



**HAL**  
open science

## Estimation d'état de systèmes incertains. Application à la détection de défauts de capteurs

Didier Maquin, Olivier Adrot, José Ragot

► **To cite this version:**

Didier Maquin, Olivier Adrot, José Ragot. Estimation d'état de systèmes incertains. Application à la détection de défauts de capteurs. Troisième Conférence Internationale sur l'Automatisation Industrielle, Jun 1999, Montréal, Canada. hal-01063378

**HAL Id: hal-01063378**

**<https://hal.science/hal-01063378v1>**

Submitted on 7 Jan 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ESTIMATION D'ÉTAT DE SYSTÈMES INCERTAINS APPLICATION À LA DÉTECTION DE DÉFAUTS DE CAPTEURS

**Didier Maquin, Olivier Adrot, José Ragot**

Centre de Recherche en Automatique de Nancy - CNRS UPRES-A 7039

Ecole Nationale Supérieure de Géologie

2, Avenue de la forêt de Haye

54516 Vandoeuvre Cedex - France

Email: {dmaquin, oadrot, jragot}@ensem.u-nancy.fr

## Résumé

*On propose une nouvelle méthode de réconciliation de données de systèmes statiques linéaires capable de prendre en compte les incertitudes du modèle utilisé. L'originalité de la méthode consiste à utiliser des fonctions de pénalité pour résoudre le problème d'optimisation quadratique associé et de pondérer chaque contrainte en fonction de son incertitude. Les résultats ainsi obtenus peuvent être exploités pour la détection de défauts de capteurs.*

## Abstract

*A new technique of data reconciliation for linear static systems which is able to exploit the knowledge about the uncertainties of the used model is proposed. The originality of the proposed technique is to use penalty functions for solving this problem and to weight each constraint with regard to their uncertainties. The obtained results can be used for sensor fault detection.*

## 1. Introduction

L'efficacité des techniques de réconciliation de données par estimation d'état pour fournir des estimations précises et cohérentes des "données procédé" n'est plus à démontrer. Cependant, dans la plupart des cas, les techniques proposées reposent sur la connaissance d'un modèle, supposé exact, du processus considéré. En réalité, cette hypothèse est souvent abusive et l'on ne dispose, en général, que d'un modèle incertain [1], [2]. Dans cette communication, on s'intéresse à l'estimation d'état de systèmes pouvant être décrits par un modèle statique linéaire par rapport aux variables et par rapport à ses paramètres de la forme suivante :

$$M(\theta)X^* = 0 \quad (1a)$$

où  $M(\theta)$ , de dimension  $n.v$ , est une matrice dépendant d'un vecteur paramètre  $\theta$ . On suppose connus l'espérance  $\theta_0$  et la matrice de variance diagonale  $W$  de ce vecteur paramètre. Les mesures  $X$  des variables  $X^*$  sont entachées d'erreurs supposées gaussiennes d'espérance nulle et de matrice de variance diagonale  $V$ . L'équation de mesure s'écrit donc :

$$X = X^* + \varepsilon \quad (1b)$$

L'équation (1b) implique que toutes les variables du système sont mesurées. Si cela n'est pas le cas, une analyse d'observabilité permet d'extraire le sous-système redondant sur lequel le traitement proposé peut être appliqué [3], [4]. Une

estimation  $\hat{X}$  de l'état du système peut être obtenue en minimisant le critère quadratique (2a) sous les contraintes (2b) :

$$\phi = \frac{1}{2} \left\| \hat{X} - X \right\|_{V^{-1}}^2 \quad (2a)$$

$$M(\theta)\hat{X} = 0 \quad (2b)$$

L'objectif de cette communication est de proposer une méthode de résolution du problème (2).

## 2. Solution optimale

Considérons tout d'abord le problème (2) avec  $\theta$  constant. Dans ce cas, on notera  $M$  la matrice  $M(\theta)$ . La solution du problème d'optimisation quadratique sous contraintes égalité s'obtient alors aisément en utilisant la technique des multiplicateurs de Lagrange [5] :

$$\hat{X} = P_r X \quad (3a)$$

où  $P_r$  est une matrice de projection définie par :

$$P_r = I - VM^T(MVM^T)^{-1}M \quad (3b)$$

On montre que l'estimateur est non biaisé,  $\text{Esp}(\hat{X}) = X^*$ , et que la variance de l'estimation est donnée par :

$$\text{Var}(\hat{X}) = \hat{V}_x = P_r V \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) définissent la solution optimale. L'amélioration de la qualité des mesures peut être évaluée en comparant les termes diagonaux des matrices  $V$  et  $\hat{V}_x$ .

## 3. Solution sous-optimale

Une technique classique de résolution des problèmes d'optimisation quadratique sous contraintes égalité consiste à utiliser des fonctions de pénalité. Cette méthode conduit à une solution sous-optimale. Considérons de nouveau le problème (2). Le critère précédent est modifié ainsi :

$$\phi_m = \frac{1}{2} \left( \left\| X - \hat{X} \right\|_{V^{-1}}^2 + \left\| M\hat{X} \right\|_{K^2}^2 \right) \quad (5)$$

où  $K$  est une matrice diagonale de pondération des contraintes. Le problème à résoudre se réduit à un problème d'optimisation quadratique sans contraintes. Intuitivement, on pressent que les contraintes ne seront satisfaites que lorsque que les éléments de  $K$  tendront vers l'infini, résultat que l'on peut aisément démontrer. La solution qui minimise le critère (5) est :

$$\hat{X} = \left( V^{-1} + M^T K^2 M \right)^{-1} V^{-1} X \quad (6)$$

En utilisant le lemme d'inversion matricielle, cette expression s'écrit aussi sous la forme :

$$\hat{X} = P X \quad (7a)$$

$$P = I - V M^T \left( K^{-2} + M V M^T \right)^{-1} M \quad (7b)$$

Ainsi, lorsque les coefficients de pondération tendent vers l'infini, la solution obtenue est identique à celle donnée par (3). Pour toutes les autres valeurs de  $K$ , l'estimation donnée par (7) ne satisfait pas rigoureusement les contraintes. Le résidu "a posteriori", qui est une fonction décroissante des poids est donné par :

$$R = M \hat{X} = M \left( V^{-1} + M^T K^2 M \right)^{-1} V^{-1} X \quad (8)$$

Comme précédemment, on montre que l'estimateur est non biaisé et que sa matrice de variance-covariance est donnée par :

$$\text{Var}(\hat{X}) = P V P^T = \left( I + V M^T K^2 M \right)^{-2} V \quad (9)$$

On constate donc que la réduction de variance de l'estimation dépend des facteurs de pondération choisis.

#### 4. Formulation récurrente de la solution

La solution précédente peut être obtenue en prenant en compte progressivement chaque contrainte. Afin d'expliquer cette procédure, considérons la partition suivante de la matrice de contrainte :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

où  $m_n$  représente la dernière contrainte ( $m_n$  est un vecteur de dimension  $v$ ). Le critère d'optimisation se décompose alors de la manière suivante :

$$\phi_m = \frac{1}{2} \left( \|X - \hat{X}\|_{V^{-1}}^2 + \|M_{n-1} \hat{X}\|_{K_{n-1}^2}^2 + k_n^2 \|m_n \hat{X}\|^2 \right) \quad (14)$$

où  $K_{n-1}^2$  est la matrice de pondération relative aux contraintes  $M_{n-1}$  et  $k_n^2$  le poids associé à la contrainte  $m_n$ .

La solution de ce problème est donnée par :

$$\hat{X} = \left( V^{-1} + M_{n-1}^T K_{n-1}^2 M_{n-1} + k_n^2 m_n^T m_n \right)^{-1} V^{-1} X \quad (11)$$

L'utilisation du lemme d'inversion matricielle permet d'écrire également :

$$\hat{X} = \left( Y_{n-1} - Y_{n-1} m_n^T \left( k_n^{-2} + m_n Y_{n-1} m_n^T \right)^{-1} m_n Y_{n-1} \right) V^{-1} X$$

$$Y_{n-1} = \left( V^{-1} + M_{n-1}^T K_{n-1}^2 M_{n-1} \right)^{-1} \quad (12)$$

Ainsi, l'estimation "globale"  $\hat{X}$ , obtenue en prenant en compte les  $n$  contraintes, peut être écrite en fonction de

l'estimation "partielle"  $\hat{X}_{n-1}$  (obtenue en ne prenant en compte que  $n-1$  contraintes) :

$$\hat{X} = \left( I - Y_{n-1} m_n^T \left( k_n^{-2} + m_n Y_{n-1} m_n^T \right)^{-1} m_n \right) \hat{X}_{n-1} \quad (13)$$

Cette procédure peut être généralisée ; en particulier lorsqu'on prend en compte les contraintes les unes après les autres. La matrice de contraintes est alors décomposée en  $n$  vecteurs lignes :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ M \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

On montre alors aisément que l'on peut écrire les récurrences :

$$\hat{X}_{i+1} = \left( I - Y_i m_{i+1}^T \left( k_{i+1}^{-2} + m_{i+1} Y_i m_{i+1}^T \right)^{-1} m_{i+1} \right) \hat{X}_i \quad i = 0, L, n-1 \quad (15a)$$

$$Y_{i+1} = \left( I - Y_i m_{i+1}^T \left( k_{i+1}^{-2} + m_{i+1} Y_i m_{i+1}^T \right)^{-1} m_{i+1} \right) Y_i \quad i = 0, L, n-2 \quad (15b)$$

$$\text{avec : } \hat{X}_0 = X \quad \text{et} \quad Y_0 = V \quad (15c)$$

L'estimation obtenue à l'itération  $n-1$ , lorsque toutes les contraintes ont été prises en compte correspond à la solution recherchée,  $X = \hat{X}_n$ . La matrice de variance-covariance peut également être exprimée de manière récurrente :

$$\hat{V}_{i+1} = P_{i+1} \hat{V}_i P_{i+1}^T \quad (16a)$$

$$P_{i+1} = I - Y_i m_{i+1}^T \left( k_{i+1}^{-2} + m_{i+1} Y_i m_{i+1}^T \right)^{-1} m_{i+1} \quad (16b)$$

$$\hat{V}_0 = V \quad (16c)$$

La technique proposée est très intéressante car, dans les matrices  $P_j$  qui interviennent dans les solutions (équations (15a), (15b) et (16b)), les matrices à inverser sont des scalaires. De plus, l'ajout progressif des contraintes permet de quantifier la contribution de chacune d'entre elles.

#### 5. Choix des facteurs de pondération

En supposant connus la valeur nominale et l'écart-type de chaque paramètre intervenant dans les équations du modèle, on peut améliorer la qualité de l'estimation. En effet, si les équations du modèle sont incertaines, le fait d'imposer  $M(\theta)X = 0$  n'est pas justifié. Définissons donc un vecteur de résidus "a posteriori"  $R$  tel que :

$$\hat{r}_i = m_i(\theta) \hat{X} \quad i = 1, L, n \quad (17)$$

où l'estimation  $\hat{X}$  a été calculée séquentiellement par (20) en utilisant les poids  $k_i$  associés à chaque contrainte. Il est donc clair que les résidus "a posteriori" (17) dépendent de ces poids.

Réciproquement, l'amplitude de chaque résidu  $\hat{r}_i$  peut être indexée sur la "qualité" de chaque contrainte. Introduisons pour cela le facteur de réduction  $\beta_i$  :

$$\hat{r}_i = \beta_i r_i = \beta_i m_i(\theta) X \quad (18)$$

Si la connaissance sur la valeur des paramètres d'une équation du modèle est très précise, cette contrainte peut être considérée comme "exacte" et doit donc être satisfaite. Il est alors naturel d'imposer un résidu "a posteriori" très faible. Cela correspond à choisir un facteur de réduction  $\beta_i$  proche de zéro (voire nul). Au contraire, si cette connaissance est approximative, l'amplitude du résidu peut être plus importante. Cependant, rappelons que la technique proposée essaie d'améliorer la qualité des mesures. Ainsi, dans le cas où la connaissance sur les paramètres est faible, on choisit de conserver, pour la valeur du résidu "a posteriori" celle du résidu "a priori" ; cela correspond au choix  $\beta_i = 1$ . Ce choix est arbitraire et d'autres solutions peuvent être envisagées. On doit maintenant définir une fonction qui "distribue" le facteur de réduction entre ces deux limites (0 et 1) en fonction de la qualité des modèles. Nous proposons ci-après une méthode de calcul.

Considérons les matrices jacobiniennes par rapport aux variables et par rapport aux paramètres, des contraintes  $M(\theta)X^* = 0$  :

$$\frac{\partial(M(\theta)X^*)}{\partial(X^*)^T} = M(\theta) \quad \text{et} \quad G(X^*) = \frac{\partial(M(\theta)X^*)}{\partial\theta^T} \quad (19)$$

Notons  $V_{rx}$  la matrice de variance-covariance des résidus "a priori"  $R = M(\theta)X$  sous l'hypothèse que les paramètres sont parfaitement connus  $\theta = \theta_0 = \text{constante}$  :

$$V_{rx} = M(\theta_0)VM^T(\theta_0) \quad (20)$$

Lorsque les variables et les paramètres sont sujets à des erreurs aléatoires, en effectuant une approximation au premier ordre, cette matrice de variance-covariance devient :

$$V_r = M(\theta_0)VM^T(\theta_0) + G(X^*)WG^T(X^*) \quad (21)$$

où  $W$  est la matrice de variance diagonale des paramètres. Comme la valeur vraie des mesures  $X^*$  n'est pas connue, elle est remplacée, dans l'équation (21), par celle des mesures  $X$ . Pour un résidu particulier  $r_i = m_i(\theta)X$ , les écarts-type correspondant s'écrivent :

$$\sigma_{r_i x} = \left( m_i(\theta_0) V m_i^T(\theta_0) \right)^{1/2} \quad (22)$$

$$\sigma_{r_i} = \left( m_i(\theta_0) V m_i^T(\theta_0) + g_i(X) W g_i^T(X) \right)^{1/2} \quad (23)$$

Le facteur de réduction  $\beta_i$  associé à la  $i$ ème contrainte peut alors être défini. Nous proposons la formule suivante :

$$\beta_i = 1 - \frac{\left( m_i(\theta_0) V m_i^T(\theta_0) \right)^{1/2}}{\left( m_i(\theta_0) V m_i^T(\theta_0) + g_i(X) W g_i^T(X) \right)^{1/2}} \quad (24)$$

Lorsque la variance des paramètres tend vers l'infini (connaissance faible), le facteur de réduction tend vers zéro et lorsque cette variance tend vers zéro (connaissance parfaite), il tend vers un. Dans les autres cas, le ratio proposé donne une image de la "qualité" du sous-modèle  $m_i(\theta)X^* = 0$ .

La question qui peut maintenant être posée est la suivante : les facteurs de réduction étant maintenant fixés, quels coefficients pondérateurs faut-il choisir pour obtenir les résidus "a posteriori" défini par (18) ?

Pour répondre à cette question, considérons de nouveau la partition (14) de la matrice de contrainte. En utilisant l'équation (13), le résidu "a posteriori" associé à la contrainte  $m_n$  s'écrit :

$$m_n \hat{X} = \left( 1 - m_n Y_{n-1} m_n^T \left( k_n^{-2} + m_n Y_{n-1} m_n^T \right)^{-1} \right) m_n \hat{X}_{n-1} \quad (25a)$$

ou, en utilisant le lemme d'inversion matricielle :

$$m_n \hat{X} = \left( 1 + k_n^2 m_n Y_{n-1} m_n^T \right)^{-1} m_n \hat{X}_{n-1} \quad (25b)$$

$$\hat{X}_{n-1} = \left( I - VM_{n-1}^T \left( K_{n-1}^{-2} + M_{n-1} VM_{n-1}^T \right)^{-1} M_{n-1} \right) X \quad (25c)$$

$$Y_{n-1} = \left( I - VM_{n-1}^T \left( K_{n-1}^{-2} + M_{n-1} VM_{n-1}^T \right)^{-1} M_{n-1} \right) V \quad (25d)$$

Ce résidu "a posteriori" peut également s'écrire :

$$m_n \hat{X} = \frac{m_n \hat{X}_{n-1}}{1 + k_n^2 A} \quad (26a)$$

$$A = m_n Y_{n-1} m_n^T \quad (26b)$$

En substituant dans (26a) l'expression (25c), on obtient :

$$m_n \hat{X} = \frac{r_n - D}{1 + k_n^2 A} \quad (27a)$$

où  $r_n$  est le résidu "a priori" de la contrainte  $m_n$  :

$$r_n = m_n X \quad (27b)$$

$$\text{et } D = m_n VM_{n-1}^T \left( K_{n-1}^{-2} + M_{n-1} VM_{n-1}^T \right)^{-1} M_{n-1} X \quad (27c)$$

Le facteur de pondération  $k_n^2$  s'exprime alors à partir de l'équation (27a) :

$$k_n^2 = \frac{r_n - m_n \hat{X} - D}{m_n \hat{X} A} \quad (28a)$$

ou, en fonction du facteur de réduction proposé en (24) :

$$k_n^2 = \frac{(1 - \beta_n) r_n - D}{\beta_n r_n A} \quad (28b)$$

On remarquera que l'expression du facteur de pondération  $k_n^2$  dépend de la valeur de tous les autres facteurs de pondération  $k_i^2$ ,  $i = 1, L, n-1$  (cf. (26b) et (27c)). Un algorithme de détermination des différents facteurs de pondération peut alors être proposé. Il consiste en deux séries d'itérations. Dans la première, chaque facteur de pondération  $k_i^2$  est calculé à partir de la connaissance des  $k_j^2$ ,  $j = 1, L, n$   $j \neq i$ . Lors de la seconde série, la première étape est répétée jusqu'à l'obtention de la convergence des valeurs des coefficients de pondération. L'algorithme est alors constitué des trois étapes suivantes :

## Etape 1 : Initialisation

$$K = \begin{pmatrix} k_0 & 0 \\ & O \\ 0 & k_0 \end{pmatrix} \quad \text{Sans connaissance a priori, les facteurs de pondération peuvent être arbitrairement fixés, par exemple, à une valeur } k_0 \text{ identique pour toutes les contraintes.}$$

## Etape 2 : Calcul des facteurs de pondération

Pour  $i = 1$  à  $n$

### Etape 2a : Partition des matrices

$$M = \begin{pmatrix} M_{(-i)} \\ m_i \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} K_{(-i)} & 0 \\ 0 & k_i \end{pmatrix}$$

où  $M_{(-i)}$  est la matrice des contraintes  $M$  de laquelle on a éliminé la  $i$ ème ligne et  $K_{(-i)}$  la matrice des poids correspondante.

### Etape 2b : Calcul du $i$ ème poids

Matrices auxiliaires

$$r_i = m_i X$$

$$D_i = m_i VM_{(-i)}^T \left( K_{(-i)}^{-2} + M_{(-i)} VM_{(-i)}^T \right)^{-1} M_{(-i)} X$$

$$Y_{(-i)} = \left( I - VM_{(-i)}^T \left( K_{(-i)}^{-2} + M_{(-i)} VM_{(-i)}^T \right)^{-1} M_{(-i)} \right) V$$

$$A_i = m_i Y_{(-i)} m_i^T$$

Facteur de pondération

$$k_i^2 = \frac{(1 - \beta_i) r_i - D_i}{\beta_i r_i A_i}$$

fin pour

## Etape 3 : Analyse de convergence

Si les variations relatives de tous les facteurs de pondération entre deux itérations successives sont plus grandes qu'un seuil donné alors retour à l'étape 2 sinon arrêt de l'algorithme.

## 6. Détection de défauts de capteurs

L'analyse du vecteur des résidus "a priori" permet de tester la cohérence des mesures effectuées. Afin de comparer les éléments du vecteur  $R$ , on définit un vecteur normalisé :

$$R_n(i) = \frac{R(i)}{\sqrt{V_r(i,i)}} \quad (29)$$

En l'absence de propriétés statistiques particulières à cause de l'approximation effectuée lors du calcul de la matrice de variance-covariance  $V_r$ , ces résidus normalisés peuvent cependant être comparés entre eux et le franchissement d'un seuil donné est révélateur de défauts dans les mesures.

On peut également analyser l'amplitude des termes correctifs :

$$E = X - \hat{X} = VM^T (MVM^T)^{-1} MX \quad (30)$$

Notons  $\theta_i$ ,  $i=1, L, p$  les composantes du vecteur  $\theta_0$ . Comme on ne considère que des équations linéaires par rapport aux paramètres, la matrice nominale des contraintes peut s'écrire :

$$M(\theta_0) = M_0 + \sum_{i=1}^p \theta_i M_i \quad (31)$$

Un calcul variationnel élémentaire permet alors d'exprimer la matrice de variance-covariance de l'estimation  $\hat{X}$  dans cette situation :

$$\text{Var}(\hat{X}) = \hat{V} = \sum_{i=1}^p W_{ii} B_i X X^T B_i^T + PVP^T \quad (32)$$

La matrice de variance-covariance des termes correctifs normalisés devient alors égale à  $V_e = V - \hat{V}$  et un vecteur de termes correctifs normalisé peut être défini :

$$E_n(i) = \frac{E(i)}{\sqrt{V_e(i,i)}} \quad (33)$$

Comme dans le cas précédent, la comparaison de chaque terme correctif normalisé à un seuil apporte une aide à la localisation des défauts de capteurs.

## 7. Conclusion

Compte tenu de la longueur extrêmement limitée de cette communication, des exemples ne peuvent être présentés. On peut cependant affirmer que la technique proposée améliore les bénéfices que l'on peut tirer de l'application des techniques de réconciliation de données et que la prise en compte de l'ensemble des informations disponibles permet d'éviter des prises de décisions erronées.

## 8. Références

- [1] A. Abdollahzadeh, Validation de données par équilibrage de bilans, synthèse et nouvelles approches. Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 27 octobre 1997.
- [2] D. Mandel, A. Abdollahzadeh, D. Maquin, J. Ragot, "Data reconciliation by inequality balance equilibration. A LMI approach". International Journal of Mineral Processing, vol. , pp. , 1998.
- [3] C.M. Crowe, Y.A. Garcia Campos, A. Hrymak, "Reconciliation of flow rates by matrix projection. Part I : the linear case". AIChE Journal, vol. 29, n° 6, p. 881-888, 1983.
- [4] J. Ragot, D. Maquin, F. Kratz, "Observability and redundancy decomposition - application to diagnosis". In Advances in Fault Diagnosis for Dynamic Systems, Prentice-Hall, Control Engineering Series, Chapter 13, R.J. Patton, P.M. Frank, R.N. Clark eds., 1998.
- [5] D. Maquin, G. Bloch, J. Ragot, "Data reconciliation for measurements". European Journal of Diagnosis and Safety in Automation, vol. 1, n° 2, pp. 145-181, 1991.