



HAL
open science

Etude probabiliste des p-quotients de Fermat

Georges Gras

► **To cite this version:**

| Georges Gras. Etude probabiliste des p-quotients de Fermat. 2014. hal-01062305v1

HAL Id: hal-01062305

<https://hal.science/hal-01062305v1>

Submitted on 9 Sep 2014 (v1), last revised 4 Nov 2014 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ETUDE PROBABILISTE DES p -QUOTIENTS DE FERMAT

GEORGES GRAS

ABSTRACT. For a fixed integer $a \geq 2$, we suggest that the probability of nullity of the Fermat quotient $q_p(a)$ is much lower than $\frac{1}{p}$ for any arbitrary large prime number p . For this we use various heuristics, justified by means of numerical computations and analytical results, which may imply the finiteness of the $q_p(a)$ equal to 0 and the existence of integers a such that $q_p(a) \neq 0 \forall p$. However no proofs are obtained concerning these heuristics.

1. INTRODUCTION

Nous étudions la probabilité de nullité du p -quotient de Fermat $q_p(a)$, de a fixé dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, p étant la variable, à partir du fait que ceci a lieu si et seulement si p^2 divise la valeur en a du m -ième polynôme cyclotomique Φ_m , où $m \mid p-1$ est l'ordre de a modulo p (par abus $q_p(a) = 0$ signifie $\frac{a^{p-1}-1}{p} \equiv 0 \pmod{p}$).

Dans un premier temps, nous utilisons un résultat général de Andrew Granville (1998) qui, sous la véracité de la conjecture *ABC*, permet, grâce à un principe local-global diophantien, de déterminer (pour $f \in \mathbb{Z}[x]$) la densité des entiers $A \in \mathbb{N}$ tels que $f(A)$ est sans facteur carré. Pour Φ_m , la densité relative à la seule condition locale $p^2 \nmid \Phi_m(A)$, pour $p \equiv 1 \pmod{m}$, est égale à $1 - \frac{\varphi(m)}{p^2}$ où φ est l'indicateur d'Euler, celle relative à la condition $\Phi_m(A)$ sans facteur carré étant égale au produit $\prod_{p \equiv 1 \pmod{m}} (1 - \frac{\varphi(m)}{p^2})$ des densités locales. Notons que pour tout p , la densité des $A \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ tels que $q_p(A) = 0$ est trivialement $\frac{1}{p}$ (resp. $\frac{p-1}{p^2}$ pour celle des $A \in \mathbb{N}$).

On en déduit l'heuristique suivante reposant sur le fait que les probabilités sont inférieures aux densités correspondantes (i.e., lorsque a est remplacé par la variable aléatoire $A \in \mathbb{N}$) : pour a fixé et p arbitraire assez grand, on a la majoration :

$$\text{Prob}(q_p(a) = 0) < \frac{1}{p(p-1)^2} \sum_{d \mid p-1} \varphi(d)^2 < \frac{1}{p},$$

qui ne renseigne que partiellement sur la finitude ou non des $q_p(a)$ nuls.

Dans un second temps, nous montrons comment tenir compte d'avantage du fait qu'en pratique a est fixé une fois pour toutes et que si $q_p(a) = 0$ alors $q_p(a^j) = 0$ pour les exposants j tels que $a^j \in [2, p[$ (p étant la variable aléatoire tendant vers l'infini). On étudie alors une heuristique stipulant l'existence d'une loi de probabilité binomiale, pour le nombre d'entiers $z \in [2, p[$ tels que $q_p(z) = 0$, à savoir

$\text{Prob}(|\{z \in [2, p[, q_p(z) = 0\}| \geq n) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{p-2}{j} \frac{1}{p^j} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{p-2-j}$, qui impliquerait, via le principe de Borel-Cantelli, la finitude des p tels que $q_p(a) = 0$.

Date: 4 Septembre 2014.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 11F85; 11R18.

Key words and phrases. Fermat quotients; cyclotomic polynomials; probabilistic number theory.

Enfin, en utilisant le fait que le produit formel $\tilde{\mathcal{P}}(A) = \prod_{m \geq 1} \frac{\Phi_m(A)}{\text{p.g.c.d.}(\Phi_m(A), m)}$ est divisible par tous les nombres premiers et que $q_p(A) = 0$ si et seulement si $p^2 \mid \tilde{\mathcal{P}}(A)$, on obtient la densité des $A \in \mathbb{N}$ tels que $q_p(A) \neq 0 \forall p \leq x$ (cf. Théorème 4.11).

En toute hypothèse, on peut envisager que la probabilité de nullité de $q_p(a)$ (pour a fixé et $p \rightarrow \infty$) est strictement inférieure à $\frac{1}{p}$ et que la conjecture sur la finitude des premiers p tels que $q_p(a) = 0$ reste crédible (conjecture qui est un cas particulier des conjectures analogues que nous avons formulées dans le cadre général des régulateurs p -adiques d'un nombre algébrique, cf. [3]).

2. CYCLOTOMIE ET QUOTIENTS DE FERMAT

2.1. Rappels sur le quotient de Fermat. Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ fixé. Soit p un nombre premier ne divisant pas a . Soit $m = o_p(a)$, divisant $p - 1$, l'ordre de a modulo p et soit ξ une racine primitive m -ième de l'unité dans \mathbb{C} ; alors on peut écrire $a^m - 1 = \prod_{j=1}^m (a - \xi^j) \equiv 0 \pmod{p}$.

Comme m est l'ordre de a modulo p , c'est le facteur de $a^m - 1$ défini par :

$$\Phi_m(a) = \prod_{t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times} (a - \xi^t)$$

qui est dans $p\mathbb{Z}$, où Φ_m est le m -ième polynôme cyclotomique. De façon précise on a la relation $\frac{a^m - 1}{p} = \frac{\Phi_m(a)}{p} \times \prod_{\substack{d \mid m, \\ d \neq m}} \Phi_d(a)$, où $\prod_{\substack{d \mid m, \\ d \neq m}} \Phi_d(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$; en effet, si

l'on avait $p \mid \Phi_d(a)$ pour $d \mid m, d \neq m$, alors on aurait $p \mid a^d - 1$ et m ne serait pas l'ordre de a modulo p . On a donc l'implication $m = o_p(a) \implies p \mid \Phi_m(a)$.

La réciproque est inexacte ; par exemple, si $p = 3, m = 6, a = 5$, on a $\Phi_m(a) = 7 \times p$ avec pour ordre de a modulo $p, o_p(a) = 2$ et $\Phi_2(a) = 2 \times p$ comme attendu, mais on a ici $m = p \cdot o_p(a)$ (i.e., $\text{p.g.c.d.}(\Phi_m(a), m) = p$). Ce phénomène sera précisé par le Théorème 2.4

Remarque 2.1. Si l'on pose $q_p(a) := \frac{a^{p-1} - 1}{p}, q'_p(a) := \frac{a^{o_p(a)} - 1}{p}$ et $p - 1 = t o_p(a)$, il vient $q_p(a) \equiv t q'_p(a) \equiv \frac{-1}{o_p(a)} q'_p(a) \pmod{p}$; on peut aussi envisager l'expression $q''_p(a) := \frac{\Phi_{o_p(a)}(a)}{p}$. Ces différentes définitions possibles du quotient de Fermat sont équivalentes en ce qui concerne sa nullité modulo p .

En particulier, on a $q_p(a) \equiv 0 \pmod{p}$ si et seulement si $\Phi_{o_p(a)}(a) \equiv 0 \pmod{p^2}$ (pour diverses propriétés des quotients de Fermat on peut se reporter à [1], [5], [6], [7], [12], [9], ainsi qu'à [11], [4], [15] pour les liens avec la conjecture *ABC*).

2.2. Utilisation des corps cyclotomiques. Nous n'utilisons que des propriétés classiques que l'on peut trouver dans [16].

Lemme 2.2. Soient $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, p \nmid a$, et $m \geq 1$. Alors la congruence $\Phi_m(a) \equiv 0 \pmod{p^h}, h \geq 1$, est équivalente à l'existence d'un couple (ξ, \mathfrak{P}) , unique à conjugaison près, tel que $a \equiv \xi \pmod{\mathfrak{P}^h}$, où ξ est une racine primitive m -ième de l'unité et \mathfrak{P} un idéal premier de $\mathbb{Q}(\xi)$ au-dessus de p , de degré résiduel 1.

En outre, lorsque ceci a lieu, m est nécessairement de la forme $p^e \cdot o_p(a), e \geq 0$.

Démonstration. La relation $a \equiv \xi \pmod{\mathfrak{P}^h}, h \geq 1$, prouve que \mathfrak{P} est de degré résiduel 1 car l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\xi)$ est $\mathbb{Z}[\xi]$ et ξ est congrue à un rationnel modulo \mathfrak{P} . Un sens est donc évident puisque $\Phi_m(a) = N_{\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}}(a - \xi)$.

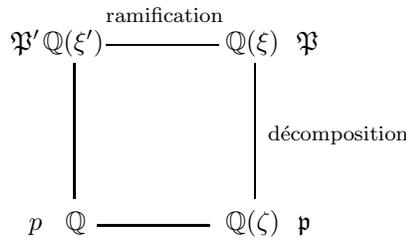
Supposons $\Phi_m(a) \equiv 0 \pmod{p^h}$, $h \geq 1$. Comme $\Phi_m(a) = \prod_{t \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times} (a - \xi^t) \equiv 0 \pmod{p^h}$, il existe $\mathfrak{P}_1 | p$ dans $\mathbb{Q}(\xi)$ tel que $a - \xi \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_1}$.

Supposons que l'on ait $a - \xi \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_2}$, $\mathfrak{P}_2 | p$, avec $\mathfrak{P}_2 \neq \mathfrak{P}_1$; il existe donc une conjugaison non triviale $\xi \mapsto \xi^t \neq \xi$ telle que $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_1^{t-1} \neq \mathfrak{P}_1$ et on obtient $a - \xi^t \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_1}$, ce qui conduit à $\xi^t - \xi \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_1}$. D'où deux cas :

- (i) $p \nmid m$ & $\xi^t \neq \xi$; alors $\xi^t - \xi$ est une unité en p (absurde).
- (ii) $p | m$ & $\xi^t \neq \xi$.

Donc si $p \nmid m$, un seul idéal premier $\mathfrak{P} | p$ intervient et on a $a - \xi \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^h}$.

Examinons le cas $p | m$ & $\xi^t \neq \xi$ en considérant le schéma suivant :



Si l'on pose $m = p^e m'$, $e \geq 1$, $p \nmid m'$, et $\xi = \zeta \xi'$ (ζ d'ordre p^e , ξ' d'ordre m'), il vient $\zeta^t \xi'^t - \zeta \xi' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_1}$. Or on a toujours $\zeta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}_1}$ car dans $\mathbb{Q}(\zeta)$ il y a un unique idéal premier $\mathfrak{p} = (1 - \zeta)$ totalement ramifié dans $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$, donc tel que $\mathfrak{P}_1 | \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{P}_2 | \mathfrak{p}$ (si $p^e = 2$, $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}$ et $\mathfrak{p} = (2)$).

D'où $\xi'^t - \xi' \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_1' = \mathfrak{P}_1 \cap \mathbb{Z}[\xi']}$ dans $\mathbb{Q}(\xi')$, et par conséquent $\xi'^t = \xi'$ (i.e., $t \equiv 1 \pmod{m'}$) puisque $p \nmid m'$. Mais ceci implique $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_1$ car $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}(\xi')$ est totalement ramifiée en p et t fixe $\mathbb{Q}(\xi')$ (absurde).

On a donc obtenu dans tous les cas $a - \xi \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^h}$ pour un unique $\mathfrak{P} | p$.

Montrons enfin que $m' = o_p(a)$ dans tous les cas. On a à ce stade $m = p^e m'$, $e \geq 0$, et $a \equiv \xi' \pmod{\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathbb{Z}[\xi']}$ puisque $\zeta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}}$ (y compris si $e = 0$ où $\zeta = 1$), ce qui implique $a^d \equiv 1 \pmod{p}$ (i.e., $\xi'^d \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}'}$) si et seulement si $\xi'^d = 1$, d'où $d \equiv 0 \pmod{m'}$; d'où le lemme. \square

Revenons à l'aspect réciproque de l'implication $m = o_p(a) \implies p | \Phi_m(a)$ en tenant compte des questions de divisibilités par p^h . D'après le lemme précédent, si $p | \Phi_m(a)$, on a $m = p^e m'$, $e \geq 0$, où $m' = o_p(a)$, et par conséquent $p | \Phi_{m'}(a)$.

Le cas $p \nmid m$ est donc résolu et conduit à l'équivalence partielle :

$$p | \Phi_m(a) \text{ \& } p \nmid m \iff m = o_p(a).$$

Dans ce cas toute puissance p^h , $h \geq 1$, peut diviser $\Phi_m(a)$ (c'est le problème du quotient de Fermat pour $h \geq 2$).

Lemme 2.3. *Supposons que pour $h \geq 1$, $p^h | \Phi_m(a)$ avec $m = p^e m'$, $e \geq 1$, $p \nmid m'$. Alors nécessairement $h = 1$ (i.e., $\Phi_m(a) \not\equiv 0 \pmod{p^2}$) sauf si $p^e = m = 2$, auquel cas si $a = -1 + 2^h u$, $h \geq 1$ quelconque, on a $\Phi_2(a) = 2^h u$, $\Phi_1(a) = -2 + 2^h u$.*

Démonstration. On a donc par hypothèse, d'après le Lemme 2.2, $a \equiv \xi \pmod{\mathfrak{P}^h}$, pour $\xi = \zeta \xi'$ d'ordre $p^e m'$ (ζ d'ordre p^e , ξ' d'ordre m'), et $a \equiv \xi' \pmod{\mathfrak{P}'^{h'}}$, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap \mathbb{Z}[\xi']$, avec $h' \geq 1$ puisque $\zeta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}}$; on a l'identité :

$$a - \xi = a - \xi' + \xi'(1 - \zeta),$$

où les \mathfrak{P} -valuations des termes sont respectivement h , $h'p^{e-1}(p-1)$, 1.

Si $h'p^{e-1}(p-1) > 1$ on a nécessairement $h = 1$. Le cas $h'p^{e-1}(p-1) = 1$ correspond au cas $p = 2$, $h' = e = 1$, donc $o_2(a) = 1$, $\xi' = 1$, $\xi = -1$, $\Phi_2(a) = a + 1$ et $\text{p.g.c.d.}(2, \Phi_2(a)) = 2$ (e.g. $p = 2$, $a = 23$, $m = 2$, $\Phi_2(a) = 8 \times 3$, $\Phi_1(a) = 2 \times 11$, $h' = 1$, $h = 3$). En dehors du cas $m = 2$, $p = 2$, $e = 1$, on a $h = 1$. \square

En particulier, pour $m = p^e m' \neq 2$, $e \geq 1$, on a $p \mid \Phi_m(a)$ et $p^2 \nmid \Phi_m(a)$ (on rappelle que $m' = o_p(a)$). Autrement dit, dans tous les cas où $e \geq 1$, la valeur de $\Phi_m(a)$ ne peut renseigner sur le quotient de Fermat (dans le cas particulier $p = 2$, $m = 2$, $\Phi_2(a) = a + 1$, mais $q_2(a) = 0$ signifie $a \equiv 1 \pmod{4}$, or $a + 1 \equiv 2 \pmod{4}$).

Théorème 2.4. *Pour tout $m \geq 1$, le p.g.c.d. de $\Phi_m(a)$ et de m est égal à 1 ou à un nombre premier p . Dans ce dernier cas, $m = p^e \cdot o_p(a)$, $e \geq 1$. Réciproquement, pour tout premier p et tout $e \geq 1$, $m = p^e \cdot o_p(a)$ conduit à $\text{p.g.c.d.}(\Phi_m(a), m) = p$. Autrement dit, on a l'équivalence (pour tout p et tout m) :*

$$p \mid \Phi_m(a) \iff m = p^e \cdot o_p(a), \quad e \geq 0,$$

Démonstration. Si p et q , $p \neq q$, sont des nombres premiers divisant m et $\Phi_m(a)$, on a nécessairement $m = p^e q^f m''$, $e, f \geq 1$, avec $o_p(a) = q^f m'' \mid p - 1$ et $o_q(a) = p^e m'' \mid q - 1$, qui suppose $q < p$ et $p < q$ (absurde).

Enfin montrons que tout p premier et $e \geq 1$ conviennent pour $m = p^e \cdot o_p(a)$. Comme $p \mid \Phi_{o_p(a)}(a)$, on a $a \equiv \xi' \pmod{\mathfrak{P}'}$ dans $\mathbb{Q}(\xi')$ (ξ' d'ordre $o_p(a)$) ; donc pour toute racine ζ d'ordre p^e , et pour $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{P}'$ dans $\mathbb{Q}(\zeta\xi')$, on a $a \equiv \zeta\xi' \pmod{\mathfrak{P}}$ (d'où le résultat par le Lemme 2.2). Il est clair que $\text{p.g.c.d.}(m, \Phi_m(a)) = p$. \square

Nous réserverons la notation r au cas où $m = r^e \cdot o_r(a)$, $e \geq 1$, car r n'intervient pas pour le calcul des p -quotients de Fermat de a pour $p \mid \Phi_m(a)$. Autrement dit la considération de p signifiera $p \mid \Phi_m(a)$, $p \nmid m$ (équivalent à $p \neq r$ si m est de la forme précédente avec $e \geq 1$).

2.3. Définition des nombres $\tilde{\Phi}_m(a)$, $m \geq 1$. On peut donc considérer dans tous les cas $\tilde{\Phi}_m(a) := \frac{\Phi_m(a)}{\text{p.g.c.d.}(\Phi_m(a), m)}$ qui est égal à $\Phi_m(a)$ ou à $\frac{\Phi_{r^e \cdot o_r(a)}(a)}{r}$, $e \geq 1$, pour éliminer le facteur premier r éventuel (ramifié dans $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$). Dans le second cas $m = r^e \cdot o_r(a)$, $e \geq 1$, si $p \neq r$ divise $\Phi_m(a)$, alors $m = o_p(a)$ et on a $p \equiv 1 \pmod{r^e \cdot o_r(a)}$.

Dans le cas où $\text{p.g.c.d.}(\Phi_m(a), m) = r$, la nullité du r -quotient de Fermat de a est donnée via $\frac{\Phi_{o_r(a)}(a)}{r}$ en général distinct des $\frac{\Phi_{r^e \cdot o_r(a)}(a)}{r}$ pour $e \geq 1$ puisque dans ce cas, et pour $r^e \cdot o_r(a) \neq 2$, $\Phi_{r^e \cdot o_r(a)}(a) \not\equiv 0 \pmod{r^2}$ (cf. Lemme 2.3).

Par exemple, pour $r = 29$ et $a = 14$ on a $o_{29}(a) = 28$, $\frac{\Phi_{29 \cdot 28}(a)}{29} = F \not\equiv 0 \pmod{29}$ mais $\frac{\Phi_{28}(a)}{29} = 29 \times F'$ (i.e., $q_{29}(14) = 0$).

Pour $m = 2$ et a impair, on a $r = 2$ et $\tilde{\Phi}_2(a) = \frac{a+1}{2}$ qui peut être divisible par une puissance de 2 arbitraire contrairement au cas général (cf. Lemme 2.3).

2.4. Décomposition en facteurs premiers de $\tilde{\Phi}_m(a)$. Soit $m \neq 2$; d'après les résultats précédents, si l'on pose $\tilde{\Phi}_m(a) = \prod_{k=1}^g \ell_k^{n_k}$, $\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_g$, $n_k \geq 1$, tous les premiers ℓ_k sont congrus à 1 modulo m (car de degré 1 et non ramifiés dans

$\mathbb{Q}(\mu_m)/\mathbb{Q}$). Il en résulte aussi que pour un tel $\ell = \ell_j$ (en posant $\ell - 1 = tm$), ℓ est totalement décomposé dans l'extension Galoisienne $\mathbb{Q}(\mu_{\ell-1})(\sqrt[t]{a})/\mathbb{Q}$ puisque a est localement de la forme b^t modulo ℓ (ℓ ne divise pas a et n'est pas ramifié dans cette extension). Ces questions d'ordres modulo ℓ sont liées à des techniques issues de la conjecture d'Artin sur les racines primitives et de la démonstration de Hooley, susceptibles de s'appliquer aux quotients de Fermat (voir [8] pour un exposé exhaustif).

Lemme 2.5. *On suppose (m, p) distinct de $(2, 2)$. On a $p^2 \mid \tilde{\Phi}_m(a)$ si et seulement si $m = o_p(a)$ & $p^2 \mid \Phi_m(a)$, donc si et seulement si $m = o_p(a)$ & $q_p(a) = 0$.*

Démonstration. En effet, si $p^2 \mid \Phi_{o_p(a)}(a)$, comme $p \mid \Phi_{o_p(a)}(a)$ et $p \nmid o_p(a)$, on a $\tilde{\Phi}_{o_p(a)}(a) = \Phi_{o_p(a)}(a)$ et donc $p^2 \mid \tilde{\Phi}_m(a)$.

Réciproquement, si $p^2 \mid \tilde{\Phi}_m(a)$, on peut supposer que p.g.c.d. $(\Phi_m(a), m) = r$ avec $m = r^e o_r(a)$, $e \geq 1$, sinon p.g.c.d. $(\Phi_m(a), m) = 1$, $\tilde{\Phi}_m(a) = \Phi_m(a)$ et nécessairement $m = o_p(a)$. Ainsi $\tilde{\Phi}_m(a) = \frac{\Phi_m(a)}{r}$, donc $p \nmid m$ (i.e., $p \neq r$ car $r^2 \nmid \Phi_m(a)$ par le Lemme 2.3 qui exclue le cas $p^e = m = 2$), d'où $p^2 \mid \Phi_m(a) = \Phi_{o_p(a)}(a)$. \square

Lemme 2.6. *Pour a fixé, les $\tilde{\Phi}_m(a)$, $m \geq 1$, sont premiers entre eux deux à deux. Pour tout $p \geq 2$ il existe un et un seul $m \geq 1$ (égal à $o_p(a)$), tel que $p \mid \tilde{\Phi}_m(a)$.*

Démonstration. Si $p \neq 2$ divise $\tilde{\Phi}_m(a)$ et $\tilde{\Phi}_{m'}(a)$, d'après le Théorème 2.4 on a $m = p^e o_p(a)$ et $m' = p^{e'} o_p(a)$, $e, e' \geq 0$. Si par exemple $e \geq 1$, on a $p = r$ (absurde car r^2 ne divise pas $\tilde{\Phi}_m(a)$) ; donc $e = e' = 0$ et $m = m'$.

Si $p = 2$, on obtient encore $m = 2^e$, $m' = 2^{e'}$, $e, e' \geq 0$; le cas e ou $e' \geq 2$ étant impossible car alors $\tilde{\Phi}_m(a)$ ou $\tilde{\Phi}_{m'}(a)$ est impair, il reste par exemple le cas $e = 1$, $e' = 0$, mais alors $\tilde{\Phi}_2(a) = \frac{a+1}{2}$ et $\tilde{\Phi}_1(a) = \frac{a-1}{2}$ qui ne peuvent être tous deux divisibles par 2. Enfin tout p divise $\Phi_{o_p(a)}(a) = \tilde{\Phi}_{o_p(a)}(a)$. \square

En résumé on a obtenu l'équivalence, plus forte que $q_p(a) = 0 \iff p^2 \mid \Phi_{o_p(a)}(a)$:

Théorème 2.7. *Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et soit p premier. Alors $q_p(a) = 0$ si et seulement si p^2 divise $\tilde{\Phi}_{o_p(a)}(a)$.*

Ainsi, la recherche des quotients de Fermat nuls est de nature multiplicative, a priori différente de celle des quotients de Fermat $1, 2, \dots, p-1$: si $\tilde{\Phi}_m(a) = \prod_{k=1}^g \ell_k^{n_k}$, le cas $q_{\ell_j}(a) = 0$ se lit sur l'exposant n_j tandis que si $n_j = 0$ on a $\frac{\tilde{\Phi}_m(a)}{\ell_j} = \prod_{k \neq j} \ell_k^{n_k}$ qui relie $q_{\ell_j}(a)$ au produit $\prod_{k \neq j} \ell_k^{n_k}$ au moyen d'une congruence modulo ℓ_j convenable.

2.5. Première approche des questions de probabilités. Pour chacun des cas $q_p(a) = u \in [0, p]$, la probabilité est a priori voisine de $\frac{1}{p}$. Des probabilités inférieures à $\frac{1}{p}$ en moyenne pour $u = 0$ ne sont pas contradictoires avec une somme égale à 1 car une étude numérique montrera qu'environ $\frac{1}{3}$ des $u \in [0, p[$ ne sont pas de la forme $q_p(z)$, $z \in [2, p]$ (pour $p = 11$, on trouve que $u = 3, 6, 8, 9$ ne sont pas atteints). Par exemple, lorsque $a \ll p$ (a fixé) a un p -quotient de Fermat nul, alors tout $b \geq 2$ tel que $ab < p$ vérifie $q_p(ab) = q_p(b)$, ce qui montre une "non surjectivité" évidente. Pour $p = 1093$ et $p = 3511$ ($q_p(2) = 0$), on obtient les proportions de 0.60348 et 0.60285, respectivement, de u non atteints.

On peut utiliser le programme suivant pour d'autres expérimentations :

```
{p = 103; while(p < 103 + 100, p = nextprime(p + 1)); P = 0; p2 = p2; N = 0.0;
for(a = 1, p - 1, Q = Mod(a, p2)(p-1) - 1;
q = component(Q, 2)/p; P = P + xq); for(k = 1, p, u = component(P, k);
if(u == 0, N = N + 1)); print(p, "", N/(p - 1))}
```

¹

En outre le cadre probabiliste précédent de recherche des solutions $z \in [2, p[$ est plutôt de type “densité” sur un l’intervalle tendant vers l’infini avec p ; or on verra au §3.4 que ces deux cas de figure sont à distinguer soigneusement.

L’aspect chaotique de ces estimations invite à faire des statistiques cumulées : $a \geq 2$ et u (en général 0) sont fixés mais on teste plusieurs p , par exemple une dizaine, pour lisser le phénomène puisque, pour un seul p , plusieurs valeurs inconnues de $q_p(z)$, $z \in [2, p[$, sont de probabilité nulle et d’autres multiples de $\frac{1}{p}$.

Les cas où $\tilde{\Phi}_m(a)$ est divisible par le carré d’un nombre premier p sont rarissimes. Rappelons cependant les toutes premières valeurs (a, p) pour lesquelles $q_p(a) = 0$, qui correspondent le plus souvent à des cas triviaux comme $p = 2$ et $a \equiv 1 \pmod{4}$, $p = 3$ et $a \equiv 1, 8 \pmod{9}$:

```
{for(a = 2, 14, p = 0; while(p < 100, p = nextprime(p + 1)); p2 = p2;
Q = Mod(a, p2)(p-1) - 1; if(Q == 0, print(a, "", p)))}
```

$(a, p) = (3, 11); (5, 2); (7, 5); (8, 3); (9, 2); (9, 11); (10, 3); (11, 71); (13, 2); (14, 29).$

Remarque 2.8. On utilise $\tilde{\Phi}_m(a)$ au lieu de $\Phi_m(a)$ car en raison du nombre premier r éventuel, les valeurs $\Phi_m(a)$ sont trivialement non premières entre elles (pour les m de la forme $r^e \cdot o_r(a)$, $e = 0, 1, \dots$) ; donc on ne peut pas étudier les facteurs carrés du produit formel $\mathcal{P}(a) := \prod_{m \geq 1} \Phi_m(a)$ qui contient pour chaque r les sous-produits $\prod_{e \geq 1} \Phi_{r^e \cdot o_r(a)}(a)$ et donc les facteurs parasites r^∞ , ce qui n’est plus le cas de $\tilde{\mathcal{P}}(a) := \prod_{m \geq 1} \tilde{\Phi}_m(a)$.

3. PREMIÈRE ANALYSE PROBABILISTE POUR $q_p(a) = 0$

3.1. Résultat de A. Granville [2]. Ce résultat a été obtenu, dans le cas le plus général, sous la conjecture *ABC*. Soit $f \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme tel que l’ensemble des $f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, ait un plus grand commun diviseur égal à 1 (le cas plus complet énoncé dans [2] ne s’applique pas pour nous).

Proposition 3.1. *La densité naturelle des entiers $A \in \mathbb{N}$ tels que $f(A)$ est sans facteur carré non trivial est donnée par l’expression :*

$$\prod_{p \text{ premier} \geq 2} \left(1 - \frac{c_p}{p^2}\right), \text{ où } c_p = \left| \left\{ b \in [0, p^2[, f(b) \equiv 0 \pmod{p^2} \right\} \right|,$$

chaque facteur $1 - \frac{c_p}{p^2}$ étant la densité (dite densité locale associée à p) des $A \in \mathbb{N}$ tels que $p^2 \nmid f(A)$. Dans le cas local, la densité des $A \in \mathbb{N}$ tels que $p^2 \mid f(A)$ étant $\frac{c_p}{p^2}$.

D’une certaine manière on peut dire que les événements $p^2 \nmid f(A)$ sont indépendants par rapport à p .

¹ Dans tous les programmes PARI [10] proposés, la compatibilité avec TeX oblige à écrire les symboles *par*, & avec un antislash, à placer des \$ et des { } pour les exposants... Sous réserve d’éliminer ces symboles, le fichier tex permet de copier-coller ces programmes.

3.2. Calcul des coefficients c_p pour les polynômes $\Phi_m(x)$, $m \geq 1$. Le p.g.c.d. des $\Phi_m(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, est égal à 1 car $\Phi_m(0) = \pm 1$ puisque toute racine de l'unité est de norme ± 1 .

Comme $\Phi_m(0) = \pm 1$, on a pour tout p premier,

$$c_p = \left| \left\{ A \in [1, p^2[, \Phi_m(A) \equiv 0 \pmod{p^2} \right\} \right|.$$

Proposition 3.2. *Si $p \geq 2$ ne divise pas m , on a $c_p = 0$ pour les $p \not\equiv 1 \pmod{m}$ et $c_p = \varphi(m)$ pour les $p \equiv 1 \pmod{m}$, où φ est l'indicateur d'Euler.*

Si $m = p^e m'$, $e \geq 1$, $p \nmid m'$, on a $c_p = 0$ sauf si $m = 2$, auquel cas $c_2 = 1$.

Démonstration. (i) Cas $p \nmid m$. Dans ce cas, la congruence $\Phi_m(A) \equiv 0 \pmod{p}$ est équivalente à $m = o_p(A)$ et on a $p \equiv 1 \pmod{m}$; donc pour $p \nmid m$, il y a exactement $\varphi(m)$ nombres distincts $A_i \in [1, p[$ pour lesquels $\Phi_m(A_i) \equiv 0 \pmod{p}$.

Considérons pour i fixé les entiers de la forme $A = A_i + \lambda_i p \in [1, p^2[$ (i.e., $\lambda_i \in [0, p[$). On a $\Phi_m(A) \equiv \Phi_m(A_i) + \lambda_i p \Phi'_m(A_i) \pmod{p^2}$, où Φ'_m est le polynôme dérivé de Φ_m ; dès que $\Phi'_m(A_i) \not\equiv 0 \pmod{p}$, il existe un unique λ_i modulo p donnant $\Phi_m(A) \equiv 0 \pmod{p^2}$ et dans ce cas, $c_p = \varphi(m)$.

Montrons que $\Phi'_m(A_i) \not\equiv 0 \pmod{p}$. On a $x^m - 1 = \Phi_m(x) \times Q(x)$, $Q \in \mathbb{Z}[x]$; d'où $m x^{m-1} = \Phi'_m(x) \times Q(x) + \Phi_m(x) \times Q'(x)$. Si $\Phi'_m(A_i) \equiv 0 \pmod{p}$ il vient $m A_i^{m-1} \equiv 0 \pmod{p}$; comme $p \nmid A_i$ par hypothèse, on a $m \equiv 0 \pmod{p}$ (absurde).

(ii) Cas où $p = r \mid m$. D'après le Lemme 2.3, $m = r^e \cdot o_r(A)$, $e \geq 1$, et $\Phi_m(A) \equiv 0 \pmod{r^2}$ n'a pas de solutions sauf si $m = 2$, auquel cas $c_2 = 1$. \square

3.3. Densités et Probabilités. De façon générale, $A \in \mathbb{N}$ désigne une variable et $F(A)$ une propriété. On appelle alors densité naturelle (ou, pour simplifier, densité) la limite (si elle existe), $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \left| \left\{ A \leq y, F(A) \right\} \right|$ (cf. [13], III.1.1).

Si $F = F_p$ est la propriété locale $p^2 \mid f(A)$, la densité est celle donnée dans la Proposition 3.1, égale à $\frac{c_p}{p^2}$ (celle de $p^2 \nmid f(A)$ étant $1 - \frac{c_p}{p^2}$). Dans ce cadre, la densité est relative à tous les entiers (y compris ceux divisibles par p). Dans $\mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ ces densités deviennent respectivement $\frac{c_p}{p(p-1)}$ et $1 - \frac{c_p}{p(p-1)}$.

Il faut distinguer la notion de densité, relative à la propriété :

pour p fixé, $p^2 \mid f(A)$ pour $A \in \mathbb{N}$ variant arbitrairement,

de celle de probabilité définissant l'événement :

pour a fixé, $p^2 \mid f(a)$ pour p premier variant arbitrairement

(cas de l'étude de $q_p(a) = 0$ équivalent à $p^2 \mid \tilde{\Phi}_{o_p(a)}(a)$, $p \nmid a$ (Théorème 2.7)).

Analysons sur des cas précis ce qu'il en est ; soit $d \mid p - 1$ un ordre fixé.

Si $p = 2$ et $d = 1$, $\Phi_1(x) = x - 1$ et la densité des A tels que $A - 1 \equiv 0 \pmod{4}$ est trivialement $\frac{\varphi(1)}{p^2} = \frac{1}{4}$ (resp. $\frac{\varphi(1)}{p(p-1)} = \frac{1}{2}$ pour les A impairs). Ici l'ordre de grandeur de a ne joue pas encore, mais si l'on veut par exemple $a < p$, la seule solution est $a = 1$.

Le cas $p = 3$ est plus éloquent car pour $d = 1$, la densité des A tels que $A - 1 \equiv 0 \pmod{9}$ est trivialement $\frac{1}{9}$ (resp. $\frac{1}{6}$ pour les A étrangers à 3) et celle correspondant à $d = 2$ (i.e., $\Phi_2(x) = x + 1$) est aussi $\frac{1}{9}$ (resp. $\frac{1}{6}$); puisque $A \not\equiv 0 \pmod{3}$ peut être d'ordre 1 ou 2 modulo 3, la densité totale pour $q_3(A) = 0$ est $\frac{2}{9}$ (resp. $\frac{1}{3}$).

Par contre pour a fixé non divisible par 3, le cas $a - 1 \equiv 0 \pmod{9}$ se produit une fois (solution minimale $a = 1$) et le cas $a + 1 \equiv 0 \pmod{9}$ également, mais avec l'unique solution minimale $a = 8$; or si a était fixé "assez petit", la probabilité correspondante chute ou si l'on préfère, la probabilité pour $q_3(a)$ d'être non nul augmente. Le cas $a + 1 \equiv 0 \pmod{9}$ n'est donc plus envisageable avec une probabilité égale à sa densité $\frac{1}{6}$. Au total la probabilité pour que $q_3(a) = 0$ n'est plus la densité totale $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ (selon que $o_3(a) = 1$ ou 2).

Pour $p = 7$, on trouve, pour $A \in [1, 7^2[$, $A \not\equiv 0 \pmod{7}$, les solutions suivantes à $p^2 \mid \tilde{\Phi}_d(A)$, selon l'ordre d modulo p considéré :

$$A = 1 \ (d = 1), \quad A = 48 \ (d = 2), \quad A = 18, 30 \ (d = 3), \quad A = 19, 31 \ (d = 6).$$

Pour $p = 101$, on trouve de même :

$$A = 1 \ (d = 1), \quad A = 181 \ (d = 25), \quad A = 248 \ (d = 100), \dots, \\ A = 10020 \ (d = 50), \quad A = 10200 \ (d = 2).$$

On voit bien que si a est fixé assez petit lorsque p varie de façon arbitraire, la probabilité de divisibilité de $\tilde{\Phi}_d(a)$ par p^2 peut même être très faible.

Pour simplifier, nous parlerons par abus de probabilités lorsque a est fixé, et nous écrirons $\text{Prob}(f(a) \text{ s.f.c.})$ et $\text{Prob}(p^2 \nmid f(a))$ respectivement, puis $\text{Prob}(q_p(a) = 0)$, $\text{Prob}(q_p(a) \neq 0)$, etc.

A partir de ce principe et de ces observations numériques, nous examinerons différentes heuristiques en partant des plus faibles (permettant encore l'infinitude des $q_p(a)$ nuls) pour aller vers les plus fortes associées à la finitude des $q_p(a)$ nuls.

On peut donc déjà admettre la première heuristique générale suivante :

Heuristique 3.3. *Supposons que pour $A \in \mathbb{N}$ (resp. $A \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$), la propriété "globale" $F(A)$ (resp. la propriété "locale" $F_p(A)$) soit du type $f(A)$ a un facteur carré (resp. $p^2 \mid f(A)$), $f \in \mathbb{Z}[X]$. Alors la densité correspondante dans \mathbb{N} (resp. $\mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$) est un majorant de $\text{Prob}(F(a))$ (resp. $\text{Prob}(F_p(a))$) pour a fixé.*

Par exemple, les densités locales $\frac{\varphi(d)}{p(p-1)}$, caractérisant la propriété $F_p(A)$ définie par $p^2 \mid \tilde{\Phi}_d(A)$ pour les A d'ordre $d \mid p-1$, sont des *majorants* de $\text{Prob}(q_p(a) = 0)$ pour a fixé de même ordre d ($a, A \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$). Ceci sera utilisé au § 3.4.

La Proposition 3.2 a la conséquence suivante concernant la densité globale (on rappelle que $\tilde{\Phi}_m(A) = \Phi_m(A)$ si p.g.c.d. $(\Phi_m(A), m) = 1$, ou $\tilde{\Phi}_m(A) = \frac{\Phi_{r \cdot e \cdot o_r(A)}(A)}{r}$ sinon, pour un unique nombre premier r et $e \geq 1$) :

Corollaire 3.4. *Pour tout $m \neq 2$, la densité des $A \in \mathbb{N}$ tels que $\tilde{\Phi}_m(A)$ est sans facteur carré non trivial est $\prod_{p \equiv 1 \pmod{m}} \left(1 - \frac{\varphi(m)}{p^2}\right)$. Pour $m = 2$, la densité des*

$$\tilde{\Phi}_2(A) = A + 1 \text{ ou } \frac{1}{2}(A + 1) \text{ sans facteur carré est } \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} \approx 0.6.$$

Remarque 3.5. Les valeurs de $P_m = \prod_{p \equiv 1 \pmod{m}} \left(1 - \frac{\varphi(m)}{p^2}\right)$ se calculent très facilement par le programme suivant :

```
{for(m = 1000002, 1000003, f = eulerphi(m); P = 1.0;
for(n = 1, 2 * 10^6, p = 1 + n * m; if(isprime(p) == 1, P = P * (1 - f/p^2)); print(m, " ", P))}
```

qui conduit au tableau :

$$\begin{aligned}
 P_3 &\approx 0.93484202308683713466409790668210927326 \\
 P_4 &\approx 0.89484123120292308233007546174564683811 \\
 P_5 &\approx 0.95709281951397098677511212591026189432 \\
 P_{39} &\approx 0.99466134034387664509206853899643846793 \\
 P_{40} &\approx 0.98961654058761399079945594714123081337 \\
 P_{10003} &\approx 0.99999392595496021757107201755865536021 \\
 P_{1000002} &\approx 0.99999964016779551958062234579864526853
 \end{aligned}$$

3.4. Densités et probabilités au niveau des p -quotients de Fermat. Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ fixé. On écrit que la probabilité d’avoir $q_p(a) = 0$ est de la forme $\text{Prob}(q_p(a) = 0) = \frac{1}{p^{1+\epsilon(p,a)}}$, avec $\epsilon(p, a)$ voisin de 0.

Dans l’étude probabiliste de la condition $q_p(a) = 0$, p est variable tendant vers l’infini de sorte que l’on a $a < p$ pour tout p assez grand ; on va donc rechercher, comme expliqué au § 3.3 (cf. Heuristique 3.3), la densité locale associée qui constituera un majorant de la probabilité correspondante.

Soit $u \in [0, p[$ donné. La densité des A étrangers à p tels que $q_p(A) = u$ se lit aussi dans l’intervalle $[0, p^2[$ puisque $q_p(A + \Lambda p^2) \equiv q_p(A) \pmod{p}$ pour tout entier Λ .

Lemme 3.6. *Soit $z \in [1, p[$, p premier ; alors il existe un unique $\lambda_u(z) \in [0, p[$ tel que $Z = z + \lambda_u(z)p \in [1, p^2[$ vérifie $q_p(Z) = u$. Le nombre $\lambda_u(z)$ est caractérisé par la congruence $\lambda_u(z) \equiv z(q_p(z) - u) \pmod{p}$ et on obtient $Z \equiv z^p - zu \pmod{p^2}$. Par conséquent, la densité des $A \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ tels que $q_p(A) = u$ est égale à $\frac{1}{p}$.*

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, $(z + \lambda p)^p - (z + \lambda p) \equiv z^p - z - \lambda p \pmod{p^2}$, d’où $\lambda \equiv z q_p(z) - Z q_p(Z) \equiv z q_p(z) - z q_p(Z) \pmod{p}$. Donc $q_p(Z) = u$ si et seulement si $\lambda = \lambda_u(z) \equiv z q_p(z) - z u \pmod{p}$. On a donc pour chaque $z \in [1, p[$ un unique $Z = z + \lambda_u(z)p \in [1, p^2[$ tel que $q_p(Z) = u$, d’où la densité (Z est aussi le résidu modulo p^2 de $z^p - zu$). Pour $u = 0$, Z est le résidu modulo p^2 de z^p . \square

Rappelons que $q_p(A) = 0$ est équivalent à $p^2 \mid \tilde{\Phi}_{o_p(A)}(A)$ (Théorème 2.7). D’après les résultats “locaux” (cf. §§ 3.1, 3.2, Corollaire 3.4), la densité des $A \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ tels que $p^2 \mid \tilde{\Phi}_m(A)$ est égale à $\frac{\varphi(m)}{p(p-1)}$ (resp. 1) si $m = o_p(A)$ (resp. $m \neq o_p(A)$). En faisant

la somme sur les ordres possibles, on retrouve bien la densité $\sum_{d \mid p-1} \frac{\varphi(d)}{p(p-1)} = \frac{1}{p}$.

Revenons au cas d’un entier $a \geq 2$ fixé pour lequel la probabilité d’avoir $q_p(a) = 0$ est a priori majorée par $\frac{1}{p}$. On a facilement $o_p(a) > \frac{\log(p)}{\log(a)}$ puisque $a^{o_p(a)} = 1 + \lambda p$, $\lambda \geq 1$, et de fait $\text{Prob}(o_p(a) = d) = 0$ pour les $d < \frac{\log(p)}{\log(a)}$.

Pour $a \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ fixé, on a $o_p(a) \in \{d, d \mid p-1\}$ et une heuristique raisonnable est que la probabilité correspondante est majorée par la densité relative à la propriété locale $o_p(A) = d$, qui est égale à $\frac{\varphi(d)}{p-1}$, car A n’est pas divisible par p et seul le résidu de A dans $[1, p[$ intervient sachant qu’il y a exactement $\varphi(d)$ éléments d’ordre d dans cet intervalle. Mais le phénomène précédent sur les petites valeurs de d rend les “grands” ordres plus probables pour a , ce qui semble pouvoir être négligé dans la mesure où, pour $h = \frac{\log(p)}{\log(a)}$, on a $\sum_{d < h} \frac{\varphi(d)}{p-1} < O(1) \frac{\log^2(p)}{p}$.

Remarque 3.7. Soient a fixé et p arbitrairement grand ; on a alors le phénomène analogue suivant : soit $g > a$ et soit $G := \left\{ g^i, 1 \leq i < \frac{\log(p)}{\log(g)} \right\} \subseteq [2, p[$. Cet ensemble est constitué d'éléments plus grands que a , dont les ordres sont certains diviseurs δ de $p-1$, et ceci modifie le décompte pour a , ce qui fait que, a priori, $\text{Prob}(o_p(a) = \delta)$ est inférieur à $\frac{\varphi(\delta)}{p-1}$.

Exemple 3.8. Prenons $p = 37813$, $a = 2$; alors pour $g = 3$, on a $G = \{3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683\}$ dont les éléments sont d'ordres respectifs 18906, 9453, 6302, 9453, 18906, 3151, 18906, 9453, 6302. Pour $g = 5$ on trouve les ordres 37812, 18906, 12604, 9453, 37812, 6302. On peut construire de tels ensembles jusqu'à $g = 193$ (donnant les ordres 37812, 18906).

Donc pour $a = 2$ (d'ordre $p-1 = 37812$), la probabilité ne peut coïncider avec la densité $\frac{\varphi(p-1)}{p-1} = 0.3165$. Le phénomène est difficile à quantifier, mais a une influence importante.

La probabilité correspondante de nullité de $q_p(a)$, pour a fixé et p variable, est donc a priori fortement majorée par $\sum_{d|p-1} \frac{\varphi(d)}{p-1} \times \frac{\varphi(d)}{p(p-1)} = \frac{1}{p(p-1)^2} \sum_{d|p-1} \varphi(d)^2$.

En résumé on a obtenu dans ce premier cadre le résultat heuristique suivant :

Heuristique 3.9. On a , pour $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ fixé et p assez grand :

$$\text{Prob}(q_p(a) = 0) := \frac{1}{p^{1+\epsilon(p,a)}} < \frac{1}{p(p-1)^2} \sum_{d|p-1} \varphi(d)^2,$$

ou de façon équivalente $\epsilon(p, a) > \frac{1}{\log(p)} \left(2 \log(p-1) - \log \left(\sum_{d|p-1} \varphi(d)^2 \right) \right)$.

Remarque 3.10. Si l'heuristique précédente est vérifiée, alors on obtient :

$$\epsilon(p, a) > 0 \text{ car } \frac{1}{p^{1+\epsilon(p,a)}} < \frac{\sum_{d|p-1} \varphi(d)^2}{p(p-1)^2} < \frac{(\sum_{d|p-1} \varphi(d))^2}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p}$$

(où $\frac{1}{p}$ est la densité des A tels que $q_p(A) = 0$). Autrement dit, si $v(p, a) = v(p)$ est la fonction $v(p) = \frac{1}{\log(p)} \left(2 \log(p-1) - \log \left(\sum_{d|p-1} \varphi(d)^2 \right) \right)$, on a $\epsilon(p, a) > v(p) > 0$ pour tout p assez grand. Afin de proposer de telles fonctions $\epsilon(p, a)$, nous allons donner une condition suffisante de convergence des séries du type $\sum_p \frac{1}{p^{1+\epsilon(p,a)}}$, la série $\sum_p \frac{1}{p^{1+v(p)}}$ ne l'étant pas comme l'a montré G. Tenenbaum (cf. § 3.6).

3.5. Une série de référence convergente sur les nombres premiers. Pour tout $n \geq 1$, désignons par p_n le n -ième nombre premier.

Lemme 3.11. Soit $C > 1$ une constante et soit $\eta(p) := C \cdot \frac{\log_3(p)}{\log(p)}$, où \log_k désigne le k -ième itéré de la fonction \log . Alors on a $S := \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p^{1+\eta(p)}} < \infty$.

Démonstration. On a $\sum_{p \geq 2} \frac{1}{p^{1+C \cdot \log_3(p)/\log(p)}} = \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p \cdot \log_2^C(p)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n \cdot \log_2^C(p_n)}$.

On sait que $p_n > n \log(n)$ (théorème de Rosser) ; donc on peut à une constante additive près majorer S par $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n \log(n) \cdot \log_2^C(n \log(n))} < \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n \log(n) \cdot \log_2^C(n)}$ qui

a même comportement que $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x \log(x) \cdot \log_2^C(x)} = \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{y \cdot \log^C(y)} < \infty$. \square

En effet, pour chaque $p \in \{p_1, \dots, p_n\}$ soit $(B_p^j)_{j=1, \dots, p-1}$ la famille des $p-1$ solutions canoniques $B_p^j \in [1, p^2[$ à $q_p(B_p^j) = 0$ (cf. Lemme 3.6) ; alors tout A satisfaisant à l'un des systèmes de congruences :

$$A \equiv B_{p_1}^{j_1} \pmod{p_1^2}, \quad j_1 \in \{1, \dots, p_1 - 1\}$$

...

$$A \equiv B_{p_n}^{j_n} \pmod{p_n^2}, \quad j_n \in \{1, \dots, p_n - 1\}$$

conduit à $q_{p_1}(A) = \dots = q_{p_n}(A) = 0$, et c'est en outre une équivalence. Naturellement A devient en général très grand.

Exemple 3.13. Pour $p_1 = 5$, $p_2 = 7$, on obtient les 24 solutions fondamentales modulo 35^2 :

$$\{1, 18, 68, 99, 226, 276, 293, 324, 374, 393, 557, 607, 618, 668, 832, 851, \\ 901, 932, 949, 999, 1126, 1157, 1207, 1224\},$$

la plus petite solution $a > 1$ de ce type étant 18.

3.7. Quotients de Fermat non nuls sur un intervalle – Exemples. Un des aspects du problème de la finitude ou non des quotients de Fermat nuls est qu'il n'est pas rare de trouver des valeurs de a pour lesquelles $q_p(a) \neq 0$ sur un intervalle $p \in [2, B[$ où B est de l'ordre de 10^{10} , ce qui accrédite la finitude.

Or s'il existe effectivement des a tels que $q_p(a) \neq 0$ pour tout p , un tel cas de finitude (triviale) pour $q_p(a) = 0$ pourrait vouloir dire que tous les entiers $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ont un nombre fini de quotients de Fermat nuls, une heuristique naturelle étant que l'on ne peut avoir deux catégories de nombres fondamentalement différentes.

On abordera cette existence (sous les heuristique précédentes et les résultats de densité) au Théorème 4.11 par un calcul effectif de densité.

Pour $2 \leq a \leq 100$ on trouve les exemples suivants (le cas $p = 2$ éliminant tous les $a \equiv 1 \pmod{4}$, $p = 3$ éliminant tous les $a \equiv 1, 8 \pmod{9}$, etc.) :

Pour $a = 34$ la première solution est $p = 46145917691$.

Pour $a = 66$, on trouve la première solution $p = 89351671$.

Pour $a = 88$, on trouve la première solution $p = 2535619637$.

Pour $a = 90$, on trouve la première solution $p = 6590291053$.

Pour $a = 47$ et $a = 72$ on ne trouve aucune solution pour $p \leq 10^{11}$.

Dans [7] on trouve les exemples suivants pour $a \in [2, 101]$ et $p \leq 10^{11}$:

$(a, p) = (5, 6692367337), (23, 15546404183), (37, 76407520781), (97, 76704103313)$ et la solution remarquable $(5, 188748146801)$, ce qui semble indiquer que la finitude éventuelle des $q_p(a) = 0$ n'implique pas nécessairement l'existence d'une borne, pour p , fonction de a .

On peut poursuivre cette étude au moyen du programme suivant (par tranches) :

```
{A = 47; p = 1011 + 1; while(p < 2 * 1011, p = nextprime(p + 2);
Q = Mod(A, p2)(p-1); if(Q == 1, print(p))}
```

De $a = 100000$ à 100099 , les résultats sont similaires mais avec une raréfaction certaine, car a est fixé mais plus grand que dans le cadre classique ($a = 2, 3, \dots$).

Jusqu'à $p < 10^8$, aucune solutions pour $a = 100014, 100015, 100022, 100030, 100055, 100062, 100075, 100083$.

Pour d'autres exemples numériques voir [7].

4. SECONDE ANALYSE PROBABILISTE POUR $q_p(a) = 0$

L'approche précédente (Section 3), de type "estimations de densités" relativement à la variable entière A , ne tient pas assez compte du fait que l'on étudie $q_p(a)$ pour a fixé "petit" et p variable arbitrairement grand. Or, comme on l'a vu, le simple fait que $q_p(a) = 0$ pour $p \gg a$ entraîne de nombreuses solutions dans $[2, p[$, puisque $q_p(a^j) = 0$ pour $1 \leq j < \frac{\log(p)}{\log(a)}$ (avec $a^j \in [2, p[$). D'où la nécessité d'une première étude sur l'intervalle $[2, p[$, étude qui ne dépend alors que de p .

4.1. Etude des solutions à $q_p(z) = 0$, $z \in [2, p[$. Dans cette partie nous allons essayer de justifier l'existence d'une loi de probabilité classique en utilisant un certain nombre d'arguments théoriques et des calculs numériques.

4.1.1. Retour sur l'aspect densités vs probabilités. Soit p un nombre premier fixé. Pour chaque $z \in [1, p[$ il existe un unique $\lambda(z) \in [0, p[$ tel que $Z := z + \lambda(z)p \equiv z^p \pmod{p^2}$ vérifie $q_p(Z) = 0$, d'où la densité des $A \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ tels que $q_p(A) = 0$ (pour p fixé), égale à $\frac{1}{p}$. Ceci a été vu § 3.4 où le Lemme 3.6 démontre une certaine équirépartition puisque la densité des $A \in \mathbb{N} \setminus p\mathbb{N}$ tels que $q_p(A) = u$ est aussi égale à $\frac{1}{p}$ quel que soit $u \in [0, p[$. Autrement dit, si l'on fixe provisoirement p , pour $A \in [1, p^2[$ la probabilité d'avoir $q_p(A) = u$ devient exactement égale à la densité $\frac{1}{p}$.

Remarque 4.1. Si a est fixé et si h est la partie entière de $\frac{\log(p)}{\log(a)}$, on a pour $j = 1, \dots, h$, $a^j \in [2, p[$ et $q_p(a^j) \equiv j q_p(a) \pmod{p}$. Si $q_p(a) = 0$, tous les $q_p(a^j)$ sont nuls, mais si $q_p(a) = u \neq 0$, on a $q_p(a^j) \equiv j u \pmod{p}$; ces quotients de Fermat sont alors tous distincts et non nuls modulo p .

On verra au moyen des exemples numériques ci-après (cf. § 4.1.2) que le nombre de cas où $q_p(z) = 0$ pour $z \in [2, p[$ est statistiquement très faible (quelques unités quelle que soit la taille de p); naturellement il existe des cas exceptionnels : lorsqu'une solution z vérifie $z \ll p$, on a un certain nombre de puissances de z , solutions dans $[2, p[$, mais on peut supposer que ceci est compensé par le fait que $Z \ll p$, pour l'élément correspondant $Z = z + \lambda(z)p \in [2, p^2[$, est d'autant moins probable. Si l'on se base sur l'existence d'une loi de probabilité telle que $\text{Prob}(\lambda(z) = 0) < \frac{1}{p}$ (à comparer à $\text{Prob}(q_p(A) = 0) = \frac{1}{p}$ pour $A \in [2, p^2[$), on est fondé à énoncer l'heuristique suivante qui semble légitime au vu du faible nombre moyen de solutions pour chaque p :

Heuristique 4.2. Les $p - 2$ valeurs $Z = z + \lambda(z)p \equiv z^p \pmod{p^2}$, $z \in [2, p[$, $\lambda(z) \in [0, p[$, telles que $q_p(Z) = 0$, sont aléatoires et indépendantes dans $[2, p^2[$. Ceci est équivalent à la propriété analogue pour les $p - 2$ valeurs $\lambda(z) \in [0, p[$.

Une étude numérique montre clairement que le nombre de cas où $\lambda(z) = 0$ (i.e., $q_p(z) = 0$) est très faible car il correspond à une probabilité voisine de $\frac{1}{p}$ au plus pour chaque z (loi binomiale de paramètres $(p - 2, 1/p)$, cf. Heuristique 4.3 et Remarque 4.5). Comme il y a $p - 2$ solutions $Z \in [2, p^2[$, on peut s'attendre en moyenne à une solution $z \in [2, p[$ et à $p - 3$ solutions $Z \in [p + 1, p^2[$.

De même que pour les valeurs de $q_p(z)$, non toutes réalisées dans $[0, p[$ (cf. § 2.5), les nombres $\lambda(z) \in [0, p[$ tels que $q_p(z + \lambda(z)p) = 0$ ne sont pas tous atteints (il y a aussi environ $\frac{1}{3}$ des valeurs dans ce cas), ce qui est compatible avec le fait que en moyenne $\text{Prob}(\lambda(z) = v) < \frac{1}{p}$ pour $v \in [0, p[$ (pour $p = 11$, les $v = 1, 4, 5, 6, 9$ ne sont pas atteints).

4.1.2. *Recherche numérique des solutions* $z \in [2, p[$. Considérons le programme suivant pour une tranche $B < p < B + 200$; pour chaque solution $z \in [2, p[$, on indique l'ordre d de z :

```
{B = 107; p = B; while(p < B + 200, p = nextprime(p + 2); print(p); p2 = p2; for(z = 2, p - 1,
Q = Mod(z, p2)(p-1) - 1; if(Q == 0, d = znorder(Mod(z, p)); print(" ", z, " ", d))}}
```

Pour de grandes valeurs de p , on obtient peu de solutions comme attendu :

```
p = 10000019
p = 10000079
      z1 = 6828481, d = 909098,
      z1 = 9659873, d = 5000039,
p = 10000103
      z1 = 4578211, d = 386,
      z1 = 4215058, d = 10000102,
      z2 = 4732368, d = 10000102,
      z3 = 8804922, d = 10000102,
p = 10000121
      z1 = 1778643, d = 10000120,
      z1 = 3601025, d = 5000060,
p = 10000139
```

Pour $p = 1110000127$ (pris au hasard), il y a l'unique solution $z = 723668846$; le nombre premier suivant, $p = 1110000149$, donne 0 solutions dans $[2, p[$.

Ceci est assez analogue au cas des petits nombres premiers (nous omettons les $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 31, 41$ ne conduisant à aucune solution dans $[2, p[$) :

$p = 11$ ($z_1 = 3, d = 5, z_2 = 9, d = 5$) ; $p = 29$ ($z_1 = 14, d = 28$) ; $p = 37$ ($z_1 = 18, d = 36$) ;
 $p = 43$ ($z_1 = 19, d = 42$).

En outre les solutions $z \in [2, p[$ telles que $q_p(z) = 0$ sont assez bien réparties comme le vérifie le programme suivant qui compte (sur l'ensemble des $p < B$) le nombre N_t de solutions sur un intervalle de longueur $(p-1)/t$, où t est une constante ajustable (indépendante de p) ; on compare N_t à $\frac{N}{t}$, où N est le nombre de solutions sur $[2, p[$. Les nombres N_t et N sont cumulés sur l'ensemble des p car comme on vient de le voir, le nombre de solutions pour chaque p est trop faible :

```
{B = 106; N = 0; t = 25.0; Nt = 0; p = 1; while(p < B, p = nextprime(p + 2);
p2 = p2; for(z = 2, p - 1, Q = Mod(z, p2)(p-1) - 1; if(Q == 0, N = N + 1;
if(z < (p - 1)/t, Nt = Nt + 1)); print(Nt, " ", floor(N/t))}
```

On constate une bonne équirépartition en dépit de la méthode utilisée ; par exemple, pour $B = 2 \cdot 10^5$, on trouve $N_t = 730$ pour une moyenne $\frac{N}{t}$ égale à 718.

D'autres expérimentations numériques montrent le phénomène suivant. On calcule (sachant que $\lambda(z) + \lambda(p-z) = p-1$) les quantités $\sigma_n(p) := \frac{2(n+1)}{(p-1)^{n+1}} \sum_{z=1}^{(p-1)/2} \lambda(z)^n$ pour tout $n \geq 1$, où l'on rappelle que $q_p(z + \lambda(z)p) = 0$. On obtient alors une remarquable convergence alternée vers 1 :

```
{n = 11; for(h = 1, 5, p = nextprime(107 + 1000 * h); p2 = p2; lambda = 0.0;
for(z = 1, (p - 1)/2, Z = Mod(z, p2); B = Zp - Z; C = component(B, 2)/p;
lambda = lambda + Cn); print(p, " ", 2 * (n + 1) * lambda / (p - 1)(n+1))}
```

```
p = 10001009   $\sigma_{11}(p) = 1.0000467276683123307757138472299832521$ 
p = 10002007   $\sigma_{11}(p) = 1.0013551929880908863082167239611802354$ 
p = 10003001   $\sigma_{11}(p) = 1.0003688721711444598035617327427726537$ 
```

$p = 10004017 \quad \sigma_{11}(p) = 0.9996190495531549422360323290673549366$
 $p = 10005007 \quad \sigma_{11}(p) = 0.9987657593324465195103425458241420008$

4.1.3. *Classement des nombres premiers p par nombre de solutions $z \in [2, p[$.* Le programme suivant (d'exécution assez longue) calcule les proportions de nombres premiers p pour lesquels on a exactement 0, 1, ou 2 solutions, puis lorsque l'on a au moins 3 solutions $z \in [2, p[$ telles que $q_p(z) = 0$:

```
{N0 = 0; N1 = 0; N2 = 0; N3 = 0; H = 2 * 10^5; B = 2 * 10^3; p = B; N = 0.0;
while(p < B + H, p = nextprime(p + 2); N = N + 1; p2 = p^2; Np = 0;
for(z = 2, p - 1, Q = Mod(z, p2)^(p-1) - 1; if(Q == 0, Np = Np + 1));
if(Np == 0, N0 = N0 + 1); if(Np == 1, N1 = N1 + 1); if(Np == 2, N2 = N2 + 1);
if(Np >= 3, N3 = N3 + 1); print(N0/N, "", exp(-1)); print(N1/N, "", 1 - exp(-1));
print(N2/N, "", 1 - 2 * exp(-1)); print(N3/N, "", 1 - 5/2 * exp(-1))}
```

Comme les probabilités indiquées sont d'abord pour 0 solutions, puis pour au moins 1 solution, 2 solutions, 3 solutions, on doit cumuler les nombres de solutions N_1, N_2, N_3 donnés par le programme (naturellement, $N_0 + N_1 + N_2 + N_3 = N$) :

cas de 0 solutions :	$\frac{N_0}{N} = 0.3694945;$	probabilité ≈ 0.3678794
au moins 1 solution :	$\frac{N_1 + N_2 + N_3}{N} = 0.6305054;$	probabilité ≈ 0.6321205
au moins 2 solutions :	$\frac{N_2 + N_3}{N} = 0.2646531;$	probabilité ≈ 0.2642411
au moins 3 solutions :	$\frac{N_3}{N} = 0.0805782;$	probabilité ≈ 0.0803014

Dans ce cas, les résultats numériques sont remarquablement cohérents avec la répartition probabiliste que nous allons préciser au § 4.1.5.

Noter que dans le même intervalle pour p , il y a 87 solutions cumulées $z < \sqrt{p}$ pour 17866 solutions cumulées (proportion 0.00487). La tranche $]2.10^3, 2(10^3 + 10^5)[$ comporte 17845 nombres premiers (une solution en moyenne comme prévu).

4.1.4. *Commentaires au sujet des solutions "exceptionnelles".* Dès que $q_p(a) = 0$ pour $a \ll p$, plusieurs puissance de a fournissent des solutions dans $[2, p[$; pour $p = 3511$, on a les solutions 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 $< p$. Pour $p = 40487$, on a les solutions 5, 25, 125, 625, 3125, 15625 $< p$; comme 4492 est aussi une "petite" solution, on obtient la solution $5 \cdot 4492 = 22460 < p$, etc.

La situation précédente pourrait être interprétée comme une dépendance de variables aléatoires ; cependant, en termes de solutions dans $[2, p^2[$, on trouvera toujours $p - 2$ solutions $Z = z + \lambda(z)p$ à $q_p(Z) = 0$, dont les précédentes (exceptionnelles mais non supplémentaires), et en un sens on peut considérer qu'il ne s'agit que d'une question de répartition et non d'une dépendance probabiliste, car alors on a "moins de grandes solutions" dans $[p + 1, p^2[$ (par exemple, pour $p = 11$ on a $q_p(a) = 0$ pour $a = 3, 9 \in [2, p[$ et $a = 27, 40, 81, 94, 112, 118, 120 \in]p, p^2[$).

De fait le côté automatique conduisant à $\lambda(a^j) = 0$ pour tout $a^j < p$ se rencontre pour d'autres valeurs de $\lambda(z)$; par exemple, pour $p = 97$, on a $\lambda(z) = 41$ pour $z_1 = 54, z_2 = 68, z_3 = 75, z_4 = 92$; ce phénomène est d'ailleurs nécessaire puisqu'on sait que beaucoup de valeurs de $q_p(z)$ ne sont pas atteintes (cf. § 2.5).

Ce type d'événement se produit a priori avec la même (faible) probabilité, et on peut analyser ce qui précède de la façon suivante : soit $a \geq 2$ fixé étranger à p , d'ordre d , et soit $a_j \in [2, p[$ le résidu modulo p de $a^j, j = 1, \dots, d - 1$; posons $a^j a_j^{-1} \equiv 1 + \theta_j p \pmod{p^2}$, $\theta_j \in [0, p[$, alors on obtient $q_p(a_j) \equiv j q_p(a) + \theta_j \pmod{p}$.

Autrement dit, j étant donné, le quotient de Fermat de a_j dépend de celui de a au moyen d'une formule canonique, le cas $q_p(a) = 0$, $\theta_j = 0$ pour tout $a^j < p$, n'étant qu'un cas particulier de cette formule.

Le programme suivant donne la répartition des valeurs de $\lambda(z)$, $z \in [2, p[$, et celle du nombre de solutions à $\lambda(z) = v$, v donné ou pris au hasard ; pour $10^3 \leq p \leq 10^3 + 10^4$ il y a 1168 nombres premiers, et on a retenu le nombre K de cas pour lesquels il y a au moins 4 solutions :

```
{X = 50; S = 0; for(j = 1, X, v = random(10^4); K = 0; B = 2 * 10^4; H = 10^4;
p = B; while(p < B + H, p = nextprime(p + 2); p2 = p^2; N = 0;
for(z = 2, p, Q = Mod(z, p2)^p - Mod(z, p2); lambda = component(Q, 2)/p;
if(lambda == v, N = N + 1)); if(N >= 4, K = K + 1); print(v, "", K); S = S + K);
NP = 0; p = B; while(p < B + H, p = nextprime(p + 2); NP = NP + 1);
print(NP, "", S); print((S + 0.0)/(X * NP))}
```

En prenant d'abord $v = 0, \dots, 9$, on obtient $(v, K) = (0, 24), (1, 21), (2, 26), (3, 17), (4, 20), (5, 33), (6, 25), (7, 21), (8, 22), (9, 21)$.

Pour une autre tranche de valeurs de v , on obtient $(v, K) = (123, 21), (124, 11), (125, 27), (126, 23), (127, 32), (128, 19), (129, 17), (130, 21), (131, 18), (132, 21)$.

Dans tous les essais effectués, $v = 0$ ne semble pas jouer un rôle particulier.

La moyenne cumulée observée pour le nombre K est de 22 ; or $\frac{22}{1168} \approx 0.0188356$, et la probabilité que nous définirons pour "au moins 4 solutions à $\lambda(z) = v$ " est égale à 0.0189 (cf. Remarque 4.5), ce qui constitue une vérification remarquable des arguments précédents. Une expérimentation utilisant la fonction *random* pour $v \in [0, 10^4[$, pour une tranche de 984 nombres premiers $p > 2 \cdot 10^4$, conduit à la valeur 0.019268.

Remarquons aussi que si par exemple $q_p(2)$ était nul pour une infinité de p , alors le nombre h de solutions dans $[2, p[$, dûes aux $a_j = 2^j$, tendrait vers l'infini pour une sous-suite de p , ce qui peut paraître excessif au regard de la répartition (i.e., de la densité) sur $[2, p^2[$ (cf. résultats numériques du § 4.1.2).

4.1.5. *Existence d'une loi de probabilités.* On suppose $z \in [2, p[$ car 1 est toujours solution. Ce qui précède conduit à une heuristique utilisant une loi binomiale de paramètres $(p - 2, \frac{1}{p})$, car on peut considérer que l'on réalise $p - 2$ tirages pour lesquels on regarde combien de fois on obtient l'événement $\lambda(z) = 0$. Le paramètre $\frac{1}{p}$ est une approximation de $\text{Prob}(\lambda(z) = 0)$; la probabilité d'avoir n cas favorables exactement est $\binom{p-2}{n} \frac{1}{p^n} (1 - \frac{1}{p})^{p-2-n} = \binom{p-2}{n} \frac{1}{p^{p-2}} (p-1)^{p-2-n}$. Cette approximation pour le second paramètre a une incidence négligeable car $Z \in [2, p^2[$ et la probabilité coïncide avec la densité.

Heuristique 4.3. Soit $z \in [2, p[$ et soit $Z = z + \lambda(z)p \in [2, p^2[$ tel que $q_p(Z) = 0$. Soit $n \in [0, p - 1[$; alors la probabilité d'avoir au moins n valeurs $z_1, \dots, z_n \in [2, p[$ telles que $q_p(z_j) = 0$ (équivalent à $\lambda(z_j) = 0$), pour $1 \leq j \leq n$, est :

$$\text{Prob}\left(\left|\left\{z \in [2, p[, q_p(z) = 0\right\}\right| \geq n\right) = \frac{1}{p^{p-2}} \sum_{j=n}^{p-2} \binom{p-2}{j} (p-1)^{p-2-j}.$$

Plus généralement, on a pour tout $v \in [0, p[$:

$$\text{Prob}\left(\left|\left\{z \in [2, p[, \lambda(z) = v\right\}\right| \geq n\right) = \frac{1}{p^{p-2}} \sum_{j=n}^{p-2} \binom{p-2}{j} (p-1)^{p-2-j}.$$

Lemme 4.4. On a pour tout n la majoration $\frac{1}{p^{p-2}} \sum_{j=n}^{p-2} \binom{p-2}{j} (p-1)^{p-2-j} < \frac{1}{p^n} \binom{p-2}{n}$.

Démonstration. On considère, pour $0 \leq n \leq N$, $t \in [1, \infty[$, la dérivée de la fonction $f_{N,n}(t) = \sum_{j=n}^N \binom{N}{j} (t-1)^{N-j} - \binom{N}{n} t^{N-n}$; elle est égale à $N f_{N-1,n}(t)$. On raisonne ensuite par récurrence, à partir de $f_{n,n}(t) = 0$ et de $f_{N,n}(1) < 0$, pour montrer que la dérivée est négative ou nulle sur tout l'intervalle $[1, \infty[$. On aura ensuite à poser $t = p$, $N = p - 2$. \square

Remarque 4.5. On a, pour les petites valeur de n , la formule plus commode :

$$\text{Prob}\left(\left|\left\{z \in [2, p[, q_p(z) = 0\right\}\right| \geq n\right) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{p-2}{j} \frac{1}{p^j} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{p-2-j},$$

et de même pour la condition $\lambda(z) = v$ à la place de $q_p(z) = 0$ (cas $v = 0$).

La probabilité d'avoir au moins une solution $z \in [2, p[$ est donc $1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^p \left(\frac{p}{p-1}\right)^2$ qui est rapidement proche de $1 - e^{-1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^2$ donc de $1 - e^{-1} \approx 0.63212$. Pour au moins 2 solutions on obtient une probabilité proche de $1 - 2e^{-1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^2 \approx 0.264$; pour au moins 3 (resp. 4) solutions on obtient 0.0803 (resp. 0.0189).

La probabilité d'avoir 0 solutions est donc $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^p \left(\frac{p}{p-1}\right)^2 \approx 0.3678$. L'excellence des résultats numériques accrédite l'existence d'une loi de probabilité binomiale.

Pour $a \ll p$, $\text{Prob}(q_p(a) = 0)$ est conditionnée à $\text{Prob}(n \geq h)$, où h est la partie entière de $\frac{\log(p)}{\log(a)}$ (cf. § 4.2); or le rapport $\frac{\text{Prob}\left(\left|\left\{z \in [2, p[, q_p(z) = 0\right\}\right| \geq h\right)}{p^{-h} \binom{p-2}{h}} < 1$ tend vers une constante $C_\infty(a)$ en décroissant selon le résultat suivant :

Lemme 4.6. On a pour tout p l'encadrement (cf. Lemme 4.4) :

$$\exp\left(-1 + \frac{1}{p}\left(h + \frac{3}{2}\right)\right) < \frac{p^{-(p-2)} \sum_{j=h}^{p-2} \binom{p-2}{j} (p-1)^{p-2-j}}{p^{-h} \binom{p-2}{h}} \leq 1.$$

Démonstration. On a la minoration $\frac{p^h}{\binom{p-2}{h}} \times \frac{1}{p^{p-2}} \sum_{j=h}^{p-2} \binom{p-2}{j} (p-1)^{p-2-j}$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-2} \frac{p^h h!}{(p-1-h) \cdots (p-1-1)} \sum_{j=h}^{p-2} \frac{1}{j!} \frac{p-1-j}{p-1} \cdots \frac{p-1-1}{p-1} \\ &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-2} \frac{p^h}{(p-1)^h} \sum_{j=h}^{p-2} \frac{h!}{j!} \frac{p-1-j}{p-1-h} \cdots \frac{p-1-1}{p-1-1} \times \frac{1}{(p-1)^{j-h}} \\ &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-2-h} \left[1 + \frac{p-1-(h+1)}{(p-1)(h+1)} + \cdots + \frac{p-1-(h+1)}{(p-1)(h+1)} \cdots \frac{p-1-j}{(p-1)j} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{p-1-(h+1)}{(p-1)(h+1)} \cdots \frac{p-1-(p-2)}{(p-1)(p-2)}\right] \\ &> \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-2-h} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{p-2-h}. \end{aligned}$$

D'où facilement le résultat en considérant : $(p-2-h) \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) = -(p-2-h) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p^2} + \cdots\right) > -1 + \frac{1}{p}\left(h + \frac{3}{2}\right)$, tous les termes négligés étant positifs et tendant rapidement vers 0. \square

La constante $C_\infty(a)$ est voisine de $e^{-1} \approx 0.36788$, et pour $p \rightarrow \infty$ on peut écrire :

$$\text{Prob}\left(\left|\left\{z \in [2, p[, q_p(z) = 0\right\}\right| \geq h\right) \approx C_\infty(a) \times \frac{1}{p^h} \binom{p-2}{h} \approx O\left(\frac{1}{p^{\log_2(p)/\log(a)}}\right),$$

ordre de grandeur qui sera obtenu au niveau de la preuve du Théorème 4.9.

Par exemple, pour $a = 2$, $p = 100000007$, on obtient un rapport (effectivement majorant) de 0.3820 au lieu de 0.36788. Pour $p = 100003$ on obtient 0.3908. On a utilisé le programme suivant :

```
{a = 2; p = nextprime(10^3); print(p); h = floor(log(p)/log(a)); S = 0.0;
for(k = 1, p - 2 - h, S = (S + 1) * k / ((p - 1) * (p - 1 - k))); S = S + 1; print(exp(-1) * S)}
```

Exemple 4.7. *Donnons, sous les heuristiques précédentes, des calculs exacts de probabilités d'avoir au moins h solutions, où h est la partie entière de $\frac{\log(p)}{\log(a)}$ (ici avec $a = 2$) et où p est arbitrairement grand ; ceci correspondrait au cas où le quotient de Fermat de a serait nul pour une infinité de p et il convient de voir que c'est numériquement incompatible. On écrit alors cette probabilité sous la forme $\frac{1}{p^{1+\epsilon}}$:*

```
{p = nextprime(10^6); S = 0.0;
for(j = 0, log(p)/log(2), S = S + binomial(p - 2, j) * (1 - 1/p)^(p-2-j) / p^j);
print(p, " ", 1 - S, " ", -1 - log(1 - S)/log(p))}
```

$p = 101$	probabilité = 6.269×10^{-5}	$\epsilon = 1.097$
$p = 127$	probabilité = 6.655×10^{-5}	$\epsilon = 0.985$
$p = 10007$	probabilité = 4.473×10^{-12}	$\epsilon = 1.837$
$p = 200003$	probabilité = 6.059×10^{-17}	$\epsilon = 2.059$
$p = 1000003$	probabilité = 1.587×10^{-19}	$\epsilon = 2.133$

On confirmera dans la section suivante que cette probabilité est rapidement inférieure à $\frac{1}{p^2}$ et même que ϵ tend vers l'infini très lentement. Pour les petites valeurs de p , ϵ oscille autour de 1 et la dernière valeur de p pour laquelle $\epsilon < 1$ est $p = 127$.

4.2. Heuristique principale sur $q_p(a) = 0$. Soit maintenant $a \geq 2$ fixé. L'événement $q_p(a) = 0$ (où p assez grand est la variable aléatoire) est équivalent au suivant, où $h \geq 1$ est la partie entière de $\frac{\log(p)}{\log(a)}$:

Il existe au moins h entiers z_1, \dots, z_h de $[2, p[$ tels que $\lambda(z_j) = 0$ (i.e., $q_p(z_j) = 0$) pour $j = 1, \dots, h$, et il existe un indice j_0 tel que $z_{j_0} = a$.

Si $q_p(a) = 0$, l'existence des h éléments $z_j \in [2, p[$ tels que $\lambda(z_j) = 0$ avec $z_{j_0} = a$ en résulte trivialement ($z_j = a^j \in [2, p[$ pour $j = 1, \dots, h$). Inversement, sous l'existence de h éléments z_j tels que $\lambda(z_j) = 0$, la seule condition $\{z_1, \dots, z_h\}$ contient a entraîne $q_p(a) = 0$.

Remarque 4.8. L'existence de n valeurs $z_j \in [2, p[$ telles que $q_p(z_j) = 0$ ne dépend que de p (et de n) et non du choix d'un entier a (fait a posteriori). Ceci dit, il y a de fortes chances que ce soit dû à l'existence d'un $a \ll p$ tel que $q_p(a) = 0$. Cette dernière probabilité ($\{z_1, \dots, z_h\}$ contient a) est difficile à estimer, aussi nous la majorerons par 1 (si $a \notin \{z_1, \dots, z_h\}$, on obtient plus de h solutions, ce qui est peu probable).

Il est clair que les p pour lesquels le nombre n de solutions dans $[2, p[$ est très petit conduisent à $q_p(b) \neq 0$ pour tout $b < p^{\frac{1}{n+1}}$, $b \neq 1$ (cf. § 4.1).

Le cas de h solutions données par les puissances de a peut être considéré comme un cas très particulier (probabilité conditionnelle) du cas de h solutions indépendantes dont la probabilité reste $\frac{1}{p^{p-2}} \sum_{j=h}^{p-2} \binom{p-2}{j} (p-1)^{p-2-j}$. On obtient alors dans ce contexte (cf. Heuristique 4.3) $\text{Prob}(q_p(a) = 0) < \frac{\binom{p-2}{h}}{p^h}$ et $\text{Prob}(q_p(a) = 0) \approx C_\infty(a) \times \frac{\binom{p-2}{h}}{p^h}$ (cf. Lemme 4.6). Pour $p < a$, $h = 0$, et $\frac{\binom{p-2}{h}}{p^h} = 1$; donc il est préférable, dans l'optique de l'étude de la sommation sur p , d'utiliser la densité $\sum_{d|p-1} \frac{\varphi(d)^2}{p(p-1)^2}$ étudiée Section 3.

Théorème 4.9. *Soit $a \geq 2$. La série $\sum_{p \geq 2} \frac{\binom{p-2}{h}}{p^h}$, où h est la partie entière de $\frac{\log(p)}{\log(a)}$, est convergente.*

Démonstration. On a $\binom{p-2}{h} = \frac{1}{h!} \times (p-1-1) \cdots (p-1-h)$ que l'on peut majorer par $\frac{1}{h!} \times p^h$. En outre, on a par définition $\frac{\log(p)}{\log(a)} - 1 < h < \frac{\log(p)}{\log(a)}$. Pour tenir compte de ce fait et afin d'utiliser analytiquement $\frac{\log(p)}{\log(a)}$ au lieu de h dans les formules, on utilise la majoration $\sum_{p \geq 2} \frac{\binom{p-2}{h}}{p^h} < \sum_{p \geq 2} \frac{h}{h!}$, où l'on a remplacé $\frac{1}{h!}$ par le majorant $1/(\frac{\log(p)}{\log(a)} - 1)! = \frac{\log(p)}{\log(a)} / (\frac{\log(p)}{\log(a)})!$, h désignant maintenant $\frac{\log(p)}{\log(a)}$; d'où $\frac{h}{h!} = \frac{1}{\Gamma(h)}$. On a $h! = h \Gamma(h) = \sqrt{2\pi h} \times h^h e^{-h} \times (1 + O(\frac{1}{h}))$ et $\frac{h!}{h} = \sqrt{2\pi} \times h^{h-\frac{1}{2}} e^{-h} \times (1 + O(\frac{1}{h}))$.

$$\begin{aligned} \text{Or : } \log\left(\frac{h!}{h}\right) &= \log(\sqrt{2\pi}) + \left(h - \frac{1}{2}\right)\log(h) - h + \log\left(1 + O\left(\frac{1}{h}\right)\right) \\ &= \log(\sqrt{2\pi}) + h(\log(h) - 1) - \frac{1}{2}\log(h) + O\left(\frac{1}{h}\right) \\ &= \log(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{\log(a)}\log(p) \left(\log_2(p) - \log_2(a) - 1\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\log_2(p) - \log_2(a)\right) + O\left(\frac{1}{\log(p)}\right) \\ &= \left[\frac{1}{\log(a)} \left(\log_2(p) - \log_2(a) - 1\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\log(p)} \left(\log_2(p) - \log_2(a)\right) + \frac{O(1)}{\log(p)}\right] \log(p) =: Y \times \log(p). \end{aligned}$$

D'où $\frac{h}{h!} = \frac{1}{p^Y}$ où Y tend vers l'infini comme $\frac{\log_2(p)}{\log(a)}$. Par conséquent, il existe une constante $C > 1$ telle que Y est minorée par C pour tout $p \geq p_0$ assez grand et on peut écrire $\sum_{p \geq 2} \frac{\binom{p-2}{h}}{p^h} < C_0 + \sum_{p > p_0} \frac{1}{p^C}$, où C_0 est une constante égale à la sommation partielle jusqu'à p_0 ; d'où la convergence de la série initiale. \square

Heuristique 4.10. *Soit $a \geq 2$ fixé ; alors on a $\text{Prob}(q_p(a) = 0) \approx C_\infty(a) \times \frac{\binom{p-2}{h}}{p^h}$, où $C_\infty \approx 0.36788$, h est la partie entière de $\frac{\log(p)}{\log(a)}$, et dans le cadre du principe de Borel–Cantelli, le nombre de p tels que $q_p(a) = 0$ est majoré par la limite de la série $S := s_0 + \sum_{p > a} \frac{\binom{p-2}{h}}{p^h}$, où $s_0 \approx \sum_{p < a} \sum_{d|p-1} \frac{\varphi(d)^2}{p(p-1)^2} < \sum_{p < a} \frac{1}{p}$.*

Noter que la majoration utilisée pour le Théorème 4.9 est assez grossière car la série $\sum_{p \geq 2} \frac{1}{p^h} \binom{p-2}{h}$ converge vers 0.9578... (pour $a = 2$) tandis que $\sum_{p \geq 2} \frac{h}{h!}$ converge vers 6.2761... Par conséquent, la série de départ $\sum_{p \geq 2} \frac{1}{p^{p-2}} \sum_{j=h}^{p-2} \binom{p-2}{j} (p-1)^{p-2-j}$ converge vers $C_\infty(2) \times 0.9578... \approx 0.35237$. Ces constantes augmentent rapidement avec a .

Le fait que l'on puisse choisir C arbitrairement grande (à condition de sommer à partir d'un p_0 assez grand) montrerait la raréfaction des solutions pour $p \rightarrow \infty$.

Par exemple, si $a = 2$ et si l'on veut atteindre $C > 1$, il faut avoir $p_0 \geq 79$; pour $C > 2$, il faut $p_0 \geq 4259$. Pour $a = 3$, il faut respectivement $p_0 \geq 24527$ et $p_0 \geq 2669180065451$. Pour $a = 5$ et $C \approx 1.05$, $p_0 = 168116638259$ (peut-on y voir un rapport avec l'exemple (5, 188748146801) donné au § 3.7 ?).

Ces résultats sont obtenus avec le programme suivant qui concerne la série majorante $\sum_{p \geq p_0} \frac{h}{h!} \approx \sum_{p \geq p_0} \frac{1}{p^Y}$, donc les p_0 obtenus sont des majorants des bornes nécessaires pour avoir une série initiale convergente comme celle de terme général $\frac{1}{p^Y}$:

```
{a = 5; print(nextprime(solve(x = 10^2, 10^12,
(log(log(x)) - log(log(a)) - 1)/log(a) - (log(log(x)) - log(log(a)))/log(x^2) - 1.05))))}
```

Cette heuristique 4.10 donne une version sans doute trop favorable du problème, mais elle est assez bien vérifiée par l'expérimentation numérique. Le paragraphe suivant, qui utilise des résultats de densités, peut préciser cet aspect.

4.3. Etude à l'infini. D'après les résultats des §§ 2.3, 2.4, pour a fixé on est amené à étudier le produit infini formel $\tilde{\mathcal{P}}(a) := \prod_{m \geq 1} \tilde{\Phi}_m(a)$ qui est tel que tout nombre premier $p \nmid a$ en est un diviseur, à savoir $p \mid \tilde{\Phi}_m(a)$ pour l'unique indice $m = o_p(a)$ (cf. Lemmes 2.5, 2.6), et qui est tel que $q_p(a) \neq 0$ si et seulement si p^2 ne divise pas $\tilde{\mathcal{P}}(a)$. Pour étudier les $q_p(A)$ non nuls en termes de densités, on va considérer les densités des $A \in \mathbb{N}$ tels que $p^2 \nmid \tilde{\mathcal{P}}(A)$ (cf. Section 3).

Comme $p \mid \tilde{\mathcal{P}}(A)$ est équivalent à $p \mid \tilde{\Phi}_{o_p(A)}(A)$, la densité des $A \in \mathbb{N}$ tels que $p^2 \mid \tilde{\mathcal{P}}(A)$ est égale à $\frac{\varphi(o_p(A))}{p^2}$ et en sommant sur tous les ordres possibles $o_p(A)$ diviseurs de $p-1$, on obtient la densité $\frac{p-1}{p^2}$; la densité contraire ($p^2 \nmid \tilde{\mathcal{P}}(A)$) est égale à $D_p := 1 - \frac{p-1}{p^2} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}$. On note que ces p -densités sont indépendantes (en raison des propriétés des $\tilde{\Phi}_m(a)$) et que la densité correspondant à plusieurs p est donnée par le produit des densités locales (voir ci-dessous la Remarque 4.12).

Il convient d'étudier le produit $\prod_{p \leq x} D_p$ qui donne la densité des $A \in \mathbb{N}$ tels que $p^2 \nmid \tilde{\mathcal{P}}(A)$ pour tout $p \leq x$. Noter que seules les valeurs de m de la forme $o_p(A)$, pour un $p \leq x$, sont concernées dans le produit infini.

Ecrivons $1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right)$. On a :

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\log(x)} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)\right),$$

où $\gamma \approx 0,577215$ est la constante d'Euler (cf. [13], § I.1.6, formule de Mertens), et

$$\prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) \approx 1.9436,$$

d'où :

$$\prod_{p \leq x} D_p \approx \frac{1.9436 \times e^{-\gamma}}{\log(x)} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)\right) \approx \frac{1.09125}{\log(x)} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\log(x)}\right)\right).$$

On a donc le résultat analytique suivant :

Théorème 4.11. *La densité des $A \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ satisfaisant aux propriétés locales : “ $q_p(A) \neq 0$ pour tout premier $p \leq x$ ”, est de l'ordre de $\frac{O(1)}{\log(x)}$. De façon précise :*

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \left| \{A \leq y, q_p(A) \neq 0, \forall p \leq x\} \right| = \frac{O(1)}{\log(x)} \approx \frac{1.09125}{\log(x)}.$$

Remarque 4.12. De fait il existe un calcul direct de cette densité par dénombrement de type théorème chinois (cf. Remarque 3.12) avec cette fois des B_p^j tels que $q_p(B_p^j) \neq 0$, et ceci pour la suite des nombres premiers $p \leq x$. Si $y = \prod_{p \leq x} p^2$, un calcul standard montre que le nombre de $A \in [1, y[$ tels que $q_p(A) \neq 0$ pour tout $p \leq x$ est exactement $\prod_{p \leq x} (p^2 - p + 1)$, en notant que A est par nature non étranger à $\prod_{p \leq x} p$; d'où la densité précédente exacte sur les intervalles de la forme $[1, \prod_{p \leq x} p^2[$. Ceci constitue une importante vérification des résultats de la Section 3 et montre que la conjecture *ABC* n'est pas nécessaire dans ce cadre cyclotomique.

Bien que y doive être pris très grand par rapport à x , on peut tester la répartition des solutions sur de petits intervalles en utilisant le programme suivant :

```
{N = 0; y = 10^4; x = 10^7; A = 1; while(A <= y, A = A + 1; p = 0; q = 1;
while(p <= x & q! = 0, p = nextprime(p + 1); p2 = p^2;
Q = Mod(A, p2)^(p-1) - 1; q = component(Q, 2)); if(q! = 0, N = N + 1); print(N)}
```

Par exemple, pour $1 < A \leq y = 10^4$, on trouve 665 valeurs de A telles que $q_p(A) \neq 0$ pour tout $p \leq x = 10^7$. Or $10^4 \cdot \frac{1.09}{\log(10^7)} \approx 676$.

Du fait que le programme compte les plus petites solutions A à $q_p(A) \neq 0$ pour tout $p \leq x$, sans doute moins nombreuses², le résultat est assez satisfaisant. Prenons $x \approx 10^{10}$, accessible aux calculs ; on a $\frac{1.09}{\log(10^{10})} \approx 0.05$. Pour les entiers $A \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, il y en a 95% tels que $q_p(A) = 0$ pour au moins un $p \leq 10^{10}$. Ceci est compatible avec une heuristique de finitude ; les exemples de $a = 47$ et 72 semblent être intéressants de ce point de vue (cf. § 3.7).

Cette étude est de type “densité” et n’informe que très partiellement sur le cas d’une valeur a fixée une fois pour toutes.

4.4. Heuristique de finitude. On peut enfin envisager l’heuristique assez radicale suivante, en tenant compte des résultats du § 4.2 :

Heuristique 4.13. *Soit $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ un entier fixé. Le nombre de quotients de Fermat $q_p(a)$ nuls est en moyenne égal à 2 ou 3.*

Le programme suivant donne 2.76 solutions $p < 3 \times 10^9$ en moyenne pour $2 \leq a \leq 101$, et 2.80 solutions $p < 10^9$ pour $10^9 + 1 \leq a \leq 10^9 + 100$:

```
{N = 0; b = 1; B = 10^8; for(a = b + 1, b + 100, if(Mod(a, 4) == 1, N = N + 1));
p = 1; while(p < B, p = nextprime(p + 2); p2 = p^2;
for(a = b + 1, b + 100, Q = Mod(a, p2)^(p-1); if(Q == 1, N = N + 1)); print(N/100.0)}
```

² La relation $q_p(a) = 0$ engendre les solutions $a^j \in [2, p[$, $j = 1, \dots, h$, qualifiées d’exceptionnelles (cf. § 4.1.3), et qui sont ici décomptées des A telles que $q_p(A) \neq 0$, $\forall p \leq x$.

Le fait de cumuler une centaine de valeurs de a semble indispensable au vu de la répartition très incertaine des solutions p à $q_p(a) = 0$ pour un seul a .

L'expérimentation numérique (en dépit du fait que l'on a des phénomènes qui exigent des intervalles à croissance exponentielle) semble limiter le nombre de $q_p(a) = 0$ à quelques unités en moyenne portant en premier lieu sur de petits p (résultant de congruences du type $a \equiv 1 \pmod{p^2}$) puis éventuellement sur un petit nombre de grandes solutions, accessibles aux ordinateurs actuels, dont la probabilité serait de l'ordre de $\frac{1}{p^2}$ et tendrait rapidement vers 0 pour les très grands nombres premiers comme l'heuristique principale semble l'indiquer (cf. Heuristique 4.10, Théorème 4.9).

5. CONCLUSION

N'étant pas familier de la théorie analytique des nombres, j'ignore si l'on peut envisager des confirmations ou infirmations des heuristiques proposées.

L'Heuristique 3.9 est probablement très raisonnable, mais est insuffisante pour conclure à la finitude des p tels que $q_p(a) = 0$ (a fixé). Si elle est exacte, elle montre que la probabilité $\frac{1}{p}$, souvent admise, pose problème.

L'Heuristique 4.3, qui stipule l'existence d'une loi de probabilité binomiale pour $\text{Prob}(q_p(z) = 0)$, $z \in [2, p[$, reste le point sensible en raison de l'existence possible de nombres $a \ll p$ tels que $q_p(a^j) = 0$ pour $j = 1, \dots, h$, où h est la partie entière de $\frac{\log(p)}{\log(a)}$. Dans ce cas, l'abondance de solutions (car $a^j \in [2, p[$ pour $j = 1, \dots, h$) induit une répartition exceptionnelle des solutions qui peut être interprétée de deux façons : ou bien cette loi de probabilité n'est pas la bonne, ou bien il n'est pas possible que pour a fixé ($a = 2$ par exemple) on ait une infinité de solutions p à $q_p(a) = 0$ car alors pour ces premiers p le nombre de solutions $a_i \in [2, p[$ croît comme $O(1)\log(p)$, ce qui peut apparaître comme une proportion excessive.

Ceci dit, l'étude précédente, quoique très insuffisante, ainsi que les expérimentations numériques, me confortent dans la validité des conjectures que j'ai formulées dans le cadre très général des régulateurs p -adiques d'un nombre algébrique η (cas Galoisien arbitraire) pour lesquels le quotient de Fermat n'est autre que le cas particulier de la θ -composante, pour le caractère unité $\theta = 1$, du régulateur de η (cf. [3]).

6. REMERCIEMENTS

Je remercie Gérald Tenenbaum pour ses indications de théorie analytique des nombres, dont sa contribution [14], et pour sa disponibilité.

RÉFÉRENCES

- [1] R. Ernvall and T. Metsänkylä, On the p -divisibility of Fermat quotients, *Math. Comp.* 66 (1997), 1353–1365.
- [2] A. Granville, ABC allows us to count squarefrees, *Internat. Math. Res. Notices* 19 (1998)–991–1009.
- [3] G. Gras, Les θ -régulateurs locaux d'un nombre algébrique – Conjectures p -adiques (submitted), 2014. https://www.researchgate.net/publication/261794953_Les_theta-régulateurs_locaux_d%27un_nombre_algbrique_-_Conjectu
- [4] H. Graves and M.R. Murty, The *abc* conjecture and non-Wieferich primes in arithmetic progressions, *Journal of Number Theory* 133 (2013), 1809–1813. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X12003368>

- [5] K. Hatada, Mod 1 distribution of Fermat and Fibonacci quotients and values of zeta functions at $2 - p$, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* 36 (1987), 41–51.
Chi-square tests for mod 1 distribution of Fermat and Fibonacci quotients, *Sci. Rep. Fac. Educ., Gifu Univ., Nat. Sci.* 12 (1988), 1–2.
- [6] G. Helms, *Fermat-quotients, bibliographical references and tables*.
<http://go.helms-net.de/math/expdioph/fermatquotient/directory/index.htm>
- [7] W. Keller and J. Richstein, *Solutions of the congruence $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^r}$* , *Mathematics of Computation*, 74, 250 (2004), 927–936.
<http://www.ams.org/journals/mcom/2005-74-250/S0025-5718-04-01666-7/S0025-5718-04-01666-7.pdf>
- [8] P. Moree, *Artin's Primitive Root Conjecture – A Survey*, In: *The John Selfridge Memorial Volume*, *Integers*, Vol. 12, 6 (2012), 1305–1416.
<http://www.degruyter.com/view/j/integ.2012.12.issue-6/integers-2012-0043/integers-2012-0043.xml>
- [9] A. Ostafe and I.E. Shparlinski, Pseudorandomness and Dynamics of Fermat Quotients, *SIAM J. Discrete Math.*, 25(1), 50–71. <http://dx.doi.org/10.1137/100798466>
- [10] K. Belabas and al., *Pari/gp, Version 2.5.3*, Laboratoire A2X, Université de Bordeaux I.
<http://sagemath.org/>
- [11] J.H. Silverman, Wieferich's criterion and the *abc*-conjecture, *Journal of Number Theory* 30 (1988), 226–237. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022314X88900194>
- [12] I.E. Shparlinski, On Vanishing Fermat Quotients and a Bound of the Ihara Sum, *Kodai Math. J.* Volume 36, Number 1 (2013), 99–108. <http://projecteuclid.org/euclid.kmj/1364562722>
- [13] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3^e édition revue et augmentée, Coll. Échelles, Belin 2008.
<http://iecl.univ-lorraine.fr/~Gerald.Tenenbaum/ITAN08/>
- [14] G. Tenenbaum, *Divergence d'une série liée aux nombres premiers*, Communication privée (juin 2014). <https://www.researchgate.net/publication/263200414>
- [15] M. Waldschmidt, *Lecture on the abc conjecture and some of its consequences*, Abdus Salam School of Mathematical Sciences (ASSMS), Lahore 6th World Conference on 21st Century Mathematics (2013). <http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/abclahore2013VI.pdf>
- [16] L.C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, Graduate Texts in Math. 83, Springer enlarged second edition 1997.

VILLA LA GARDETTE, CHEMIN CHÂTEAU GAGNIÈRE, F-38520 LE BOURG D'OISANS.

E-mail address: g.mn.gras@wanadoo.fr *url:* https://www.researchgate.net/profile/Georges_Gras/?dbw=true

-- <http://monsie.orange.fr/math.g.mn.gras/>