



HAL
open science

SUR L'ESPACE-TEMPS D'EINSTEIN

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. SUR L'ESPACE-TEMPS D'EINSTEIN. [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2014. hal-01063803v3

HAL Id: hal-01063803

<https://hal.science/hal-01063803v3>

Submitted on 6 Mar 2015 (v3), last revised 11 Nov 2020 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

SUR L'ESPACE-TEMPS D'EINSTEIN

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. We suggest giving some mathematical methods for representing the universe. We begin with a representation based on the chronological fields. This representation is satisfactory locally, but insufficient if we want to describe the universe in its entirety. We model the universe by measuring its states. By using the theory of surgery, we can describe the universe in its entirety. The fundamental problem of this representation is that we can only make local measurements on these states. Even by using the analytical hypothesis, we cannot describe states far away from the events where the measurements are made.

To overcome this difficulty, we bring in a $(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4)$ -structure. Since the property of analytical extension is not generalised, we cannot have a total description of our universe.

The last representation uses complex dimensions, in other words on dimensional systems, which are connected by a "space field". There are two advantages for this presentation approach, the first is that we forget the fundamental role of time and the asymmetry of the dimensions. The second advantage is the existence of an interaction between the dimensions through the existence of a "space field". We left this description of the universe, because we believe that by improving this model, we can produce an interesting representation of the universe.

1. CHAMP CHRONOLOGIQUE

On suppose que Ω est une variété Lorentzienne, connexe, orientée en temps, c'est-à-dire, qu'il existe un champ de vecteurs $T : \Omega \rightarrow T\Omega$ de genre temps $\forall \omega \in \Omega$, $g(\omega)(T(\omega), T(\omega)) < 0$. Un vecteur causal $v \in T_\omega\Omega$ est orienté vers le futur si $g(\omega)(v, T(\omega)) < 0$ et vers le passé si $g(\omega)(v, T(\omega)) > 0$ ($v \in T_\omega\Omega$ est de genre temps si $g(\omega)(v, v) < 0$, de genre lumière si $g(\omega)(v, v) = 0$, de genre espace si $g(\omega)(v, v) > 0$ et causal si $g(\omega)(v, v) \leq 0$). g est la métrique Lorentzienne de signature $(-, +, +, +)$.

Pour l'espace-temps de Minkowski (\mathbb{R}^4, η) alors $\eta = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, le champ $T = \frac{\partial}{\partial t}$ donne l'orientation du temps. Localement, si $X \in \Gamma(\Omega)$, alors en coordonnées locales $X = X^j \partial_j$, où $X^j : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une C^∞ -application et $\{\partial_j\}$ est le "local frame" induit par une carte. Soit $T_\omega = \mathbb{R}T(\omega)$, le sous-espace vectoriel de dimension 1, engendré par le vecteur $T(\omega) \in T_\omega(\Omega)$ alors $T_\omega(\Omega) = T_\omega \oplus E_\omega$, où $E_\omega = T_\omega^\perp$, la somme \oplus est orthogonale pour g . Cette décomposition est unique car T_ω est unique. La restriction $g(\omega)|_{E_\omega}$ est définie positive sur E_ω et $g(\omega)|_{T_\omega}$ est définie négative. Tout champ $X : \Omega \rightarrow T(\Omega)$ se décompose de la façon suivante $X = X_E - \lambda T$, $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une C^∞ -application, X_E est un champ espace, c'est-à-dire, $X_E(\omega) \in E_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$, en particulier $\|X_E(\omega)\|_g^2 =$

Remerciements à Guy Cherbit.

$g(\omega)(X_E(\omega), X_E(\omega)) > 0$ si $X_E(\omega) \neq o_{T_\omega(\Omega)}$, noté o_ω par la suite. A un champ X peut être associé une onde $\Psi = \|X_E\|_g \exp(i\lambda)$, c'est-à-dire, $\forall \omega \in \Omega$, $\Psi(\omega) = \|X_E(\omega)\|_g \exp(i\lambda(\omega))$ avec λ est défini par la relation $X = X_E - \lambda T$.

Definition 1. *Un changement local de chronologie de T à S est une section locale θ de $T^*\Omega \otimes T\Omega$ qui vérifie les conditions suivantes*

$$\theta \otimes T = S \text{ et } \theta \in \mathcal{O}(T\Omega, g).$$

Pour une métrique de Lorentz g fixée, il n'existe pas en général de chronologie sur Ω . On peut définir des chronologies locales sur des ouverts connexes de Ω , on note $\text{dom } T$ cet ouvert. On dit que la chronologie T est maximale si on ne peut pas étendre $\text{dom } T$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de chronologie S telle que $\text{dom } T \subsetneq \text{dom } S$ avec $T = S$ sur $\text{dom } T$.

Proposition 1. *Pour tous les champs chronologiques T et S , il existe un changement local de coordonnées.*

Proof. On prend un ouvert U sur lequel $T\Omega$ est trivialisable, on se donne quatre champs A, B, C et D linéairement indépendants. On peut construire 3 champs X^1, Y^1 et Z^1 tels que $\text{Vect}(X^1, Y^1, Z^1) = (\mathbb{R}T)^\perp$, par le procédé d'orthogonalisation de Graam-Schmit, on peut construire 3 champs X_1, Y_1, Z_1 formant une base orthonormale de $(\mathbb{R}T)^\perp$ pour la métrique riemannienne g_R qui est la restriction de g à $(\mathbb{R}T)^\perp$. On note θ_1 , l'application qui envoie X_1 sur A , Y_1 sur B , Z_1 sur C et T sur D . De façon identique, on construit θ_2 l'application qui envoie X_2 sur A , Y_2 sur B , Z_2 sur C et S sur D , alors l'application $\theta = \theta_2^{-1} \circ \theta_1$ répond à la question car les procédés de construction sont C^∞ . \square

L'ensemble des champs sur l'univers Ω est noté $\Gamma(\Omega)$, les champs espaces, c'est-à-dire, les champs X qui vérifient $X(\omega) \in E_\omega$, sont notés $\Gamma_E(\Omega)$. On a une bijection naturelle $\tau : \Gamma(\Omega) \rightarrow \Gamma_E(\Omega) \times C^\infty(\Omega)$. Sur $\Gamma_E(\Omega)$, on peut définir la notion de produit vectoriel. Si X_E et Y_E sont dans $\Gamma_E(\Omega)$, on pose $X_E \wedge Y_E \in \Gamma_E(\Omega)$ avec, $X_E \wedge Y_E(\omega) = X_E(\omega) \wedge Y_E(\omega)$, le produit vectoriel sur E_ω muni du produit scalaire défini positif $g(\omega)|_{E_\omega}$. On peut définir une loi de composition interne sur $\Gamma_E(\Omega) \times C^\infty(\Omega)$ définie par $(X_E, \lambda) * (Y_E, \mu) = (X_E \wedge Y_E, \lambda\mu)$. La bijection τ induit une loi de composition interne sur $\Gamma(\Omega)$ appelée produit et défini par $X * Y = \tau^{-1}((X_E \wedge Y_E, \lambda\mu))$, $X = X_E - \lambda T$ et $Y = Y_E - \mu T$.

Remark 1. 1) *Les champs de Morse sont les champs pour lesquels λ est une fonction de Morse sur Ω . Les champs de Morse sont denses pour la C^∞ -topologie de Whitney.*

2) *Avec trois champs de vecteurs, on peut construire un champ chronologique en remarquant que*

$$X * (Y * Z) + Y * (Z * X) + Z * (X * Y) = -3\lambda\mu\nu T, \quad (1.1)$$

où $X = X_E - \lambda T$, $Y = Y_E - \mu T$ et $Z = Z_E - \nu T$, c'est l'identité de Jacobi. On pose $\|X\|_\omega^2 = \|X_E\|_\omega^2 + \lambda^2(\omega) \|T\|_\omega^2$, on peut normaliser T , en prenant pour $T(\omega)$ le champ $\frac{T(\omega)}{\sqrt{-g(\omega)(T(\omega), T(\omega))}}$. Avec cette normalisation $\|T\|_\omega^2 = -1$ et $\|X\|_\omega^2 = \|X_E\|_\omega^2 - \lambda^2(\omega)$ et on note simplement $\|X\|^2 = \|X_E\|^2 - \lambda^2$ si aucune confusion n'est possible. On en déduit une généralisation de l'identité de Lagrange

$$\|X * Y\|^2 = \|X_E\|^2 \|Y_E\|^2 - g_E^2(X_E, Y_E) - (\lambda\mu)^2, \quad (1.2)$$

où $g_E(\omega) = g(\omega)|_{E_\omega}$.

Soient deux cartes φ et ψ deux cartes telles que $\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4) \neq \emptyset$, l'application de changement de cartes est stable le long des feuilles si

$$\lambda : \varphi^{-1}(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4)) \rightarrow \psi^{-1}(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4)),$$

avec $\lambda(x, y, z, t) = (x', y', z', t')$ est de la forme $X' = \alpha(X, t)$ et $t' = \beta(t)$, avec $X = (x, y, z)$, $X' = (x', y', z')$, α est une C^∞ -application de $\varphi^{-1}(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4)) \subset \mathbb{R}^4$ dans \mathbb{R}^3 et β est une application C^∞ , d'un ouvert de \mathbb{R} , non nécessairement connexe, à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que les cartes sont stables pour le feuilletage de Minkowski. L'idée du feuilletage consiste à dire que si l'on passe d'une carte φ à une carte compatible ψ , on passe d'une feuille espace de φ à une feuille espace de ψ avec un temps qui ne dépend que du temps relativement à φ de cette feuille. Les applications sont les changements de temps. On peut écrire, $F_t^\varphi \cap \varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4) = F_s^\psi \cap \psi(\mathbb{R}^4) \cap \varphi(\mathbb{R}^4)$ est équivalent à $s = \beta(t)$.

$$\begin{array}{ccc} (X, t) \in \varphi^{-1}(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4)) & \xrightarrow{\lambda} & (X', t') \in \psi^{-1}(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4)) \\ & & \varphi \searrow \swarrow \psi \\ & & \varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4) \end{array}$$

On a $\lambda((X, t)) = (X', t')$, pour l'observateur attaché à la carte φ si son présent est t , le présent de l'observateur attaché à la carte ψ est $t' = \beta(t)$ qui ne dépend pas de la position d'espace des observateurs choisis si les cartes sont compatibles. On a $\lambda^{-1}(\lambda((X, t))) = \lambda^{-1}((\alpha(X, t), \beta(t))) = (\alpha_1((\alpha(X, t), \beta(t))), \beta_1(\beta(t))) = (X, t)$ et on en déduit $\beta_1 = \beta^{-1}$ et $\alpha_1((\alpha(X, t), \beta(t))) = X$, en particulier,

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_1((\alpha(X, t), \beta(t))) = o_{\mathbb{R}^3}.$$

Par permutation de α_1 avec α et β_1 avec β , on a $\alpha((\alpha_1(X, t), \beta_1(t))) = X$ et $\beta(\beta_1(t)) = t$, l'application α_1 est entièrement définie par la relation fonctionnelle $\alpha((\alpha_1(X, t), \beta^{-1}(t))) = X$.

La partie espace de l'espace tangent est $\mathcal{E}\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times E_\omega$ et la partie temps est $\mathcal{T}\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times T_\omega$. Le triplet $(\mathcal{T}\Omega, \pi_{\mathcal{T}}, \Omega)$ est un fibré vectoriel trivial car, $\mathcal{T}\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times T_\omega \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$, $\Phi(\omega, \mu T(\omega)) = (\omega, \mu)$ est un isomorphisme de fibré.

Lemma 1.
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}\Omega & & \mathcal{T}\Omega \\ \downarrow \pi_{\mathcal{E}} & \text{est un fibré et} & \downarrow \pi_{\mathcal{T}} \text{ est le fibré trivial. De plus, } \mathcal{T}\Omega \\ \Omega & & \Omega \end{array}$$
 est la somme de Whitney de ces deux fibrés, $\mathcal{T}\Omega = \mathcal{E}\Omega \oplus \mathcal{T}\Omega$.

Proof. La preuve est dans [6.] □

Remarquons que sur le fibré espace

$$\begin{array}{c} \mathcal{E}\Omega \\ \downarrow \pi_{\mathcal{E}} \\ \Omega \end{array},$$

on a sur chaque fibre E_ω la restriction de $g(\omega)$ est une forme définie positive.

Theorem 1. *Si T est stable sur Ω alors le système de Pfaff $\omega \rightarrow \tau(\omega) = E_\omega$ est complètement intégrable, pour chaque $\omega \in \Omega$, la composante connexe de l'intégrale associée à ce système est une variété connexe appelée l'espace associée au point ω et noté $F = \mathcal{E}_\omega$.*

Proof. La preuve est développée dans [6] □

Si on suppose l'existence d'un champ chronologique stable sur l'univers Ω on a un feuilletage espace-temps de Ω .

Definition 2. *Deux points ω et ϖ de l'univers Ω sont dans la même espace si et seulement si $\mathcal{E}_\omega = \mathcal{E}_\varpi$. La sous-variété \mathcal{E}_ω est la feuille d'espace contenant ω .*

Sur l'univers Ω , on note \mathcal{E}_ω la feuille contenant ω de l'intégrale du système de Pfaff $\omega \rightarrow \tau(\omega) = E_\omega \subset T_\omega\Omega$. Ce système de Pfaff définit un feuilletage de l'univers Ω , noté \mathcal{E} .

De façon analogue le système de Pfaff $\varsigma : \omega \rightarrow T_\omega = \mathbb{R}T(\omega)$ est complètement intégrable. On construit un feuilletage \mathcal{T} dont la feuille contenant ω est notée \mathcal{T}_ω . En chaque point ω de Ω , les feuilles \mathcal{E}_ω et \mathcal{T}_ω sont transversales. Chaque feuille de \mathcal{T} est une section transversale du feuilletage \mathcal{E} et réciproquement. Chaque feuille espace est une variété riemannienne pour $g|_{(\mathbb{R}T)^+}$.

Proposition 2. *Si $F_{\mathcal{T}}$ et $F_{\mathcal{E}}$ deux feuilles de \mathcal{T} et \mathcal{E} , telles que $F_{\mathcal{T}} \cap F_{\mathcal{E}} \neq \emptyset$, l'une des conditions suivantes est vérifiée*

- 1) $F_{\mathcal{T}} \cap F_{\mathcal{E}}$ est discret,
- 2) L'adhérence de $F_{\mathcal{T}} \cap F_{\mathcal{E}}$ dans $F_{\mathcal{T}}$ ou dans $F_{\mathcal{E}}$, contient un ensemble ouvert, on dit que $F_{\mathcal{T}}$ et $F_{\mathcal{E}}$ sont respectivement localement denses,
- 3) $\text{Adh}(F_{\mathcal{T}} \cap F_{\mathcal{E}})$ est un ensemble parfait d'intérieur vide, on dit que $F_{\mathcal{T}}$ et $F_{\mathcal{E}}$ sont des feuilles exceptionnelles.

Remark 2. *Dans notre situation la transversalité des feuilles exclut les situations 2) et 3). De plus, si $F_{\mathcal{T}}$ est \mathbb{S}^1 alors $F_{\mathcal{T}} \cap F_{\mathcal{E}}$ est fini.*

Definition 3. *Un point $\omega \in \Omega$ est dit*

- 1) discret si $\mathcal{E}_\omega \cap \mathcal{T}_\omega$ est discret,
- 2) dense si l'adhérence de $\mathcal{E}_\omega \cap \mathcal{T}_\omega$ dans \mathcal{E}_ω ou dans \mathcal{T}_ω est localement dense, en précisant qu'il est dense "espace" ou "en temps" dans le premier et second cas, ou simplement dense si on a les deux situations.
- 3) exceptionnel si $\text{Adh}(\mathcal{E}_\omega \cap \mathcal{T}_\omega)$ est un ensemble parfait d'intérieur vide.

Corollary 1. *Les points de l'univers Ω sont toujours discrets fini ou infini.*

Definition 4. *Un point ω est à temps cyclique si $\mathcal{T}_\omega = \mathbb{S}^1$, non cyclique si $\mathcal{T}_\omega = \mathbb{R}$.*

Dorénavant, on met sur Ω la structure de variété analytique définie par Whitney. Les feuilletages \mathcal{E} et \mathcal{T} deviennent analytiques.

Theorem 2. *Si tous les éléments de $\pi_1(\Omega)$ sont finis alors tous les points ω sont à temps non cycliques. Si ω est à temps cyclique alors la courbe fermée \mathcal{T}_ω définie une classe d'homotopie d'ordre infini dans $\pi_1(\Omega)$.*

Proof. C'est le théorème de Haefliger[5]. □

2. UN PREMIER MODÈLE D'ESPACE-TEMPS

Soit Λ une variété fermée, connexe, de dimension 4 et V une sous-variété compacte, sans bord, non nécessairement connexe, de codimension ≥ 2 . La variété $\Omega = \Lambda \setminus V$ est une variété connexe qui représente notre univers. La variété V est dite variété à l'infini et est notée $V = \Omega_\infty$. La variété Ω_∞ est une variété compacte, sans bord, de dimension 0, 1 ou 2. La dimension 0, permet de représenter Ω comme une variété fermée privée de k points. Si $k = 1$, Λ est le compactifié d'Alexandroff de Ω . Pour la dimension 1, on retire à Λ , un nombre fini k de lacets simples plongés dans Λ deux à deux disjoints. Si la dimension est 2, on retire un nombre fini k de surfaces fermées de genres g_1, g_2, \dots, g_k .

On peut généraliser en supposant que Ω_∞ est une réunion finie de variétés fermées, deux à deux disjointes, de codimension ≥ 2 . On note dans cette situation $\text{codim } \Omega_\infty$, la plus petite codimension de chaque composante connexe de Ω_∞ .

Theorem 3. 1) Si $\text{codim } \Omega_\infty \geq 3$, alors l'inclusion $\text{in} : \Omega \rightarrow \Lambda$ induit un isomorphisme $\text{in}_* : \pi_1(\Omega, \omega) \rightarrow \pi_1(\Lambda, \omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

2) Si $\text{codim } \Omega_\infty = 2$, $\text{in}_* : \pi_1(\Omega, \omega) \rightarrow \pi_1(\Lambda, \omega)$ est surjectif pour tout $\omega \in \Omega$.

Proof. C'est un théorème de Godbillon[3]. □

Remark 3. Le groupe de Poincaré de l'univers est isomorphe au groupe fondamental d'une variété fermée sous l'hypothèse que sa structure à l'infini est formée d'un nombre fini de points.

On suppose l'existence d'un champ chronologique stable sur Ω . Ω est une variété à deux feuilletages transversaux, notés \mathcal{T} et \mathcal{E} avec $\text{codim } \mathcal{T} = 3$ et $\text{codim } \mathcal{E} = 1$. Il y a deux types de feuilles pour ces feuilletages, les feuilles F pour lesquelles $\text{Adh}_\Lambda F = F$ qui sont les feuilles compactes et les feuilles pour lesquelles $\text{Adh}_\Lambda F \neq F$.

On se place dans la situation où $\Omega_\infty = \{\infty_1, \infty_2, \dots, \infty_k\}$ alors $\text{Adh}_\Lambda F = F \cup \{\infty_j, j \in J\} = F_J$ où J est un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, k\}$. Les points $\infty_1, \infty_2, \dots, \infty_k$ sont les points de contact des feuilles à l'infini. On note pour tout $J \in \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, k\})$, $\Omega_J = \cup_{\text{Adh}_\Lambda F = F_J} F$. La famille $\{\Omega_J : J \in \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, k\})\}$ forment une partition de l'univers Ω . Si le système de Pfaff $\tau : \omega \rightarrow \tau(\omega) = E_\omega$, est prolongeable à l'infini, c'est-à-dire, si $\lim_{\omega \rightarrow \infty_j} \tau(\omega) = E_j$ alors toute feuille $F_\mathcal{E}$ telle que $\text{Adh}_\Lambda F_\mathcal{E} = F_\mathcal{E} \cup \{\infty_j, j \in J\} = F_{\mathcal{E}, J}$, est une sous-variété et $T_{\infty_j} F_{\mathcal{E}, J} = E_j$. On a pincé les feuilles-espace aux points à l'infini. Pour illustrer la situation, il suffit de prendre un livre dont les feuilles sont les pages et dont on a pincé les feuilles en un nombre fini de points, ayant pour espace tangent E_j . On définit ainsi, un feuilletage pincé en un nombre fini de points.

Si le système de Pfaff $\varsigma : \omega \rightarrow T_\omega$ est prolongeable à l'infini, c'est-à-dire, $\lim_{\omega \rightarrow \infty_j} \varsigma(\omega) = T_j$ alors toute feuille $F_\mathcal{T}$ telle que $\text{Adh}_\Lambda F_\mathcal{T} = F_\mathcal{T} \cup \{\infty_j, j \in J\} = F_{\mathcal{T}, J}$ est une sous-variété homéomorphe à \mathbb{S}^1 ou à $[0, 1]$ avec, $T_{\infty_j} F_{\mathcal{T}, J} = T_j$. Les lacets simples $F_{\mathcal{T}, J}$ se coupent tangentiellement aux points ∞_j pour $j \in J$. Sans l'hypothèse de prolongement par continuité à l'infini des systèmes de Pfaff, on a un théorème de fibration de l'univers si les feuilles-espace sont compactes.

Remark 4. $\lim_{\omega \rightarrow \infty_j} \varsigma(\omega) = T_j$ signifie qu'il existe des sections locales X_i^j dans une carte de ∞_j telles que $\text{Vect} \left\{ X_i^j(\omega) \right\} = \varsigma(\omega)$ avec $T_j = \text{Vect} \left\{ X_i^j(\infty_j) \right\}$.

Theorem 4. *Si $\Omega = \Omega_\emptyset$ et $\Omega \neq \Lambda$ alors Ω est l'espace total d'un fibré de base \mathbb{R} . Si Ω est compacte, Ω est l'espace total d'un fibré de base \mathbb{S}^1 .*

Proof. C'est un théorème de Reeb [8] et [9], il suffit de remarquer que toutes les feuilles-espace sont compactes et que, sous cette hypothèse, Ω est l'espace total d'un fibré de base \mathbb{S}^1 ou \mathbb{R} suivant la compacité de Ω . \square

Si $\infty \in \text{Adh}_\Lambda F_\mathcal{E}$, un chemin γ de Λ , tel que $\gamma(0) = \infty$ pour un point à l'infini $\infty \in \Omega_\infty$ et $\gamma(t) \in F_\mathcal{E}$ pour $t \neq 0$, est un $F_\mathcal{E}$ -chemin. On note $T_\infty F_\mathcal{E}$, l'ensemble des vecteurs $\gamma'(0)$, lorsque γ parcourt l'ensemble des $F_\mathcal{E}$ -chemins. En général, $T_\infty F_\mathcal{E}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $T_\infty \Lambda$. C'est un cône de sommet l'origine o_∞ de $T_\infty \Lambda$. Ce n'est pas un cône de lumière en général car il n'y a pas de prolongement de la métrique de Lorentz aux points à l'infini. Dans le cas où Ω_∞ est formé de sous-variétés de dimension 0, 1 et 2 en nombre fini, on dit que le feuilletage est stable à l'infini si pour $\infty \in V$, où V est une composante connexe de Ω_∞ , on a $T_\infty F_\mathcal{E} = T_\infty V$. Si $V = \{\infty\}$, il n'y a plus d'espace en ce point, si $V = \mathbb{S}^1$ alors l'espace est à une dimension au plus sur les lacets à l'infini. Si $V = \mathbb{T}_g$, une surface de genre $g \geq 0$, l'espace est de dimension au plus 2. A l'extérieur des points à l'infini, les feuilles-espace sont de dimension 3.

Pour le feuilletage temps, si $V = \{\infty\}$ il n'y a plus de temps en ce point, si $V = \mathbb{S}^1$ ou \mathbb{T}_g alors le temps est à une dimension au plus.

On peut imaginer une structure à l'infini ayant des sous-variétés de dimension $n = 3$ ou $n = 4$. Si $n = 3$, on se restreint à la partie connexe de Ω , privée des sous-variétés de dimension 3 à l'infini, où vit le champ chronologique de notre univers. Notre univers est l'intérieur d'une variété compacte à bord, dont le bord est une variété à l'infini. Si $n = 4$, notre univers est le bord à l'infini, d'un univers de dimension ≥ 5 . On a une construction en "gigogne" d'une succession d'univers de dimensions supérieures. Lorsque l'on impose que les dimensions de Ω_∞ sont de dimensions inférieures ou égales à 2, cette construction en "gigogne" reste vraie sans que l'on soit dans l'obligation d'augmenter la dimension 4 des univers que l'on recolle par somme connexe sur les différentes structures à l'infini.

3. LES ÉTATS PHYSIQUES DE L'UNIVERS

On suppose que le compactifié d'Alexandrov de l'univers Ω , $\Omega \cup \{\infty\}$ est une C^∞ -variété fermée. Dans cette situation, on dit que l'univers est stable à l'infini. On peut généraliser cette notion de stabilité en prenant une compactification à plusieurs points ou tout autre type de compactification décrite précédemment. On se donne une fonction C^∞ , $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, qui mesure un état physique de l'univers Ω , cette fonction peut être une entropie ou une mesure physique réelle.

Definition 5. *Deux événements p et q sont dans le même état si $\Phi(p) = \Phi(q)$. On dit que les événements sont dans le même présent pour la fonction d'état Φ . L'événement p est dans le passé de l'événement q et q est dans le futur de p si $\Phi(p) < \Phi(q)$ pour la fonction d'état Φ .*

Si s est une valeur régulière de l'état Φ alors $\Phi^{-1}(s)$ est une hypersurface de Ω . Pour définir un événement de l'univers, il faut définir exactement un nombre $n = \dim \Omega$ d'états Φ_1, \dots, Φ_n , deux à deux transversaux, $\Phi_i \pitchfork \Phi_j$ et $i \neq j$. Si s_1, \dots, s_n sont des valeurs régulières pour les états Φ_1, \dots, Φ_n alors le sous-espace $\cap_i \Phi_i^{-1}(s_i)$ est une sous-variété de Ω de dimension 0, c'est-à-dire, une suite de points

de Ω sans point d'accumulation dans Ω , les points d'accumulation possibles dans le compactifié sont les points à l'infini. L'événement ω n'est pas entièrement localisé mais peut se situer en chaque point de $\cap_i \Phi_i^{-1}(s_i)$. C'est un "principe d'incertitude de localisation" pour un événement décrit par $n = \dim \Omega$ états transversaux deux à deux.

On peut approcher une fonction d'état par une fonction de Morse. Pour structurer cet univers on fait l'hypothèse que la fonction d'état Φ est une fonction de Morse sur Ω . L'existence de telles fonctions de Morse existent par le théorème de densité de Milnor pour la C^k -topologie fine de Whitney. Pour une fonction d'état de Morse, si α est une valeur d'état non dégénérée, alors $\Omega_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ est une sous-variété de dimension $n - 1$. Pour $n = 4$ les sous-espaces, dans un état non dégénéré donné, sont des sous-variétés de dimension 3. Les tranches d'univers de ce type qui ne contiennent pas le point à l'infini dans leur adhérence relativement à $\Omega \cup \{\infty\}$, sont des variétés fermées de dimension 3 dont chaque composante connexe peut être décrite à l'aide des huit géométries de Thurston [10]. L'ensemble des points critiques est discret, ce sont les points dont la valeur d'état est irrégulière. Si on note $\Omega_{\leq \alpha}$, le passé de Ω_α , c'est à dire, $\Omega_{\leq \alpha} = \Phi^{-1}(\cdot] - \infty; \alpha]$, le présent est le bord du passé, alors on peut reconstruire l'univers à l'aide des deux théorèmes suivants,

Theorem 5. *Si $[\alpha, \beta]$ ne contient aucun état irrégulier alors la portion d'univers $\Phi^{-1}([\alpha, \beta])$ est difféomorphe à $\Omega_\alpha \times [\alpha, \beta]$. Le passé détermine entièrement le futur. En particulier, le présent Ω_α est difféomorphe au présent Ω_β .*

Theorem 6. *Si p est un événement critique d'indice λ , et s'il existe une petite variation $\varepsilon > 0$ d'état pour laquelle $\Omega_{\leq \Phi(p)+\varepsilon} \setminus \Omega_{\leq \Phi(p)-\varepsilon}$ ne contient que p comme point singulier, alors $\Omega_{\leq \Phi(p)+\varepsilon}$ est obtenue par chirurgie de type $(\lambda, n - \lambda)$ à partir du passé $\Omega_{\leq \Phi(p)-\varepsilon}$.*

Proof. C'est le théorème de chirurgie de Milnor-Morse-Smale [7] et [1]. □

Remark 5. 1) On rappelle la construction des chirurgies de type $(\lambda, n - \lambda)$. Si N est une variété de dimension n , de bord non vide $\partial N \neq \emptyset$ et φ est un plongement de $S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda}$ dans ∂N , on pose $\chi(N, \varphi) = \frac{N \cup D^n}{\sim}$, \cup est l'union disjointe de N et D^n et \sim représente la relation d'équivalence suivante: $x \in \partial N \sim y \in \partial D^n = S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \cup D^\lambda \times S^{n-\lambda-1}$ si et seulement si $\varphi(x) = y$. L'espace $\chi(N, \varphi)$ est une C^∞ -variété obtenue par chirurgie de type $(\lambda, n - \lambda)$ à partir de la variété à bord N .

2) On peut construire des états de Morse pour lesquels chaque présent ne contient au plus qu'un événement singulier. Ainsi, pour étudier la géométrie de l'univers, par rapport à cet état, il suffit d'analyser la géométrie du passé et reconstruire par chirurgie, à partir de ce passé, le futur local de notre univers.

Si on veut décrire de façon déterministe chaque événement, on peut plonger Ω dans \mathbb{R}^p avec $n \leq p \leq 2n + 1$, c'est le théorème de plongement de Withney. Il suffit de décrire au plus 9 états $\{\Phi_j\}$ tels que $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_9)$ soit un plongement. Pour un déterminisme local, il suffit d'immerger l'univers dans \mathbb{R}^p , les théorèmes de Gromov-Smale [4] et [2] de la théorie des immersions permettent de limiter le nombre d'états suivant la nature topologique de l'univers Ω . Dans l'hypothèse non déterministe, il y a donc, un principe d'incertitude sur la localisation d'un événement.

4. L'UNIVERS Ω COMME $(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4)$ -VARIÉTÉ

Soient $\varphi, \psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \Omega$, deux cartes de Ω telles que $\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4) \neq \emptyset$, le changement de carte est donné par

$$\lambda : \varphi^{-1}(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4)) \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \psi^{-1}(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4)) \subset \mathbb{R}^4$$

où $\lambda = \psi^{-1} \circ \varphi |_{\varphi^{-1}(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4))}$. Sur un C^∞ -variété Ω , l'unique structure analytique induite par la C^∞ -structure, permet de choisir des cartes analytiques $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \Omega$. Le changement de carte λ est analytique sur l'ouvert $\varphi^{-1}(\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4))$.

Definition 6. Les cartes φ et ψ sont "analytiquement compatibles" si et seulement si le changement de carte λ est la trace d'un difféomorphisme analytique Λ de \mathbb{R}^4 .

Remark 6. Ce prolongement analytique est unique d'après le théorème d'unicité analytique.

Un m -uplet de cartes $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ est stable si φ_j et φ_{j+1} sont "analytiquement compatibles" pour tout $j = 1, \dots, m-1$. Soit $\phi_j = \varphi_j^{-1} : U_j = \varphi_j(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{R}^4$, pour $j = 1, \dots, m$ et $\lambda_j = \phi_j \circ \phi_{j+1}^{-1} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_{j+1} : \phi_{j+1}(U_j \cap U_{j+1}) \rightarrow \phi_j(U_j \cap U_{j+1})$ alors l'ajustement de carte ϕ_1 est donné par $\Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \dots \circ \Lambda_{m-1} \circ \phi_m$ où Λ_j est l'unique extension analytique de λ_j . Si on pose $\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \dots \circ \Lambda_{m-1}$, alors l'ajustement de carte dans ϕ_1 est $\Lambda \circ \phi_m$ et l'ajustement dans ϕ_m est $\Lambda^{-1} \circ \phi_1$.

Dans ce qui suit on suppose que tous les changements de cartes analytiques sont les traces des éléments d'un sous-groupe \mathcal{G} du groupe des isométries analytiques de l'univers de Minkowski, c'est-à-dire, Ω est une $(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4)$ -variété. Les sous-groupes \mathcal{G} du groupe des isométries analytiques de l'univers de Minkowski, à savoir \mathbb{R}^4 , muni de la métrique $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ (on normalise en prenant $c = 1$), qui opèrent transitivement sur \mathbb{R}^4 permettent de construire l'application développante pour un événement fixé $\omega \in \Omega$ et une carte ψ de la $(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4)$ -variété Ω avec, $\psi(o) = \omega$, $o \in \mathbb{R}^4$. Cette application est notée $D : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^4$, D est un difféomorphisme si et seulement si la métrique induite sur l'univers Ω par la métrique de Minkowski fait de Ω un espace métrique complet. Dans cette situation, l'univers Ω est entièrement décrit par son groupe d'holonomie $\Gamma \subset \mathcal{G}$, qui est isomorphe à $\pi_1(\Omega)$.

Theorem 7. Avec les hypothèses précédentes, le revêtement universel de Ω est difféomorphe à \mathbb{R}^4 et Ω est difféomorphe à $\Gamma \backslash \mathbb{R}^4$.

Proof. \mathcal{G} opère analytiquement et transitivement, avec stabilisateur compacte en chaque point de \mathbb{R}^4 muni de la métrique de Minkowski. Avec ces hypothèses, Ω est $(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4)$ -complète. Le revêtement universel de Ω est \mathbb{R}^4 . On a le difféomorphisme de Ω sur $\Gamma \backslash \mathbb{R}^4$. \square

Le choix du groupe \mathcal{G} est entièrement décrit par la nature ondulatoire de l'univers. A chaque changement de cartes de φ à ψ , on définit un élément Λ du groupe structural \mathcal{G} . Une onde Ψ sur l'univers Ω est une application $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie pour toute carte $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \Omega$ la propriété $\int_{\mathbb{R}^4} |\Psi \circ \varphi|^2 dxdt < +\infty$, on note $\|\Psi \circ \varphi\|^2$ cette intégrale.

Soit $\Phi_\Lambda : L^2(\mathbb{R}^4) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^4)$, l'application définie par $\Phi_\Lambda(\alpha) = \alpha \circ \Lambda$, où Λ est l'unique extension du changement de carte de φ à ψ . Si on prend une onde Ψ de l'univers Ω , on a $\Phi_\Lambda(\Psi \circ \psi) = \Psi \circ \varphi$. L'application est une bijection de $L^2(\mathbb{R}^4)$, l'hypothèse que l'on fait est la suivante, qui est une hypothèse naturelle si on se

réfère aux principes quantiques, Φ_Λ est une transformation de Wigner, c'est-à-dire, $|\langle \Phi_\Lambda \alpha, \Phi_\Lambda \beta \rangle| = |\langle \alpha, \beta \rangle|$ pour tout α et β dans $L^2(\mathbb{R}^4)$.

Theorem 8. *Il existe une application $\theta : L^2(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathbb{S}^1$ et une application*

$$L : L^2(\mathbb{R}^4) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^4)$$

telles que, $\Phi_\Lambda(\alpha) = \theta(\alpha)L(\alpha)$, avec L est unitaire ou L est antiunitaire.

Proof. C'est le théorème de Wigner [11]. □

\mathcal{G} est un groupe, donc $\mathcal{G} = \{ \Lambda : \Phi_\Lambda = \theta \times L, |\theta| = 1 \text{ et } L \in \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^4)) \}$. L ne peut pas être antiunitaire. Les applications de \mathcal{G} sont les isométries de l'espace de Minkowski pour lesquelles l'opérateur Φ_Λ conserve le produit hermitique de $L^2(\mathbb{R}^4)$. Il faut vérifier que ce groupe \mathcal{G} opère transitivement sur \mathbb{R}^4 . Le groupe de Poincaré propre $\mathcal{L}_0 \times \mathbb{R}^4$ est contenu dans le groupe \mathcal{G} et $\mathcal{L}_0 \times \mathbb{R}^4$ opère transitivement sur \mathbb{R}^4 . Pour une isométrie $\Lambda \in SO(3,1) \times \mathbb{R}^4$, $\|\Phi_\Lambda \alpha\|^2 = \int_{\mathbb{R}^4} |\alpha \circ \Lambda(x,t)|^2 dxdt$, le Jacobien est $J_\Lambda(x,t) = \left| \det \vec{\Lambda}(x,t) \right| = 1$. En particulier,

$$\|\Phi_\Lambda \alpha\|^2 = \int_{\mathbb{R}^4} |\alpha \circ \Lambda(x,t)|^2 J_\Lambda(x,t) dxdt = \int_{\mathbb{R}^4} |\alpha(x,t)|^2 dxdt = \|\alpha\|^2,$$

par changement de variable. On rappelle que le produit semi-direct est décrit par $(\Lambda, x)(\Lambda', x') = (\Lambda\Lambda', x + \Lambda x')$ et \mathcal{L}_0 correspond à la composante connexe de $SO(3,1)$, contenant I_4 .

Remark 7. *L'univers de Poincaré-Minkowski-Einstein (PME) est obtenu pour le groupe de Poincaré $\mathcal{G} = SO(3,1) \times \mathbb{R}^4$.*

5. UNE GÉNÉRALISATION DE LA $(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4)$ -STRUCTURE DE Ω

\mathcal{G} désigne toujours un sous-groupe de difféomorphismes analytiques de \mathbb{R}^4 . On note \mathcal{A} , l'atlas des cartes analytiques de l'univers Ω . Une sous-famille \mathcal{F} de \mathcal{A} a la propriété de \mathcal{G} -extension sur \mathbb{R}^4 , si pour tout couple de cartes $(\varphi, \psi) \in \mathcal{F}^2$, tel que $\varphi(\mathbb{R}^4) \cap \psi(\mathbb{R}^4) \neq \emptyset$, le changement de carte λ a une extension sur \mathbb{R}^4 appartenant à \mathcal{G} . Dans tout ce qui suit \mathcal{F} est une famille de cartes ayant la propriété de \mathcal{G} -extension sur \mathbb{R}^4 , on pose $\Omega_{\mathcal{F}} = \cup_{\varphi \in \mathcal{F}} \varphi(\mathbb{R}^4)$, alors $\Omega_{\mathcal{F}}$ est un ouvert de Ω , non nécessairement connexe, qui a la structure de $(\mathcal{G}, \mathbb{R}^4)$ -variété pour l'atlas engendré par \mathcal{F} . La famille $\{\Omega_{\mathcal{F}}\}$ où \mathcal{F} parcourt l'ensemble des parties \mathcal{A} , ayant la propriété de \mathcal{G} -extension sur \mathbb{R}^4 , forme un recouvrement d'ouverts de Ω .

Les familles réduites à une carte, ont la propriété de \mathcal{G} -extension sur \mathbb{R}^4 , c'est le cas trivial. Une famille \mathcal{F} de \mathcal{A} , ayant la propriété de \mathcal{G} -extension sur \mathbb{R}^4 , est maximale si pour toute carte $\psi \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \cup \{\psi\}$ n'a pas la propriété de \mathcal{G} -extension sur \mathbb{R}^4 . On suppose, par la suite, que \mathcal{F} est maximale. La variété ouverte $\Omega_{\mathcal{F}}$ a une structure de $(\mathcal{H}, \mathbb{R}^4)$ -variété, où \mathcal{H} est le sous-groupe de \mathcal{G} , engendré par l'ensemble des \mathcal{G} -extensions des changements de cartes appartenant à \mathcal{F} .

Theorem 9. *Il existe un homomorphisme $\Phi : \pi_1(\Omega_{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathcal{H}$, appelée l'holonomie de $\Omega_{\mathcal{F}}$ et une application continue Φ -équivariante $(D\gamma = \Phi(\gamma) \circ D)$ pour $\gamma \in \pi_1(\Omega_{\mathcal{F}})$,*

$D : \tilde{\Omega}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}^4$, appelé le développement de $\Omega_{\mathcal{F}}$, qui est un isomorphisme local.

Le couple (Φ, D) est unique dans le sens suivant: Pour tout isomorphisme local $D' : \tilde{\Omega}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}^4$, il existe $h \in \mathcal{H}$ tel que $D' = h \circ D$, D' est Φ' -équivariante pour

l'homomorphisme Φ' conjugué de Φ par h , c'est-à-dire, $\Phi' : \pi_1(\Omega_{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathcal{H}$ et $\Phi'(\gamma) = h\Phi(\gamma)h^{-1}$.

Remark 8. On identifie le revêtement universel à $\pi_1(\Omega_{\mathcal{F}})$ et la projection $\pi : \tilde{\Omega}_{\mathcal{F}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{F}}$, s'identifie à $\pi(\gamma) = \gamma_a(1)$ avec $\gamma = [\gamma_a]$ et $\gamma_a(0) = a$. Le groupe d'holonomie est $\Gamma = \Phi(\Omega_{\mathcal{F}})$.

Theorem 10. Si \mathcal{H} est un sous-groupe d'isomorphismes de Lorentz et $\Omega_{\mathcal{F}}$ est complet pour la métrique héritée de la métrique de Minkowski, alors $\Omega_{\mathcal{F}}$ est isomorphe à $\Gamma \backslash \mathbb{R}^4$.

Proof. C'est un théorème de Thurston [10]. □

On peut représenter l'univers Ω , comme une union de sous-univers difféomorphes à $\Gamma \backslash \mathbb{R}^4$, ayant même point à l'infini dans leur compactification d'Alexandrov. Dans cette représentation l'univers est entièrement décrit par une famille de sous-groupes du groupe des isométries de l'univers de Minkowski. Cette représentation est mathématiquement intéressante mais physiquement pas satisfaisante car si on se situe dans une partie de l'univers de la forme $\Gamma \backslash \mathbb{R}^4$, on ne peut pas accéder analytiquement à une autre partie de l'univers dont le groupe d'holonomie est différent de Γ .

6. MODÉLISATION EN DIMENSIONS COMPLEXES

Les zones à l'infini de l'univers sont les parties de l'univers où la métrique disparaît et où les notions de temps et d'espace n'ont plus la même signification physique. Dans ces zones les dimensions d'espace et de temps varient. Dans ce qui suit, on va donner une représentation des dimensions non asymétriques. Pour cela, il est nécessaire de faire intervenir la notion de dimension complexe. Soit Ω un espace mesurable muni d'une σ -algèbre et d'une mesure positive $d\mu$ sur cette σ -algèbre.

Definition 7. 1) Si ω est un élément de l'univers Ω , un système dimensionnel en $\omega \in \Omega$ est une section ψ du fibré trivial $\Omega \times \mathbb{C}^d$ pour laquelle si $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d)$ alors $\psi_i \in L^2(\Omega, d\mu)$.

2) Une dimension espace est telle que $\text{Im} \psi_j = 0$ et une dimension temps vérifie $\text{Re} \psi_j = 0$.

3) La partie espace de la dimension complexe ψ_j est $\text{Re} \psi_j$ et la partie temps est $\text{Im} \psi_j$.

Les inégalités de Holder permettent de définir la matrice de covariance du système $\text{cov}(\psi) = (\text{cov}(\psi_i, \psi_j))$ avec, $\text{cov}(\psi_i, \psi_j) = \int_{\Omega} \overline{\psi_i} \psi_j d\mu$ où $\overline{\psi_i}$ est le conjugué de ψ_i , cette matrice est hermitienne.

Definition 8. Le champ du vide est l'application $\Theta : \Omega \rightarrow \text{Herm}_d(\mathbb{C})$ qui fixe la matrice de covariance de tous les systèmes dimensionnels ψ en ω , c'est-à-dire, $\Theta(\omega) = \text{cov}(\psi)$.

Il y a une interaction forte entre le champ du vide et la dépendance des dimensions. Le champ du vide va lier les dimensions entre elles et mesure leur degré d'indépendance. Avec la matrice de covariance on définit en chaque élément $\omega \in \Omega$, un produit hermitien sur \mathbb{C}^d , définie par

$${}^t z \Theta(\omega) \bar{z} = |z|_{\omega}^2. \quad (6.1)$$

On peut imposer l'invariance de ce produit défini par le champ du vide. Un changement de variable est un élément de $L \in \text{Gl}(\mathbb{C}^d)$ pour lequel $L \circ \psi = \varphi$ et $|\psi|_\omega = |\varphi|_\varpi$ où ψ et φ sont des systèmes dimensionnels en, respectivement, ω et ϖ . Les coordonnées de l'élément $\varpi \in \Omega$ dans le système dimensionnel ψ est donné par $X = (\psi_1(\varpi) - \psi_1(\omega), \psi_2(\varpi) - \psi_2(\omega), \dots, \psi_d(\varpi) - \psi_d(\omega))$ et la norme de ϖ dans ce système est $|\varpi|_\omega = {}^t X \Theta(\omega) \bar{X}$. La formule de changement de variable s'écrit dans les deux référentiels $(\omega : \psi)$ et $(\varpi : \varphi)$

$$1) L(z - \psi(\omega)) = Z - \varphi(\varpi), L \in \text{Gl}(\mathbb{C}^d).$$

$$2) |z - \psi(\omega)|_\omega = |Z - \varphi(\varpi)|_\varpi.$$

Toutes les matrices de covariance sont de la forme $\text{cov}(\psi) = UDU^{-1} = UD\bar{U}$, où $U \in \mathbf{U}_d(\mathbb{C})$ et $D \in \mathbf{D}_d(\mathbb{R})$. On rappelle que $U \in \mathbf{U}_d(\mathbb{C})$ si et seulement si $U\bar{U} = I_d = \bar{U}U$ et D est une matrice diagonale réelle, de diagonale (d_1, d_2, \dots, d_d) de signature (p, q) , où p est le nombre de termes $d_i > 0$, q est le nombre de termes $d_i < 0$ et $d - (p + q)$ est le nombre de termes $d_i = 0$. Si on suppose qu'en chaque événement $\omega \in \Omega$ que $p + q = d$, $|z - \psi(\omega)|_\omega$ est une pseudo-norme dans \mathbb{C}^d . Dorénavant, $p + q = d$.

Si on pose $\text{Herm}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^*} \text{Herm}_d(\mathbb{C})$, on généralise le champ du vide comme une application $\Theta : \Omega \rightarrow \text{Herm}(\mathbb{C})$. En chaque $\omega \in \Omega$, $\Theta_\omega = UDU^{-1} = UD\bar{U}$, où $U \in \mathbf{U}_d(\mathbb{C})$ et $D \in \mathbf{D}_d(\mathbb{R})$. La signature de ω , notée $\text{Sign}(\omega)$, est (p, q, d) , avec si D est la matrice diagonale réelle de diagonale $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$, p est le nombre de termes $d_i > 0$ et q est le nombre de termes $d_i < 0$. Rappelons que la seule condition imposée au système dimensionnel est que $\psi \in L^2(\Omega, d\mu)$, ou plus précisément, chaque $\psi_i \in L^2(\Omega, d\mu)$. Aucune condition de différentiabilité n'est imposée, on n'a fait aucune hypothèse sur la structure différentiable de l'univers Ω . Cela nous permet de décrire l'univers en sous parties. Il y a les sous-univers $\Omega^d = \{\omega \in \Omega : \Theta_\omega \in \text{Herm}_d(\mathbb{C})\}$, on dit que cet univers est de dimension d . Chaque sous-univers se partitionne en $\Omega_{p,q}^d = \{\omega \in \Omega : \text{Sign}(\omega) = (p, q, d)\}$. Sur ces sous-univers on peut faire intervenir des changements de coordonnées entre les repères dimensionnels. L'univers de la relativité est $\Omega_{3,1}^4$.

Un déplacement dans l'espace-temps Ω^d au voisinage de ω est une section locale du fibré trivial s de $\Omega \times \mathbb{C}^d$ telle que si $s = \text{Re } s + i \text{Im } s \in \mathbb{R}^d + i\mathbb{R}^d$, il existe $\alpha : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $\alpha(\text{Im } s) = \text{Re } s$. La vitesse en ϖ est la différentielle de α en $\text{Im } s(\varpi)$. On note,

$$D_\varpi s = D_{\text{Im } s(\varpi)} \alpha. \quad (6.2)$$

La quantité de mouvement est l'image d'un vecteur de masses

$$m_d = (m^1, m^2, \dots, m^d) \in \mathbb{R}^d,$$

par la vitesse généralisée $D_\varpi s, P = D_\varpi s(m)$.

En chaque élément ω de Ω , on associe un champ massique, c'est à dire, une application $m = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^*} m_d : \Omega \rightarrow \bigoplus_{d \in \mathbb{N}^*} \mathbb{R}^d$, où $m_d : \Omega_d \rightarrow \mathbb{R}^d$,

$m_d(\omega) = (m^1(\omega), m^2(\omega), \dots, m^d(\omega))$. Le vecteur masse peut avoir des composantes négatives ou nulles, la norme m de ce vecteur est la masse.

On peut donner une généralisation aux champs dimensionnels complexes. Ω est une variété et $T_{\mathbb{C}}\Omega$ est le complexifié du fibré tangent. Un système dimensionnel en ω est la donnée d'une section du fibré $(T_{\mathbb{C}}\Omega)^d$. Si $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_d)$ alors tout champ complexe s'écrit $\Phi = z^j \Psi_j$. Un déplacement dans l'espace-temps est une section $\Phi = z^j \Psi_j$ de $T_{\mathbb{C}}\Omega$ pour laquelle il existe une C^∞ -application α d'un

ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$ à valeurs dans \mathbb{R}^d vérifiant $\alpha(\text{Im } z) = \text{Re } z$. La matrice vitesse en ϖ est $D_\varpi \Phi = T_{\text{Im } z(\varpi)} \alpha$ avec $z = (z^1, z^2, \dots, z^d)$, $\text{Im } z = (\text{Im } z^1, \text{Im } z^2, \dots, \text{Im } z^d)$ et $\text{Re } z = (\text{Re } z^1, \text{Re } z^2, \dots, \text{Re } z^d)$.

Si $T_{\mathbb{C}}\Omega$ est muni d'un produit hermitien $\langle \bullet | \bullet \rangle$, c'est-à-dire, d'une section du fibré des formes hermitiennes, alors on peut définir le champ du vide comme une application $\Theta : \Omega \rightarrow \text{Herm}_d(\mathbb{C})$, $\omega \rightarrow \Theta(\omega)$, les champs dimensionnels admissibles doivent vérifier $\text{cov}(\Psi) = (\text{cov}(\Psi_\mu, \Psi_\nu))$ où $\text{cov}(\Psi_\mu, \Psi_\nu) = \int_\Omega \langle \Psi_\mu | \Psi_\nu \rangle d\lambda$, λ est une mesure Lebesguienne définie par la structure de variété lisse de Ω . On impose que pour chaque μ , $\int_\Omega \langle \Psi_\mu | \Psi_\mu \rangle d\lambda < +\infty$. On peut ainsi généraliser toutes les notions précédentes. Il faut se rappeler quand théorie quantique des champs, on peut représenter une particule par un couple de champ de l'univers, c'est-à-dire, comme une section du complexifié du fibré tangent de l'univers Ω . Le déplacement dans l'espace-temps, au sens précédent, n'est autre que la section locale définissant le "couplage" entre les deux champs décrivant la particule.

7. PARTICULES ET CHAMPS COMPLEXES

Dans ce qui suit, une particule est une section locale du complexifié du fibré tangent de l'univers Ω . Ce fibré est muni d'une connexion ∇ et d'une section de Dirac γ . La section de Dirac γ vérifie localement, l'équation relativiste quantique

$$\text{Ric}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R\gamma^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta} + \Lambda_0\gamma^{\alpha\beta}, \quad (7.1)$$

$\gamma^{\alpha\beta}$ est le tenseur de Poisson, $T^{\alpha\beta}$ est le tenseur d'énergie-impulsion, $\text{Ric}^{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de la connexion ∇ contracté deux fois par le tenseur de Poisson et R est la courbure scalaire définie dans [6]. L'opérateur d'évolution Φ associé est une section hermitienne du fibré $\Lambda_{\mathbb{C}}^1\Omega \otimes T_{\mathbb{C}}\Omega$. Les fonctions propres de cet opérateur sont $-i\frac{mc}{\hbar}$ où m représente les fonctions de densité de masse des particules. Une particule de l'univers est décrite par une section Ψ du complexifié du fibré tangent et vérifie l'équation d'évolution

$$\Phi(\Psi) = -i\frac{mc}{\hbar}\Psi, \quad \Phi = \gamma \circ \nabla. \quad (7.2)$$

L'ensemble des champs vérifiant l'équation 7.2 est noté $\Gamma_\Phi(\Omega)$. Soit ν une section locale de $\Lambda^1\Omega \otimes T\Omega$, une particule Ψ est une ν -particule si $\Psi = \text{Re } \Psi + i \text{Im } \Psi$ avec $\nu(\text{Re } \Psi) = \text{Im } \Psi$. Si localement, il existe une métrique de Lorentz g , le "couplage" de Ψ est $g(X, Y)$. Si ∇ et γ sont définis sur le fibré tangent alors Φ est une section de $\Lambda^1\Omega \otimes T\Omega$ qui est canoniquement étendue en une section de $\Lambda_{\mathbb{C}}^1\Omega \otimes T_{\mathbb{C}}\Omega$. On en déduit que si $\Psi \in \Gamma_\Phi(\Omega)$ alors

$$\left(\Phi^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \text{Id} \right) \text{Re } \Psi = o \text{ et } \left(\Phi^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \text{Id} \right) \text{Im } \Psi = o, \quad (7.3)$$

où Id est la section identique de $\Lambda^1\Omega \otimes T\Omega$ et o la section nulle. Ces équations sont du type Gordon-Klein où le d'alembertien \square est remplacé par $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$ et si ν est une section locale du fibré $\text{GL}(T\Omega)$ alors toute ν -particule, définie par $\Psi = \text{Re } \Psi + i \text{Im } \Psi$, a pour équations de déplacement

$$\left(\Phi - \frac{mc}{\hbar}\nu \right) \text{Re } \Psi = o \text{ et } \left(\Phi + \frac{mc}{\hbar}\nu^{-1} \right) \text{Im } \Psi = o. \quad (7.4)$$

L'univers est une variété C^∞ de dimension $n \geq 4$ qui est connexe (on étudie uniquement ce qui nous est accessible!). Sur le fibré tangent vit une connexion

fondamentale ∇ et une section de Dirac γ permettant de définir un opérateur d'évolution Φ sur le complexifié de $T\Omega$ en posant

$$\Phi(X + iY) = \gamma \circ \nabla(X) + i\gamma \circ \nabla(Y).$$

On fait l'hypothèse que $i\Phi$ est une section hermitienne de $\Lambda_{\mathbb{C}}^1\Omega \otimes T_{\mathbb{C}}\Omega$ et que γ est solution de l'équation relativiste quantique 7.1. Localement, le tenseur de Poisson $\gamma^{\alpha\beta}$ s'identifie à $g^{\alpha\beta}$ avec $(g_{\alpha\beta})$ est la matrice d'une métrique de Lorentz pour laquelle il existe un champ chronologique T . Ce champ chronologique T permet de décrire, localement, l'évolution de tous les systèmes physiques [6]. Ces équations sont insuffisantes pour la description géométrique globale de l'univers. Il est nécessaire de faire intervenir les états de l'univers. Tout état, compatible avec les structures locales décrites précédemment, doit compléter la compréhension de la description géométrique de Ω .

8. CONCLUSION

La notion d'espace-temps est une notion qui dépend du choix d'un champ chronologique T , pas nécessairement défini sur l'ensemble de l'univers. Dans $\Omega \setminus \text{dom } T$, on ne peut plus feuilleter l'univers en espace-temps. Pour pouvoir analyser l'univers dans la région qui n'a pas d'orientation du temps, on fait intervenir le modèle des états de l'univers en partant du principe fondamental que si un état est définissable et mesurable dans une région de l'univers, cette notion se généralise à l'ensemble de l'univers. Cette représentation permet de donner une structure géométrique globale de l'univers et permet de décrire un événement en respectant le principe d'incertitude lorsqu'il existe $n = \dim \Omega$ états transversaux deux à deux. La difficulté d'une telle représentation est de déterminer tous les états possibles de l'univers Ω . Une telle représentation peut être utilisée dans la mesure du désordre via l'entropie.

Une autre approche pour l'étude de l'univers est de comparer deux événements joints par un chemin lisse ayant la propriété d'extension analytique. On peut ajuster les cartes de chaque événement ce qui permet de comparer les mesures. L'hypothèse d'extension analytique n'est pas généralisable à Ω , on pourra comparer les mesures sur certaines portions de l'univers mais pas sur l'ensemble de l'univers. On peut augmenter le champ d'étude de l'univers par ce procédé, en prenant des chemins ayant la propriété d'extension analytique par morceaux.

Le modèle des systèmes dimensionnels en un événement ω a été développé à partir d'une idée de Guy Cherbit qui propose l'existence d'un champ du vide qui "maintient" les dimensions entre elles. C'est un champ qui se propage entre les dimensions et qui permet une interaction entre elles. Prolongeant cette idée, on peut généraliser la notion de dimensions complexes en regardant x , y et z comme des parties réelles de dimensions complexes et t comme la partie imaginaire d'une dimension complexe. Avec cette présentation le champ du vide peut être défini par une application de l'univers à valeurs dans les matrices hermitiennes. L'univers doit être un espace mesuré, de mesure $d\lambda$ et les dimensions ψ sont des éléments de $L^2(\Omega, d\lambda)$. Ces notions peuvent être élargies aux champs dimensionnels si Ω est une C^∞ -variété munie d'une mesure de Lebesgue $d\lambda$. Dans cette représentation, le déplacement peut être décrit comme une section locale du fibré tangent dont la partie réelle de cette section est fonction de la partie imaginaire et dont la vitesse dans un "local frame" est représentée par la différentielle de cette fonction. La notion de vitesse s'élargit à celle de relation entre la partie réelle et imaginaire des

sections. Cette physique des relations permet de garder le caractère symétrique des mesures.

REFERENCES

- [1] Audin M., Damian M., Théorie de Morse et homologie de Floer, CNRS Editions, 2010
 - [2] Ehresmann C., Sur les variétés plongées dans une variété différentiable, C. R. Acad. Sci. Paris 226 (1948), 1879-1880.
 - [3] Godbillon C., Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique Hermann Paris 1985
 - [4] Gromov M. L. , Stable mappings of foliations into manifolds, Izv. Akad. Nauk SSSR 33 (1969), 707-734.
 - [5] Haefliger A., Feuilletages sur les variétés ouvertes, Topology 9 (1970), 183-194.
 - [6] Jonot J.L., hal.archives-ouvertes.fr/docs/01/00/38/41/PDF/Quantique.pdf
 - [7] Milnor J., Morse Theory Annals of Mathematics Studies Princeton University Press.
 - [8] Reeb G. , Variétés feuilletées, feuilles voisines, C. R. Acad. Sci. Paris 224 (1947), 1613-1614.
 - [9] Reeb G., Stabilité des feuilles compactes à groupe de Poincaré fini, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 47-48.
 - [10] Thurston W., The geometry and topology of three-manifolds, Princeton lecture notes (1978–1981).
 - [11] Wigner E. P., Gruppentheorie (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, Germany, 1931), pp. 251-254; Group Theory (Academic Press Inc., New York, 1959), pp. 233-236
- E-mail address:* jean-louis.jonot@ac-versailles.fr