HAL
open science

Guides d'ondes inhomogènes couplés par un réseau périodique de perforations : modes basse fréquence et interférence dans un réseau de longueur finie

Jean Kergomard, Marc Pachebat

To cite this version:

Jean Kergomard, Marc Pachebat. Guides d'ondes inhomogènes couplés par un réseau périodique de perforations : modes basse fréquence et interférence dans un réseau de longueur finie. Congrès Français d'Acoustique, Apr 2014, Poitiers, France. 293, papier N60. hal-01058161

HAL Id: hal-01058161

https://hal.science/hal-01058161v1

Submitted on 9 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Guides d'ondes inhomogènes couplés par un réseau périodique de perforations : modes basse fréquence et interférence dans un réseau de longueur finie

Jean Kergomard, Marc Pachebat

***Résumé*—La propagation dans deux guides d'ondes couplés périodiquement par des perforations est étudiée aux basses fréquences. Les outils classiques de propagation dans les milieux périodiques permettent d'établir analytiquement les expressions qui caractérisent une cellule élémentaire d'un réseau avec deux milieux de propagation différents (inhomogène) : la matrice de transfert, l'équation de dispersion et les modes propres du réseau. Ces résultats à caractère général sont ensuite utilisés pour décrire le cas où un des guides joue pour l'autre le rôle d'un traitement acoustique en paroi à réaction non locale. Dans le cas réciproque, on exprime également de façon analytique la matrice de transfert et la perte par insertion pour un réseau périodique inhomogène de longueur finie. A titre d'exemple, le cas de deux guides homogènes est étudié. Le modèle permet de proposer une interprétation de la perte par insertion d'un silencieux à tube perforé, basée le nombre de modes propres se propageant dans le réseau et leur interférence dans un réseau de longueur finie. Le caractère général des expressions obtenues devrait permettre d'explorer ultérieurement d'autres configurations, notamment pour des guides inhomogènes présentant un matériaux poreux et/ou un diaphragme dans les guides. Les applications concernent par exemple les silencieux automobiles ou les traitements acoustiques à réaction non locale (nacelles de turboréacteurs).**

I. Introduction

Ce travail vise à décrire la propagation acoustique aux basses fréquences dans un système de deux guides d'ondes couplés. Le couplage est réalisé de façon périodique, par des perforations latérales disposées régulièrement suivant la direction axiale des guides. Ce système de départ a été choisi afin de représenter à l'aide d'un modèle discret, des situations rencontrées en pratique comme dans les silencieux automobiles ou les entrées d'air de turboréacteurs. Après avoir établi un modèle analytique pour une cellule élémentaire du réseau puis pour un réseau de longueur finie, la dernière section montre comment celui-ci permet par exemple d'interpréter un résultat bien connu : la perte par insertion d'un silencieux à tube perforé. Le caractère général des expressions obtenues devrait permettre d'explorer ultérieurement d'autres configurations.

Dans le cas général, les milieux de propagation dans chacun des guides peuvent être différents (guides inhomogènes). Les outils classiques de propagation dans les milieux périodiques [1] permettent d'établir analytiquement les expressions qui caractérisent une cellule élémentaire du réseau inhomogène : matrice de transfert (section II), équation de dispersion et modes propres du réseau (section III). Le couplage entre les deux guides d'ondes est décrit de façon rigoureuse par une matrice perforation [2].

Ces résultats à caractère général sont ensuite utilisés pour décrire le cas où un des guides joue pour l'autre le rôle d'un traitement acoustique en paroi à réaction non locale. Un système réel est de longueur finie et ses conditions aux limites ont une grande influence sur ses performances de perte par insertion. Dans le cas réciproque, on obtient également de façon analytique la matrice de transfert pour un réseau inhomogène, périodique et de longueur finie. La matrice impédance, déduite de la matrice de transfert, permet ensuite d'introduire des conditions limites dans le réseau de façon simple, puis d'exprimer la perte par insertion correspondante (section V).

Enfin, ces résultats sont utilisés pour interpréter la perte par insertion d'un silencieux à tube perforé obtenue numériquement par Sullivan [3] (section VI). Dans ce cas particulier, les guides sont homogènes.

LMA CNRS UPR 7051 Ecole Centrale Marseille, Aix Marseille Univ F-13402 Marseille Cedex 20 France, e-mail : kergomard@lma.cnrs-mrs.fr, pachebat@lma.cnrs-mrs.fr.

II. Deux guides d'ondes couplés par des perforations

Le système de départ est constitué des deux guides d'ondes infinis couplés par des perforations latérales disposées régulièrement suivant la direction axiale des guides (fig.1). Dans cette section, la matrice de transfert d'une cellule élémentaire (de longueur $2l$) est établie.

En régime harmonique, en choisissant comme variables la pression et la vitesse acoustiques dans chaque guide (de sections S_1 et S_2), la relation entre les variables à gauche $\mathcal{U}_L$ aux variables à droite $\mathcal{U}_R$ d'une perforation peut être décrite de façon exacte par une matrice $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ d'ordre quatre **(author?)** [2] (en orientation antisymétrique) :

$$\mathcal{U}_L = \mathcal{P}_\mathcal{F} \;\; \mathcal{U}_R \,, \tag{1}$$

où la matrice perforation d'ordre quatre :

$$\mathcal{P}_\mathcal{F} = \begin{pmatrix} (\gamma_1 + \gamma_2 \mathbf{M}) & \gamma_2(\mathbf{I} - \mathbf{M}) \\ \gamma_1(\mathbf{I} - \mathbf{M}) & (\gamma_2 + \gamma_1 \mathbf{M}) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

introduit l'effet de l'impédance en série Z_a et l'admittance en parallèle Y_s de la perforation par les notations suivantes :

$$\gamma_{1,2} = \frac{S_{1,2}}{S_1 + S_2}, \;\; \mathbf{M} = \mathbf{I} + \frac{2 Z_a Y_s}{1 - Z_a Y_s} \begin{pmatrix} 1 & Y_s^{-1} \\ Z_a^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

et $\mathbf{I}$ est la matrice identité d'ordre 2.

Les vecteurs contenant les pressions et vitesses de chaque guide de part et d'autre de la perforations sont notés :

$$\mathcal{U}_{\mathrm{L,R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{1L,R} \\ \mathbf{U}_{2L,R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1L,R} \\ v_{1L,R} \\ p_{2L,R} \\ v_{2L,R} \end{pmatrix}.$$

La matrice perforation $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ est ensuite multipliée par une matrice de transfert d'ordre quatre décrivant la propagation dans chacun des guides afin de former une matrice de transfert d'une cellule symétrique du réseau, reliant le vecteur en x_{n+1} (cf. fig.1) avec le vecteur en x_n :

$$\mathcal{U}_{L,n} = \mathcal{P}_{\mathcal{F}}\mathcal{T} \ \ \mathcal{U}_{L,n+1}\,. \quad (3)$$
$$(\text{et aussi } \mathcal{U}_{\mathrm{R},n} = \mathcal{T}\,\mathcal{P}_{\mathcal{F}} \ \ \mathcal{U}_{R,n+1})$$

La matrice de transfert décrivant la propagation entre 2 perforations s'écrit en toute généralité :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{R}}\mathcal{T}_{\mathcal{L}}. \quad (4)$$

où $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ représentent les matrices des transfert d'ordre quatre dans les portions de conduit de longueur l à droite ou à gauche d'une perforation :

$$\mathcal{T}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{1L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{2L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1L} & B_{1L} & 0 & 0 \\ C_{1L} & D_{1L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{2L} & B_{2L} \\ 0 & 0 & C_{2L} & D_{2L} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

et des notations similaires pour $\mathcal{T}_R$.

Dans la suite, une représentation symétrique de la cellule élémentaire sera également utile. Elle donne les pressions et vitesse en $x_n + l$ en fonction des mêmes quantités en $x_{(n+1)} + l$ de la façon suivante (cf. fig.1) :

$$\mathcal{U}_n = (\mathcal{T}_L\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}_R) \ \ \mathcal{U}_{n+1}\,. \quad (6)$$

Les expressions de $\mathcal{T}_L$ et $\mathcal{T}_R$ sont générales. Par conséquent milieux de propagation des guides 1 et 2 peuvent ici décrire des situations variées comportant par exemple des discontinuités (cf. par ex.[4]).

III. Vecteurs propres du réseau dans le cas général

Dans cette section, on cherche à écrire matrice $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ d'une cellule élémentaire sous forme diagonale :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\mathcal{T} = \mathcal{E}\mathcal{D}\mathcal{E}^{-1} \quad (7)$$

où :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{(4)} \end{pmatrix}; \quad (8)$$

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_L^{(1)} & \mathcal{W}_L^{(2)} & \mathcal{W}_L^{(3)} & \mathcal{W}_L^{(4)} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Par ce biais, on obtient dans ce qui suit deux expressions générales. La première est celle de l'équation de dispersion du réseau. L'expression 15 est une généralisation de l'équation de dispersion pour une cellule symétrique (46) de [2]. La seconde est l'expression des vecteurs propres du réseau.

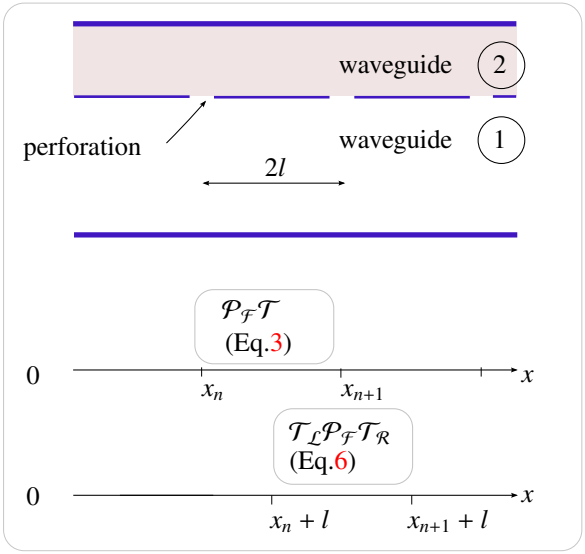

Figure 1: Réseau périodique de deux guides d'ondes couplés, et matrices de transfert asymétrique et symétrique associées à une cellule élémentaire du réseau

Les valeurs propres $\lambda^{(i)}$ et vecteurs propres $\mathcal{W}_L^{(i)}$ (i=1 .. 4) de la matrice asymétrique $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\mathcal{T}$ d'une cellule élémentaire, sont obtenues par résolution de l'équation d'ordre quatre :

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}\mathcal{T} - \lambda\mathcal{I})\mathcal{W}_L = \mathcal{O}\,, \quad (10)$$

où $\mathcal{I}$ est la matrice identité d'ordre quatre et $\mathcal{O}$ le vecteur nul d'ordre quatre. Plutôt que de résoudre directement l'équation d'ordre quatre [2], on peut montrer que, grâce à la structure par blocs des matrices perforation (éq.2) et de propagation (éq.4), l'équation 10 peut se ramener à une équation à l'ordre deux du type :

$$\mathbf{T}_0\mathbf{W}_0 = \mathbf{0}\,, \quad (11)$$

où $\mathbf{0}$ est le vecteur nul d'ordre deux, avec

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{I} + \mathbf{K} + 2\lambda\left[\gamma_2(\mathbf{T}_1 - \lambda\mathbf{I})^{-1} + \gamma_1(\mathbf{T}_2 - \lambda\mathbf{I})^{-1}\right], \quad (12)$$
$$\mathbf{W_0} = \gamma_1(\mathbf{T}_1 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{W}_{1L} = -\gamma_2(\mathbf{T}_2 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{W}_{2L}\,, \quad (13)$$
$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & Y_s^{-1} \\ Z_a^{-1} & \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{W}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{1L} \\ \mathbf{W}_{2L} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Les quatre valeurs propres $\lambda^{(i)}$ (i = 1..4) du réseau couplé annulent le déterminant de la matrice $\mathbf{T}_0$ d'ordre deux :

$$det\,\mathbf{T}_0 = A_0C_0 - B_0C_0 = 0 \quad (15)$$

où l'expression 12 permet d'écrire :

$$A_0 = 1 + 2\lambda\left[\frac{\gamma_2(D_1 - \lambda)}{\Delta_1} + \frac{\gamma_1(D_2 - \lambda)}{\Delta_2}\right], \quad (16)$$
$$D_0 = 1 + 2\lambda\left[\frac{\gamma_2(A_1 - \lambda)}{\Delta_1} + \frac{\gamma_1(A_2 - \lambda)}{\Delta_2}\right], \quad (17)$$
$$B_0 = \frac{1}{Y_s} - 2\lambda\left[\gamma_2\frac{B_1}{\Delta_1} + \gamma_1\frac{B_2}{\Delta_2}\right], \quad (18)$$
$$\text{et } C_0 = \frac{1}{Z_a} - 2\lambda\left[\gamma_2\frac{C_1}{\Delta_1} + \gamma_1\frac{C_2}{\Delta_2}\right], \quad (19)$$

avec

$$\Delta_{1,2} = \det(\mathbf{T}_{1,2} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \lambda(A_{1,2} + D_{1,2}) + \det \mathbf{T}_{1,2}\,.$$

Les coefficients $A_{1,2}\,, B_{1,2}\,, C_{1,2}\,, D_{1,2}$ des matrices $\mathbf{T}_{1,2}$ correspondent aux blocs diagonaux de la matrice de transfert $\mathcal{T}$ entre 2 perforations (cf. éq.4). Si comme dans la section suivante, on ignore sur les perforations les modes antisymétriques ($Z_a = 0$), l'équation de dispersion (15) prend alors plus simplement la forme $B_0 = 0$.

Afin de satisfaire l'équation 11, on construit les vecteurs d'ordre 2 $\mathbf{W_0}$ de la façon suivante :

$$\mathbf{W}_0^{(i)} = v_0 \begin{pmatrix} w_0^{(i)} \\ -1 \end{pmatrix}, \ (i = 1, 4). \tag{20}$$

où v_0 est une constante arbitraire ayant la dimension d'une vitesse, et $w_0^{(i)}$ est une impédance associée chacune des valeurs propres $\lambda^{(i)}$ telle que :

$$w_0^{(i)} = \frac{B_0^{(i)}}{A_0^{(i)}} = \frac{D_0^{(i)}}{C_0^{(i)}}\,. \tag{21}$$

Ignorer sur les perforations les modes antisymétriques, $Z_a = 0$ implique directement $w_0^{(i)}$=0 , (i = 1..4). Dans le cas général, en reportant l'expression de $\mathbf{W}_0$ dans l'équation 13 il vient pour chacune des quatre colonnes de la matrice $\mathcal{E}$ (éq.9) des vecteurs propres :

$$\mathcal{W}_L^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{1L}^{(i)} \\ \mathbf{W}_{2L}^{(i)} \end{pmatrix} \ (i = 1, 4)\,, \tag{22}$$

avec

$$\mathbf{W}_{1L}^{(i)} = \frac{v_0}{\gamma_1 \Delta_1} \begin{pmatrix} w_0^{(i)}\left[D_1 - \lambda^{(i)}\right] + B_1 \\ -w_0^{(i)} C_1 - \left[A_1 - \lambda^{(i)}\right] \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\mathbf{W}_{2L}^{(i)} = -\frac{v_0}{\gamma_2 \Delta_2} \begin{pmatrix} w_0^{(i)}\left[D_2 - \lambda^{(i)}\right] + B_2 \\ -w_0^{(i)} C_2 - \left[A_2 - \lambda^{(i)}\right] \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Les quatre valeurs propres satisfaisant l'équation de dispersion 11 ainsi que les quatre vecteurs propres 22 sont valables dans le cas général. Les matrices de transfert $\mathbf{T}_{1,2}$ de chacun des guides peuvent représenter la propagation dans des géométries non-retournables (asymétriques). De même les matrices de transfert $\mathbf{T}_{1,2}$ peuvent être non réciproques ce qui inclut le cas d'un écoulement moyen présent dans un ou l'autre guide.

IV. Matrice de transfert du réseau réciproque de n cellules

Adopter l'hypothèse de réciprocité permet de simplifier les expressions afin d'aborder de façon analytique le cas d'un réseau de longueur finie et obtenir la matrice de transfert pour un nombre fini n de cellules.

La première étape consiste à obtenir la matrice de transfert d'ordre quatre du réseau de la figure 2 reliant les variables (pressions et vitesses) à droite du système $\mathcal{U}_n$ aux variables à gauche $\mathcal{U}_0$:

$$\mathcal{U}_0 = (\mathcal{T}_L \mathcal{P}_\mathcal{F} \mathcal{T}_\mathcal{R})^{\mathrm{n}} \mathcal{U}_{\mathrm{n}}$$

que l'on peut reformuler en utilisant l'égalité $\mathcal{T} = \mathcal{T}_R \mathcal{T}_L$ comme :

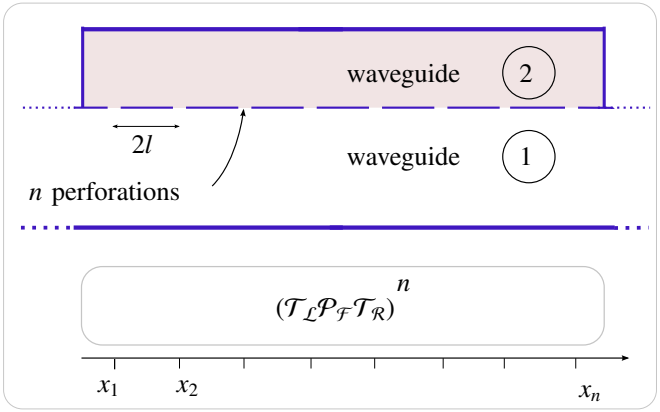

Figure 2: Réseau fini de deux guides d'ondes couplés

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \mathcal{T}_L (\mathcal{P}_\mathcal{F} \mathcal{T})^{\mathrm{n}} \mathcal{T}_\mathcal{L}^{-1} \mathcal{U}_{\mathrm{n}} \\ &= (\mathcal{T}_L \mathcal{E}) \mathcal{D}^{\mathrm{n}} (\mathcal{T}_\mathcal{L} \mathcal{E})^{-1} \mathcal{U}_{\mathrm{n}} \end{aligned} \tag{25}$$

L'expression des matrices $\mathcal{D}$ et $(\mathcal{T}_L\mathcal{E})$ et obtenue en reformulant les résultats de la section précédente dans le cas réciproque. La réciprocité du réseau signifie que la matrice de transfert d'une cellule du réseau doit être unitaire :

$$\det(\mathcal{P}_\mathcal{F}\mathcal{T}) = \det(\mathcal{E}\mathcal{D}\mathcal{E}^{-1}) = 1\,,$$

ce qui induit que les valeurs propres de $\mathcal{D}$ peuvent être groupées par paires inverse l'une de l'autre $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = (\lambda, 1/\lambda)$ et $(\lambda^{(3)}, \lambda^{(4)}) = (\lambda', 1/\lambda')$. La réciprocité d'une cellule du réseau nécessite de plus la réciprocité des matrices de transfert $\mathbf{T}_{1,2}$ soit aussi det$\mathbf{T}_{1,2}$ = 1, condition qui impose également que les matrices $\mathbf{T}_{1,2}$ représentent des biportes retournables (ou symétriques) tels que $A_{1,2} = D_{1,2}$.

Dans le but de simplifier les expressions, les modes antisymétriques sur les perforations sont ignorés ($Z_a = 0$), hypothèse raisonnable aux basses fréquences [2]. Grâce à la propriété de réciprocité reliant deux à deux les vecteurs propres de la matrice $\mathcal{E}$, et grâce au caractère diagonal par bloc de la matrice de transfert $\mathcal{T}_L$, on peut vérifier (après quelques manipulations) que la matrice d'ordre quatre $\mathcal{T}_L\mathcal{E}$ prend la forme d'un produit de matrices dont les blocs d'ordre deux sont diagonaux :

$$\mathcal{T}_L\mathcal{E} = 4v_0 \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}'_1 \\ -\mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}' \end{pmatrix}^{-1/2}, \tag{26}$$

avec $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} e^{\Gamma} & 0 \\ 0 & e^{-\Gamma} \end{pmatrix}$,

$\mathbf{H}_{1,2} = \begin{pmatrix} h_{p1,2} & 0 \\ 0 & h_{v1,2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}'_i = \begin{pmatrix} h'_{p1,2} & 0 \\ 0 & h'_{v1,2} \end{pmatrix}$ et

$$h_{p1,2} = \frac{B_{R1,2}\cosh(\Gamma/2)}{\gamma_{1,2}(\cosh\Gamma - A_{1,2})}\,,\ h_{v1,2} = \frac{A_{R1,2}\sinh(\Gamma/2)}{\gamma_{1,2}(\cosh\Gamma - A_{1,2})}\,,$$

$$h'_{p1,2} = \frac{B_{R1,2}\cosh(\Gamma'/2)}{\gamma_1(\cosh\Gamma' - A_{1,2})}\,,\ h'_{v1,2} = \frac{A_{R1,2}\sinh(\Gamma'/2)}{\gamma_1(\cosh\Gamma' - A_{1,2})}$$

L'expression 26 insérée dans l'égalité 25 donne alors la

Nb. cellules élémentaires	n	30	
Nb. perforations par cellule	n_s	6	
Lg. cellule élémentaire	$2l$	$8.5\,10^{-3}$	(m)
Rayon guide 1	r_1	$2.54\,10^{-2}$	(m)
Rayon guide 2	r_2	$5.08\,10^{-2}$	(m)
Rayon perforation	r_s	$1.25\,10^{-3}$	(m)
Taux d'ouverture écran	σ	2.1	(%)

TABLE I: Paramètres géométriques du réseau périodique

matrice de transfert du réseau de la figure 2 :

$$\mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}'_1 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}'_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}'_\mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}'_1 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}'_2 \end{pmatrix}^{-1} \mathcal{U}_n \tag{27}$$

avec :

$$\mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} \cosh n\Gamma & \sinh n\Gamma \\ \sinh n\Gamma & \cosh n\Gamma \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{T}'_n = \begin{pmatrix} \cosh n\Gamma' & \sinh n\Gamma' \\ \sinh n\Gamma' & \cosh n\Gamma' \end{pmatrix}.$$

V. Matrice impédance et perte d'inser-tion du réseau de n cellules

Afin d'imposer les conditions aux limites qui ferment le guide 2 à chaque extrémité du système (cf. fig.2), on choisit connaissant matrice de transfert (éq. 27) d'exprimer la matrice impédance $\mathcal{Z}_n$ du réseau. En choisissant une représentation pression-débit orientée symétriquement (entrant-entrant), On admettra peut montrer (après quelques manipulations) que la matrice impédance $\mathcal{Z}_n$, reliant le vecteur débit ${}^t\begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 & ,\mathbf{U}_n \end{pmatrix}$ au vecteur pression ${}^t\begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & ,\mathbf{P}_n \end{pmatrix}$ prend la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_p\mathbf{C}_n\mathbf{S}_n^{-1}\mathbf{H}_v^{-1}\mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{H}_p\mathbf{S}_n^{-1}\mathbf{H}_v^{-1}\mathbf{\Sigma}^{-1} \\ \mathbf{H}_p\mathbf{S}_n^{-1}\mathbf{H}_v^{-1}\mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{H}_p\mathbf{S}_n^{-1}\mathbf{C}_n\mathbf{H}_v^{-1}\mathbf{\Sigma}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_n \end{pmatrix},$$

avec :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} S_1 v_1 \\ S_2 v_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_p = \begin{pmatrix} h_{p1} & h'_{p1} \\ h_{p2} & h'_{p2} \end{pmatrix}, \mathbf{H}_v = \begin{pmatrix} h_{v1} & h'_{v1} \\ h_{v2} & h'_{v2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} \cosh n\Gamma & 0 \\ 0 & \cosh n\Gamma' \end{pmatrix}, \mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} \sinh n\Gamma & 0 \\ 0 & \sinh n\Gamma' \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice impédance est bien adaptée pour fermer (vitesse nulle) le guide 2 à chaque extrémité du réseau (cf. fig.2). La matrice impédance du système est alors réduite de l'ordre quatre à d'ordre deux :

$$\begin{pmatrix} p_{1,0} \\ p_{1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_A & Z_B \\ Z_B & Z_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 v_{1,0} \\ S_1 v_{1,n} \end{pmatrix}, \tag{28}$$

avec

$$\begin{aligned} Z_A &= \left[\mathbf{H}_p\mathbf{C}_n\mathbf{S}_n^{-1}\mathbf{H}_v^{-1}\mathbf{\Sigma}^{-1}\right]_{11} \\ &= \left[Z_c \coth n\Gamma + Z'_c \coth n\Gamma'\right], \end{aligned} \tag{29}$$

et

$$\begin{aligned} Z_B &= \left[\mathbf{H}_p\mathbf{S}_n^{-1}\mathbf{H}_v^{-1}\mathbf{\Sigma}^{-1}\right]_{11} \\ &= \left[Z_c/\sinh n\Gamma + Z'_c/\sinh n\Gamma'\right] \end{aligned}. \tag{30}$$

Z et Z' sont deux impédances telles que

$$Z_c = \frac{1}{S_1}\frac{B_{1R}}{A_{1R}}\frac{(\cosh\Gamma - A_2)(\cosh\Gamma' - A_1)}{(\cosh\Gamma - \cosh\Gamma')(A_2 - A_1)}\coth\left(\frac{\Gamma}{2}\right), \tag{31}$$

et

$$Z'_c = \frac{1}{S_1}\frac{B_{1R}}{A_{1R}}\frac{(\cosh\Gamma' - A_2)(\cosh\Gamma - A_1)}{(\cosh\Gamma - \cosh\Gamma')(A_2 - A_1)}\coth\left(\frac{\Gamma'}{2}\right). \tag{32}$$

On peut donc ré-écrire la matrice impédance du réseau de longueur finie (éq.28) sous la forme d'une somme des contribution de chacun des modes propres du réseau :

$$\begin{pmatrix} p_{1,0} \\ p_{1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p'_0 \\ p'_n \end{pmatrix}, \tag{33}$$

avec

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_c \coth n\Gamma & Z_c/\sinh n\Gamma \\ Z_c/\sinh n\Gamma & Z_c \coth n\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 v_{1,0} \\ S_1 v_{1,n} \end{pmatrix},$$

et de même pour ${}^t(p'_0\ p'_n)$ avec Z'_c et Γ'. Cette écriture permet d'interpréter Z_c et Z'_c comme des impédances caractéristiques associées aux constantes de propagation de chacun des modes Γ et Γ'.

Afin de caractériser le système de longueur finie, on peut d'une part exprimer sa matrice de transfert d'ordre deux (en revenant à une orientation antisymétrique) à partir de l'équation 28 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{1,0} \\ S v_{1,0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_s & B_s \\ C_s & A_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ S_1 v_{1,n} \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{Z_B} \begin{pmatrix} Z_A & (Z_B^2 - Z_A^2) \\ -1 & Z_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 v_0 \\ S_1 v_n \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{34}$$

ainsi que la perte par insertion, dans un conduit infini d'impédance caractéristique Z_{c1} :

$$IL = 10\log_{10}\frac{1}{4}\left|2A_s + B_s/Z_{c1} + C_s Z_{c1}\right|^2. \tag{35}$$

VI. Exemple d'un silencieux à tube perforé [3]

Dans le cas particulier abordé par Sullivan [3], le réseau est une chambre d'expansion comportant un écran perforé. Les guides 1 et 2 sont alors homogènes (même milieu de propagation). La configuration géométrique de Sullivan correspond aux conditions aux limites de la fig.2 et à la perte d'insertion donnée par l'éq.35. Le caractère homogène permet de simplifier les expressions et d'écrire pour les coefficient de la matrice de transfert entre deux perforations $A_1 = A_2 = A$ et $B_1 = B_2 = B$.

L'équation de dispersion $B_0 = 0$ (cf. éq.18 et [5]) se factorise alors sous la forme :

$$(\cosh\Gamma - A)(\cosh\Gamma - A - Y_s B) = 0.$$

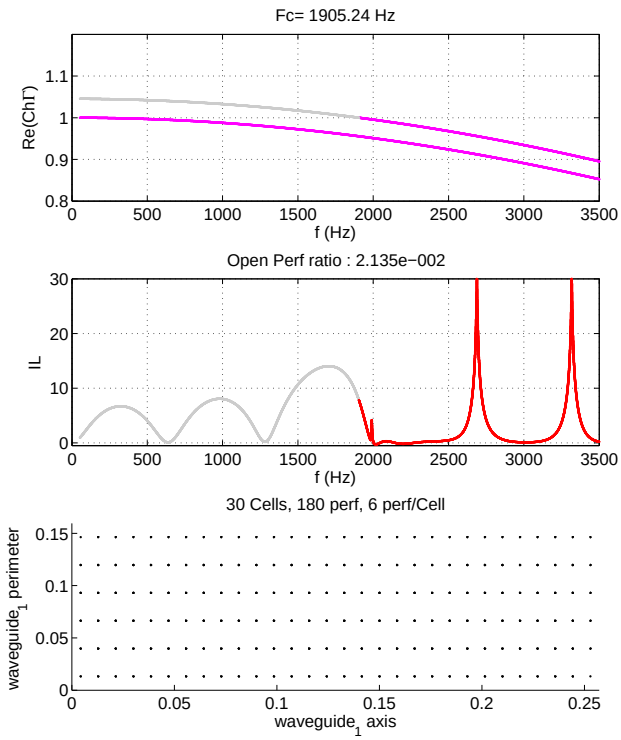

FIGURE 3: Constantes de propagation d'une cellule du réseau $\cosh\Gamma$ et $\cosh\Gamma'$ (en haut) ; Perte par insertion du réseau de longueur finie (au centre), la bande à deux modes propagatifs (en gris foncé ou bien en rouge pour la version couleur) comporte des maximums résonnants qui résultent de l'interférence du mode plan et du mode flûte ; Configuration géométrique des perforations suivant l'axe et le périmètre du guide central (en bas) . Cas correspondant à la fig.10c dans Sullivan [3].

Les 2 modes propres du réseau périodique sont le mode plan $\cosh\Gamma = A = \cos 2kl$ et le mode flûte [2] :

$$\cosh\Gamma' = A + Y_s B, \quad (36)$$
$$= \cos 2kl + j\rho c Y_s \sin 2kl\,. \quad (37)$$

Ce mode flûte correspond aux résultats donnés dans le cadre d'un modèle continu dans [6] (éq.7-7.14) et dans [7] (éq.9). En plus d'être évanescent en basse fréquence ($\cosh\Gamma' > 1$), il diffère du mode plan car il comporte des pressions dans les guides 1 et 2 de même amplitude mais en opposition de phase.

Au delà de la première fréquence de coupure le mode flûte devient lui aussi propagatif. La coupure est donnée (en ignorant les pertes) par $\cosh\Gamma' = 1$, soit aussi :

$$\frac{1}{Y_s} = j\rho c \cot kl\,. \quad (38)$$

Cette fréquence de coupure résulte de l'équation de dispersion de la cellule élémentaire du réseau périodique. Elle est déterminée uniquement par les propriétés de la cellule élémentaire et ne dépend pas du nombre de cellules ni des conditions aux limites imposées pour réaliser un système de longueur

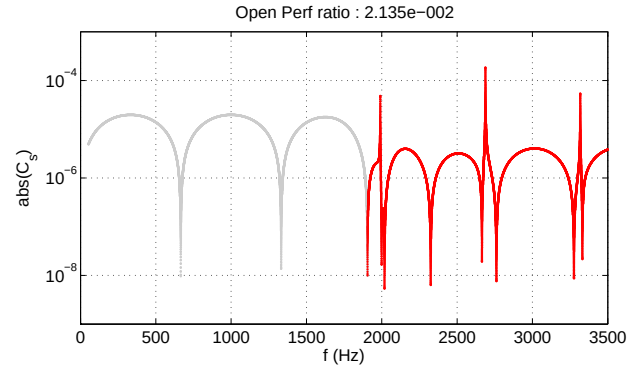

FIGURE 4: Module du terme d'admittance C_s de la matrice de transfert du système (éq.34) . La bande à deux modes propagatifs (en gris foncé ou bien en rouge pour la version couleur) comporte des maximums résonnants qui résultent de l'interférence du mode plan et du mode flûte.

finie. Dans le cas homogène, en utilisant l'égalité $\coth\Gamma/2 = \sqrt{\cosh\Gamma + 1}/\sqrt{\cosh\Gamma - 1}$, les impédances caractéristiques des modes propres (éqs. 31 et 32) donnent pour le mode plan :

$$Z_c = \frac{1}{S_1}\frac{B_R}{A_R}\coth\Gamma/2 = \frac{1}{S_1}\frac{B_R}{A_R}\sqrt{\frac{A+1}{A-1}} = \frac{1}{S_1}\sqrt{\frac{B_R}{C_R}} = \frac{\rho c}{S_1},$$

et pour le mode flûte :

$$Z'_c = \frac{1}{S_1}\frac{B_R}{A_R}\coth\Gamma'/2 = \frac{1}{S_1}\frac{B_R}{A_R}\sqrt{\frac{A+Y_sB+1}{A+Y_sB-1}} = \frac{\rho c}{S_1}\sqrt{\frac{1+j\rho c Y_s \tan kl}{1+j\rho c Y_s \cot kl}}\,. \quad (39)$$

L'admittance Y_s décrivant les perforations s'écrit [2] :

$$Y_s = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right)\frac{n_s}{Z_p}\,,$$

où Z_p est une impédance acoustique (pression/débit) d'une perforation et n_s le nombre de perforations présentes dans une cellule. Sauf pour des perforations très rapprochées, l'impédance d'une perforation peut-être considérée comme indépendante de n_s. Nous choisissons l'expression simple suivante :

$$Z_p = \frac{j\omega\rho}{r_s}\,,$$

où r_s est le rayon d'une perforation (cf. tab.I). Le taux d'ouverture de l'écran (tableau I) est défini ici par $\sigma = n_s r_s^2/(4l\,r_1)$.

L'approche analytique présentée ici permet de proposer une interprétation des résultats de Sullivan [3]. La fig.3 (bas) représente la configuration géométrique de l'écran perforé utilisée pour retrouver ici le résultat ([3], fig.10c) que Sullivan a obtenu numériquement par multiplication de matrices de transfert.

En basse fréquence, l'admittance Y_s est très grande et l'impédance caractéristique Z'_c du mode flûte (éq.39) est très petite. Le

mode flûte ne contribue pas à la matrice impédance du système (terme ${}^t(p'_0\, p'_n)$ négligeable dans l'éq.33). Seul le mode plan est mis à contribution, avec des pressions égales dans les guides 1 et 2. Il n'y a pas de débit dans les perforations de l'écran, qui n'a pas d'effet. En dessous de la fréquence de coupure donnée par l'équation 38, la perte par insertion est celle d'une chambre d'expansion sans écran perforé (en gris clair sur la fig.3 (centre)) . Comme attendu, elle est minimale pour les fréquences associées aux modes longitudinaux du système de longueur finie, données par l'annulation du terme d'admittance de la matrice de transfert (le mode flûte est ignoré) :

$$\frac{1}{Z_B} = \frac{\sinh n\Gamma}{Z_c} = 0\,, \tag{40}$$

ce correspond au multiples de la fréquence $f_L = c/2L$ où $L = (2l)\,n$ est la longueur totale de la cavité.

La fréquence de coupure du mode flûte (éq.38) est illustrée sur la fig.3 (haut). Elle permet de relier directement le nombre de modes propagatifs dans le réseau au changement de comportement de la perte d'insertion de la chambre d'expansion comportant un écran perforé.

Au delà de cette coupure (en gris foncé ou bien en rouge pour la version couleur sur la fig.3 (centre)), les deux modes sont propagatifs et la perte d'insertion présente des maximums plus ou moins marqués pour f proche de 2000, 2688 et 3318 Hz . Comme remarqué par Sullivan ces fréquences ne sont pas des multiples de f_L (éq.40). En effet $3f_L$, $4f_L$ et $5f_L$ donnent respectivement 2000, 2667 et 3334 Hz.

A ces maximums de la perte par insertion correspondent des maximums du terme d'admittance C_s dans l'expression de la matrice de transfert du système (cf. éq.34 et fig.4) donné par :

$$\frac{\sinh n\Gamma}{Z_c} + \frac{\sinh n\Gamma'}{Z'_c} = 0, \tag{41}$$

condition qui diffère de l'équation 40 dès que le mode flûte ne peut plus être ignoré. Un maximum résonnant du terme d'admittance C_s, dont l'amplitude dépend des phénomènes de dissipation, peut apparaitre si deux modes sont propagatifs dans le réseau. En écrivant la perte d'insertion d'un résonateur branché :

$$IL_{res} = 10log_{10}(1+1/\left|Z_e^2\right|)\,,$$

où

$$Z_e = j\beta(\omega_r/\omega - \omega/\omega_r) \tag{42}$$

est l'impédance d'entrée du résonateur, on peut vérifier que les paramètres $\beta = 20$ et f_r =2688 et 3318 Hz dans l'expression 42 fournissent une très bonne approximation de la perte par insertion (fig.3 (centre)) au voisinage des fréquences f =2688 et 3318 Hz où la condition de l'équation 41 est réalisée. L'apparition de ce caractère résonnant est dû à la participation du mode flûte qui contrairement au mode plan impose une différence de pression, et donc un débit acoustique, à travers l'écran perforé.

VII. Conclusion

Les outils classiques de propagation dans les milieux périodiques permettent d'établir analytiquement les expressions qui caractérisent une cellule élémentaire du réseau inhomogène : matrice de transfert, équation de dispersion et modes propres du réseau. Dans le cas réciproque, on obtient également de façon analytique la matrice de transfert et la perte par insertion pour un réseau inhomogène, périodique et de longueur finie.

A titre d'exemple, le modèle est utilisé pour interpréter un cas bien connu de deux guides d'ondes homogènes : la perte par insertion d'un silencieux à tube perforé. Dans ce cas, la perte par insertion est pilotée par deux phénomènes.

Le premier est lié aux propriétés de la cellule élémentaire du réseau périodique, qui fixent la fréquence de coupure au delà de laquelle le second mode propre du réseau (appelé mode flûte) devient propagatif. En dessous de cette coupure seul le premier mode propre se propage (mode plan) ; les deux guides couplés se comportent comme un guide unique, *i.e.* une simple chambre d'expansion sans écran perforé.

Au dessus de cette coupure le second mode propre du réseau (mode flûte) est lui aussi propagatif et impose un débit acoustique à travers les perforations de l'écran. La perte par insertion change alors de nature : on montre comment l'interférence des deux modes propagatif du réseau produit des résonances dont les fréquences dépendent de la longueur totale et des conditions aux limites du réseau.

Le caractère général des expressions obtenues devrait permettre d'explorer ultérieurement d'autres configurations, notamment pour des guides inhomogènes présentant un matériaux poreux et/ou un diaphragme dans les guides.

References

[1] L. Brillouin and M. Parodi. *Propagation des ondes dans les milieux périodiques*. Masson et Cie, Dunod, Paris, 1956.

[2] J. Kergomard, A. Khettabi, and X. Mouton. Propagation of acoustic waves in two wave guides coupled by perforations i : Theory. *Acta Acustica*, 2:1–16, 1994.

[3] J.W. Sullivan and M.J. Crocker. Analysis of concentric-tube resonators having unpartitioned cavities. *Journal of the Acoustical Society of America*, 64(1):207–215, 1978.

[4] U. Ingard and D. Pridmore-Brown. Propagation of sound in a duct with constrictions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 6:689–694, 1951.

[5] Marc Pachebat and Jean Kergomard. Interférences de deux modes propagatifs aux basses fréquences dans des conduits couplés par des perforations périodiques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 326(12):881–886, 1998.

[6] A.D. Pierce. *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. The Acoustical Society of America, New York, second printing edition, 1991.

[7] Y. Aurégan, A. Debray, and R. Starobinski. Low frequency sound propagation in a coaxial cylindrical duct : application to sudden area expansions and to dissipative silencers. *Journal of Sound and Vibration*, 243(3):461–473, June 2001.