [7] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, IEEE Press (1991).
- [8] J. Hu and C. R. Menyuk, Understanding leaky modes : slab waveguide revisited, *Advances in Optics and Photonics* **1**, 58-106 (2009).
- [9] A. S. Bonnet-BenDiha, B. Goursaud, C. Hazard and A. Prieto, A multimodal method for non-uniform open waveguides, *International Congress on Ultrasonics, Proceedings* **3(1)**, 497-503 (2010).
- [10] J. A. Simmons, E. Drescherkrasicka, and H. N. G. Wadley, Leaky axisymmetrical modes in infinite clad rods, *Journal of the Acoustical Society of America* **92(2)**, 1061-1090 (1992).
- [11] A. C. Hladky-Hennion, P. Langlet, and M. de Billy, Conical radiating waves from immersed wedges, *Journal of the Acoustical Society of America* **108(6)**, 3079-3083 (2000).
- [12] M. Castaings and M. Lowe, Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media, *Journal of the Acoustical Society of America* **123(2)**, 696-708 (2008).
- [13] Z. Fan, M. J. S. Lowe, M. Castaings, and C. Bacon, Torsional waves propagation along a waveguide of arbitrary cross section immersed in a perfect fluid, *Journal of the Acoustical Society of America* **124(4)**, 2002-2010 (2008).
- [14] M. Mazzotti, I. Bartoli, A. Marzani and E. Viola, A coupled SAFE-2.5D BEM approach for the dispersion analysis of damped 3 leaky guided waves in embedded waveguides of arbitrary cross-section, *Ultrasonics* (2013).
- [15] F. Treyssède, K. L. Nguyen, A. S. Bonnet-BenDhia and C. Hazard, On the use of a SAFE-PML technique for modeling two-dimensional open elastic waveguides, *Acoustics Nantes (France)*, 667-672, April 23-27 (2012).
- [16] K.-L. Nguyen, F. Treyssède, A.-S. Bonnet-Bendhia and C. Hazard, Computation of dispersion curves in elastic waveguides of arbitrary cross-section embedded in infinite solid media, *NDCM-XIII* Le Mans (France), May 20-24 (2013).
- [17] M. D. Beard, *Guided wave inspection of embedded cylindrical structures*, PhD Thesis Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London (2002).
- [18] K. L. J. Fong, *A study of curvature effects on guided elastic waves*, PhD Thesis Imperial College London, University of London (2005).
- [19] N. N. Feng, G. R. Zhou and C. Xu, Computation of Full-Vector Modes for Bending Waveguide Using Cylindrical Perfectly Matched Layers, *Journal of Lightwave Technology* **20(11)**, 1976-1980 (2002).
- [20] B. M. A. Rahman, D. M. H. Leung, S. S. A. Obayya and K. T. V. Grattan, Numerical analysis of bent waveguides : bending loss, transmission loss, mode coupling, and polarization coupling, *Optical Society of America* **47(16)**, 2961-2970 (2008).
- [21] F. Treyssède, Elastic waves in helical waveguides, *Wave Motion* **45**, 457-470 (2008).
- [22] F. Treyssède and L. Laguerre, Investigation of elastic modes propagating in multi-wire helical waveguides, *Journal of Sound and Vibration* **329**, 1702-1716 (2010).
- [23] S. Kim and J. E. Pasciak, The computation of resonances in open systems using a perfectly matched layer, *Mathematics of Computation* **78(267)**, 1375-1398 (2009).
- [24] O. Onipede, S. B. Dong, Propagating waves and end modes in pretwisted beams, *Journal of Sound and Vibration* **195**, 313-330 (1996).
- [25] B. Goursaud, *Étude mathématique et numérique de guides d'ondes ouverts non uniformes, par approche modale*, Thèse, École Polytechnique (2010).