



**HAL**  
open science

## Vérification et validation de modèles dédiées à des quantités d'intérêt

Ludovic Chamoin, Pierre Ladevèze, Florent Pled

► **To cite this version:**

Ludovic Chamoin, Pierre Ladevèze, Florent Pled. Vérification et validation de modèles dédiées à des quantités d'intérêt. 11ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA 2013), May 2013, Giens, France. pp.1-8. hal-01057232

**HAL Id: hal-01057232**

**<https://hal.science/hal-01057232v1>**

Submitted on 21 Aug 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

## Vérification et validation de modèles dédiées à des quantités d'intérêt

Ludovic CHAMOIN<sup>1</sup>, Pierre LADEVEZE<sup>1</sup>, Florent PLED<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMT-Cachan (ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6), {chamoin,ladeveze,pled}@lmt.ens-cachan.fr

---

**Résumé** — Nous présentons une démarche générale, basée sur les concepts de problème adjoint et d'erreur en relation de comportement, visant à construire des modèles de simulation optimisés pour la prédiction de quantités d'intérêt. En l'illustrant sur un problème d'élasticité linéaire multi-paramétré, nous montrons comment cette démarche permet le contrôle robuste de toute la chaîne de modélisation, depuis l'expérience jusqu'à la résolution numérique, afin d'assurer que la valeur d'une quantité locale dimensionnante soit calculée avec précision. Dans ce cadre, nous nous focalisons en particulier sur : (i) la vérification des simulations menées par la méthode des éléments finis ; (ii) le contrôle des modèles réduits issus de la technique PGD ; (iii) le recalage optimal des paramètres du modèle à partir de mesures expérimentales.

**Mots clés** — Estimation d'erreur, Recalage de modèle, Erreur en relation de comportement, Quantité d'intérêt, Problème adjoint

---

### 1 Introduction

La simulation numérique est à présent devenue un outil de conception indispensable pour l'ingénierie, permettant notamment de prédire le comportement de structures industrielles complexes dans leur environnement. Néanmoins, afin de coller fidèlement à la réalité physique, la simulation nécessite un contrôle permanent des divers modèles mathématiques et outils numériques qu'elle utilise [12]. Cette thématique scientifique, connue sous le nom de *Vérification et Validation des modèles* (V&V), est une composante de la simulation qui, bien que primordiale, reste souvent fastidieuse et compliquée à mettre en oeuvre en pratique. Cependant, dans la très grande majorité des cas, la simulation numérique n'a pas pour objectif de prédire la réponse globale de la structure étudiée, mais simplement quelques caractéristiques locales de cette réponse (contrainte maximale, facteurs d'intensité de contrainte, etc.) appelées quantités d'intérêt et servant directement au dimensionnement. Il est alors cohérent de ne vouloir contrôler que les paramètres de la simulation qui sont influents pour ces quantités d'intérêt, menant ainsi à une démarche de V&V simplifiée.

Dans ce travail, nous présentons quelques avancées récentes visant à construire des modèles de simulation optimisés vis-à-vis de la prédiction de quantités d'intérêt. Ces avancées se basent sur les concepts généraux de problème adjoint [6] et d'erreur en relation de comportement [7]. Dans un premier temps, nous nous focalisons sur des travaux liés à la vérification "classique", i.e. au contrôle de la discrétisation dans les calculs menés par la méthode des éléments finis. On montre dans ce cadre qu'on peut définir des bornes d'erreur locale à la fois garanties, précises et relativement simples à calculer [11]. Dans un second temps, nous nous intéressons au contrôle des solutions obtenues par la réduction de modèle, démarche largement utilisée de nos jours pour traiter les modèles complexes multi-paramétrés. Nous prenons l'exemple de la technique PGD (*Proper Generalized Decomposition*, cf. [4]), et montrons qu'on peut y associer des outils pertinents de contrôle en vue de l'estimation fiable de quantités d'intérêt [10, 3]. Enfin, nous présentons des travaux relatifs à la validation de modèle, toujours en vue de la prédiction d'une quantité d'intérêt donnée. Nous introduisons une approche qui, à partir d'une fonction coût pertinente, permet un recalage optimal des paramètres du modèle vis-à-vis de la quantité d'intérêt. Cette approche fournit de plus des informations utiles pour établir efficacement le protocole expérimental (position des capteurs, type d'essai, ...) et le dialogue éventuel entre l'expérience et la simulation afin d'atteindre l'objectif visé.

## 2 Modèle mathématique de référence

On considère un problème d'élasticité linéaire, en statique, sur une structure représentée par un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  de frontière  $\partial\Omega$  (Fig. 1). La structure est encadrée sur une zone non nulle  $\partial_1\Omega \subset \partial\Omega$ , tandis qu'une force volumique  $\mathbf{f}_d$  (resp. une force surfacique  $\mathbf{F}_d$ ) est imposée dans  $\Omega$  (resp. sur  $\partial_2\Omega$ ), avec  $\overline{\partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega} = \partial\Omega$  et  $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$ . Le modèle associé est gouverné par trois groupes d'équations :

– les équations de compatibilité cinématique :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) \quad \text{dans } \Omega \quad ; \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial_1\Omega \quad (1)$$

– les équations d'équilibre :

$$\operatorname{div}\sigma + \mathbf{f}_d = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \quad ; \quad \sigma\mathbf{n} = \mathbf{F}_d \quad \text{sur } \partial_2\Omega \quad (2)$$

– la relation de comportement :

$$\sigma = \mathbf{K}\varepsilon \quad \text{dans } \Omega \quad (3)$$

$\mathbf{u}$  représente le déplacement,  $\varepsilon$  (resp.  $\sigma$ ) le tenseur des déformations linéarisées (resp. des contraintes de Cauchy) et  $\mathbf{n}$  la normale sortante à  $\Omega$ . On suppose que le comportement du matériau, décrit par le tenseur de Hooke  $\mathbf{K}$ , dépend non seulement de la position spatiale  $\mathbf{x}$  mais aussi d'un ensemble  $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_N]$  de paramètres (champ stochastique par exemple) appartenant à un espace borné  $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \dots \times \Theta_N$ .

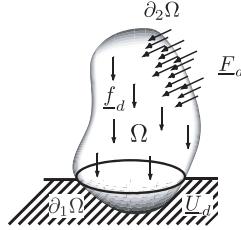


Fig. 1 – Structure d'étude et son environnement.

On introduit l'ensemble  $\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d, \mathbf{v} \text{ vérifie (1)}\}$  des déplacements cinématiquement admissibles ainsi que l'ensemble  $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{\tau} \in [L^2(\Omega)]^{d(d+1)/2}, \boldsymbol{\tau}^T = \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau} \text{ vérifie (2)}\}$  des contraintes statiquement admissibles. Le problème peut alors être écrit sous la forme faible suivante :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}(\mathbf{p}) \in \mathcal{V} \text{ tel que } \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) - a(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4)$$

avec  $a(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{K}(\mathbf{p})\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})d\Omega$  et  $l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v}d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v}dS$ .

## 3 Présentation des concepts utilisés

### 3.1 Problème adjoint

On s'intéresse à une quantité d'intérêt notée  $Q$  et supposée linéaire par rapport à  $\mathbf{u}$  (déplacement local, moyenne de contrainte, ...). Elle est en pratique décrite sous la forme générale :

$$Q(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (\sigma_{\Sigma} : \varepsilon(\mathbf{u}) + \mathbf{f}_{\Sigma} \cdot \mathbf{u})d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \mathbf{F}_{\Sigma} \cdot \mathbf{u}dS \quad (5)$$

où  $(\sigma_{\Sigma}, \mathbf{f}_{\Sigma}, \mathbf{F}_{\Sigma})$  sont des opérateurs d'extraction, souvent construits à partir de fonctions de Dirac ou de Heaviside. Les outils du contrôle optimal [6], permettant notamment d'obtenir la sensibilité de  $Q(\mathbf{u}(\mathbf{p}))$  par rapport à  $\mathbf{p}$ , définissent alors le Lagrangien :

$$L(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = Q(\mathbf{u}) + \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \quad (6)$$

et la recherche du point stationnaire de  $L$  fait apparaître le problème adjoint suivant :

$$\text{Trouver } \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{p}) \in \mathcal{V} \text{ tel que } Q(\delta\mathbf{u}) - a(\mathbf{p}, \delta\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (7)$$

La solution adjointe  $\lambda(\mathbf{p})$ , valide pour tout chargement  $(\mathbf{f}_d, \mathbf{F}_d)$ , conduit à la formule de représentation :

$$Q(\mathbf{u}(\mathbf{p})) = l(\lambda(\mathbf{p})) \quad (8)$$

On note par la suite  $\tilde{\mathcal{S}}$  l'espace des champs de contrainte statiquement admissibles pour le problème adjoint, i.e. en équilibre avec le chargement  $(\sigma_\Sigma, \mathbf{f}_\Sigma, \mathbf{F}_\Sigma)$ .

### 3.2 Erreur en relation de comportement

Le concept d'erreur en relation de comportement (ERC) définit une mesure énergétique, notée  $\mathcal{E}$ , de la non-vérification de la loi de comportement entre un champ de contrainte  $\tau \in \mathcal{S}$  et un champ de déplacement  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  :

$$\mathcal{E}^2(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \tau) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\tau - \mathbf{K}(\mathbf{p})\varepsilon(\mathbf{v})] : \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{p}) [\tau - \mathbf{K}(\mathbf{p})\varepsilon(\mathbf{v})] d\Omega = \frac{1}{2} \|\tau - \mathbf{K}(\mathbf{p})\varepsilon(\mathbf{v})\|^2 \quad (9)$$

*Remarque 1* Une définition plus générale de  $\mathcal{E}$ , en particulier pour les modèles non-linéaires, peut être donnée à partir de potentiels convexes.

On a alors la relation suivante (cf. [7]), avec  $\tau^* = \frac{1}{2}[\tau + \mathbf{K}(\mathbf{p})\varepsilon(\mathbf{v})]$  :

$$\|\sigma - \tau^*\|^2 = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \tau) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \forall \tau \in \mathcal{S} \quad (10)$$

où  $\sigma$  est la solution en contrainte de (1-3). Cette relation est exploitée par la suite pour établir des bornes d'erreur garanties.

## 4 Contrôle des calculs éléments finis

Dans cette section, la valeur de  $\mathbf{p}$  est supposée connue et fixe (pour simplifier les écritures, on ne fait pas apparaître  $\mathbf{p}$  dans les expressions). On suppose que le problème (4) est résolu par la méthode des éléments finis ; on note  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$  l'espace de dimension finie associé et  $(\mathbf{u}_h, \sigma_h = \mathbf{K}\varepsilon(\mathbf{u}_h))$  la solution approchée. L'erreur de discrétisation occasionnée sur  $Q$  s'écrit alors, en notant  $\tilde{\mathbf{u}}$  la solution du problème adjoint (7) :

$$Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_h) = l(\tilde{\mathbf{u}}) - a(\mathbf{u}_h, \tilde{\mathbf{u}}) = R_h(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (11)$$

où  $R_h$  est la fonctionnelle des résidus. Afin d'estimer cette erreur, on calcule une solution approchée  $\tilde{\mathbf{u}}_h$  du problème adjoint ; on utilise en pratique la méthode des éléments finis associée à un enrichissement local par des fonctions *handbook* (fonctions de Green généralisées, voir Fig. 2) dans le voisinage de la zone de définition de  $Q$  (cf. [9]). Les solutions approchées des problèmes de référence et adjoint sont ensuite post-traitées afin d'obtenir des solutions admissibles  $(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}$  et  $(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \in \mathcal{V} \times \tilde{\mathcal{S}}$ . La technique permettant d'obtenir de telles solutions admissibles, notamment un champ de contrainte équilibré, se base sur les propriétés des solutions approchées issues de la méthode des éléments finis, i.e. l'admissibilité cinématique et l'équilibre au sens des éléments finis [7].

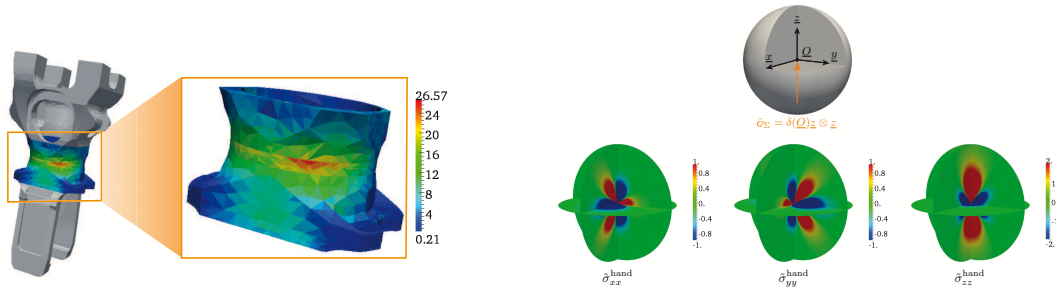


Fig. 2 – Zone de définition de la quantité d'intérêt (gauche), et fonction d'enrichissement utilisée (droite).

On obtient alors le résultat de majoration suivant (voir [8]) :

$$|Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_h) - Q_{corr}| \leq \mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\sigma}_h) \quad (12)$$

où  $Q_{corr}$  est un terme de correction calculé à partir des solutions admissibles  $(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$  et  $(\hat{\hat{\mathbf{u}}}_h, \hat{\hat{\sigma}}_h)$ . A noter que ce résultat de majoration n'utilise pas la propriété d'orthogonalité de Galerkin, mais simplement les propriétés des solutions admissibles à disposition. Ainsi, des bornes garanties et précises sur  $Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_h)$  peuvent être déterminées ; en pratique, l'enrichissement local du problème adjoint rend le terme  $\mathcal{E}(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\sigma}_h)$  très petit et fournit un encadrement de  $Q(\mathbf{u})$  avec une précision de l'ordre de 5% à un coût acceptable. A noter que des optimisations de la majoration (12) sont possibles ; en particulier, des propriétés sur des domaines homothétiques évitent la sur-majoration parfois occasionnée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz [11].

## 5 Contrôle de la réduction de modèle basée sur la PGD

On cherche à présent à quantifier l'influence des paramètres  $\mathbf{p}$  sur la solution  $\mathbf{u}$ , en vue par exemple d'une stratégie d'optimisation de structure. On définit pour cela les formes globales  $A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Theta} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{p}$  et  $L(\mathbf{v}) = \int_{\Theta} l(\mathbf{v}) d\mathbf{p}$ , ainsi que l'espace  $L^2(\Theta, \mathcal{V}) = \mathcal{V} \otimes_{n=1}^N \mathcal{P}_n$ , avec  $\mathcal{P}_i = L^2(\Theta_i)$ . Le problème peut alors être décrit par la formulation faible globale :

$$\text{Trouver } \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in L^2(\Theta, \mathcal{V}) \text{ tel que } A(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in L^2(\Theta, \mathcal{V}) \quad (13)$$

La détermination d'une solution approchée de (13) par les méthodes standard est généralement impossible car le coût de calcul croît exponentiellement avec le nombre de paramètres (malédiction de la dimension). La technique PGD [4] est une alternative qui permet la construction *a priori* d'une représentation par variables séparées de la solution  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ . L'approximation PGD est cherchée sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \approx \mathbf{u}_m(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \equiv \sum_{i=1}^m \psi_i(\mathbf{x}) \Gamma_i(\mathbf{p}) \quad \text{avec } \Gamma_i(\mathbf{p}) = \prod_{n=1}^N \gamma_{i,n}(p_n) \quad (14)$$

où  $m$  est l'ordre (i.e. le nombre de modes) de la représentation, tandis que les fonctions d'espace  $\psi_i(\mathbf{x})$  et les fonctions des paramètres  $\gamma_{i,n}(p_n)$  appartiennent à  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{P}_n$ , respectivement. Une particularité intéressante de la PGD est que les modes sont calculés à la volée, sans connaissance sur  $\mathbf{u}$ . Nous donnons ici une version classique de la technique PGD, appelée *Galerkin progressive* et basée sur une méthode de point fixe.

On suppose qu'une approximation PGD à l'ordre  $m-1$  a été calculée. L'approximation à l'ordre  $m$  est alors définie par :

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{u}_{m-1}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \psi(\mathbf{x}) \Gamma(\mathbf{p}) \quad \text{avec } \Gamma(\mathbf{p}) = \prod_{n=1}^N \gamma_n(p_n) \quad (15)$$

A partir d'une initialisation  $\psi^{(0)}(\mathbf{x}) \Gamma^{(0)}(\mathbf{p})$ , on construit une nouvelle représentation  $\psi^{(1)}(\mathbf{x}) \Gamma^{(1)}(\mathbf{p})$  du mode  $m$  avec la sous-itération suivante :

- pour  $n_0 = 1, \dots, N$ , on calcule  $\gamma_{n_0}^{(1)}(p_{n_0}) \in \mathcal{P}_{n_0h}$  tel que :

$$A(\mathbf{u}_{m-1} + \psi^{(0)} \gamma_{n_0}^{(1)} \Gamma_{/n_0}^{(1,0)}, \psi^{(0)} \gamma^* \Gamma_{/n_0}^{(1,0)}) = L(\psi^{(0)} \gamma^* \Gamma_{/n_0}^{(1,0)}) \quad \forall \gamma^* \in \mathcal{P}_{n_0h} \quad (16)$$

$$\text{avec } \Gamma_{/n_0}^{(1,0)} = \prod_{n=1}^{n_0-1} \gamma_n^{(1)} \times \prod_{n=n_0+1}^N \gamma_n^{(0)} ;$$

- on calcule  $\psi^{(1)}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}_h$  tel que :

$$A(\mathbf{u}_{m-1} + \psi^{(1)} \Gamma^{(1)}, \psi^* \Gamma^{(1)}) = L(\psi^* \Gamma^{(1)}) \quad \forall \psi^* \in \mathcal{V}_h \quad (17)$$

En pratique, le processus est stoppé après quelques itérations, et les fonctions des paramètres  $\gamma_n^{(j)}(p_n)$  sont normées à chaque sous-itération  $j$ .

Le point clé pour le contrôle robuste de la PGD par l'ERC est le calcul, pour tout  $\mathbf{p} \in \Theta$ , d'une solution admissible  $(\hat{\mathbf{u}}_m, \hat{\sigma}_m)$  par post-traitement de l'information disponible. En pratique, on prend  $\hat{\mathbf{u}}_m =$

$\mathbf{u}_m$  et le calcul de  $\hat{\sigma}_m(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  est fait à partir d'un champ reconstruit  $\sigma_m(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  satisfaisant l'équilibre au sens des éléments finis pour tout  $\mathbf{p} \in \Theta$  :

$$\int_{\Omega} \sigma_m : \varepsilon(\mathbf{u})^* d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{u}^* dS \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_h \quad (18)$$

Un champ particulier vérifiant (18), noté  $\sigma_d(\mathbf{x})$ , peut être calculé simplement avec la méthode des éléments finis en déplacement. De plus, en notant qu'à la fin des sous-itérations pour le calcul de chaque mode PGD  $m_0 \in [1, m]$ , la condition (17) donne :

$$A(\mathbf{u}_{m_0}, \psi^* \Gamma_{m_0}) = L(\psi^* \Gamma_{m_0}) \quad \forall \psi^* \in \mathcal{V}_h \iff \int_{\Omega} \left[ \int_{\Theta} \Gamma_{m_0}(\mathbf{K} \varepsilon(\mathbf{u}_{m_0}) - \sigma_d) d\mathbf{p} \right] \varepsilon(\psi^*) d\Omega = 0 \quad \forall \psi^* \in \mathcal{V}_h \quad (19)$$

donc que le terme  $\mathbb{Q}_{m_0}(\mathbf{x}) \equiv \int_{\Theta} \Gamma_{m_0}(\mathbf{K} \varepsilon(\mathbf{u}_{m_0}) - \sigma_d) d\mathbf{p}$  est auto-équilibré au sens des éléments finis, on définit  $\sigma_m$  puis  $\hat{\sigma}_m$  sous la forme :

$$\sigma_m(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sigma_d(\mathbf{x}) + \sum_{m_0=1}^m \beta_{m_0}(\mathbf{p}) \mathbb{Q}_{m_0}(\mathbf{x}) \quad ; \quad \hat{\sigma}_m(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \hat{\sigma}_d(\mathbf{x}) + \sum_{m_0=1}^m \beta_{m_0}(\mathbf{p}) \hat{\mathbb{Q}}_{m_0}(\mathbf{x}) \quad (20)$$

$\hat{\sigma}_m$  est obtenu à partir des propriétés de  $\sigma_m$  et des techniques classiques [7]. Les coefficients  $\beta_{m_0}(\mathbf{p})$  sont quant à eux déterminés explicitement en minimisant  $\int_{\Theta} \mathcal{E}^2(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{u}}_m, \hat{\sigma}_m) d\mathbf{p}$ .

Pour estimer l'erreur sur  $Q$ , on résout le problème adjoint par la technique PGD (avec un ordre  $\tilde{m}$  potentiellement différent de  $m$ ) associée à un enrichissement local. On obtient alors une majoration similaire à (12) :

$$|Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_m) - Q_{corr}| \leq \mathcal{E}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{u}}_m, \hat{\sigma}_m) \mathcal{E}(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{u}}_{\tilde{m}}, \hat{\sigma}_{\tilde{m}}) \quad (21)$$

et des bornes très précises sur  $Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_m)$  en sont déduites (voir Fig. 3).

Dans le modèle réduit PGD, l'erreur  $Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_m)$  vient de deux sources : (i) la troncature de la représentation PGD (14) à l'ordre  $m$  ; (ii) la discrétisation utilisée pour calculer les modes. En effet, l'erreur s'écrit :

$$Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{u}_m) = [Q(\mathbf{u}) - Q_{dis}] + [Q_{dis} - Q(\mathbf{u}_m)] = \eta_{dis} + \eta_{PGD} \quad (22)$$

où  $Q_{dis}$  est la valeur de la quantité d'intérêt obtenue après discrétisation du problème de référence, et  $\eta_{dis}$  (resp.  $\eta_{PGD}$ ) est la part d'erreur venant de la discrétisation (resp. de la troncature de la représentation PGD). Pour contrôler le modèle réduit et mener les stratégies adaptatives, on introduit un indicateur d'erreur pour chaque source. Il suffit pour cela d'introduire des problèmes de référence additionnels ; par exemple, l'estimation de la part d'erreur  $\eta_{PGD}$  due à la troncature de la représentation PGD peut être faite en considérant le problème discrétisé (de la forme  $\mathbb{K}\mathbf{U}_h = \mathbf{F}_h$ ), i.e. celui donnant  $Q_{dis}$ , comme problème de référence. Des solutions admissibles sont alors définies par rapport à ces nouveaux problèmes de référence (elles sont en pratique obtenues par un post-traitement direct de l'information à disposition) afin de pouvoir utiliser un résultat de majoration similaire à (21).

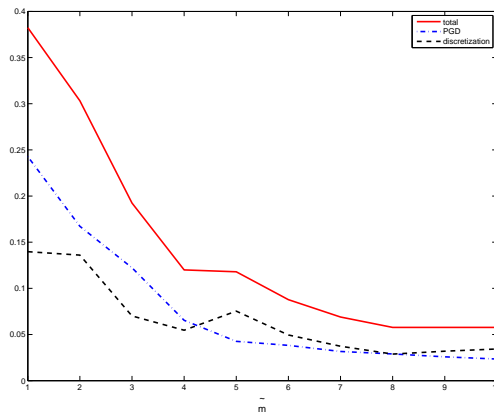


Fig. 3 – Exemple de borne d'erreur normée et d'indicateurs d'erreur en fonction du nombre  $\tilde{m}$  de modes PGD utilisés pour le problème adjoint ( $m = 3$ ).

## 6 Recalage de modèle

On suppose dans cette partie que la valeur de  $\mathbf{p}$ , mal connue, nécessite d'être recalée à partir d'informations expérimentales. Ces informations sont représentées par un ensemble de quantités observables  $\mathbf{s}_{obs}$  mesurées à partir de la réponse de la structure. Le processus de recalage nécessite de résoudre un problème inverse qui est généralement mal posé [2].

### 6.1 Contrôle des paramètres vis-à-vis de la quantité d'intérêt

Parmi toutes les techniques de recalage, une technique particulièrement robuste et efficace consiste à imposer les données expérimentales par pénalisation dans une nouvelle définition de l'ERC appelée *erreur en relation de comportement modifiée* [5] et notée  $\bar{\mathcal{E}}$  :

$$\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) = \mathcal{E}(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) + \frac{1}{2} \frac{r}{1-r} \|\mathbf{s}[\mathbf{v}(\mathbf{p})] - \mathbf{s}_{obs}\|_{L^2}^2 \quad (23)$$

Les deux termes composant  $\bar{\mathcal{E}}$  s'interprètent respectivement comme une erreur de modèle et une erreur de mesure ; le paramètre scalaire  $r$  permet de moduler l'influence de ces deux termes. Le recalage par l'ERC modifiée consiste alors à trouver le jeu de paramètres  $\mathbf{p}_{sol}$  tel que :

$$\mathbf{p}_{sol} = \underset{\mathbf{p} \in \Theta}{\operatorname{argmin}} \mathcal{F}(\mathbf{p}) \quad ; \quad \mathcal{F}(\mathbf{p}) = \min_{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}} \bar{\mathcal{E}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \quad (24)$$

Il est mené par une méthode itérative, chaque itération consistant en deux étapes de minimisation : (i) une minimisation de  $\bar{\mathcal{E}}$  sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{S}$ , appelée étape de localisation, qui permet de déceler les éléments de  $\mathbf{p}$  à recalcer en premier ; (ii) une minimisation de  $\mathcal{F}$  sur  $\Theta$ , appelée étape de correction.

Gardant la philosophie et la flexibilité de l'ERC modifiée, on propose ici une version du recalage dédiée à la quantité d'intérêt  $Q$ . On introduit pour cela une nouvelle fonction coût, notée  $\mathcal{F}_Q(\mathbf{p})$  et définie par :

$$\mathcal{F}_Q(\mathbf{p}) = \underset{q \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left[ \frac{1}{2} |q - Q_{mod}(\mathbf{p})|^2 + \frac{1}{2} \frac{r}{1-r} |q - Q_{obs}(\mathbf{p})|^2 \right] \quad (25)$$

Le terme d'erreur de modèle  $\frac{1}{2} |q - Q_{mod}(\mathbf{p})|^2$  implique une valeur  $Q_{mod}$  de la quantité d'intérêt définie par le modèle uniquement, c'est-à-dire par (4) :

$$Q_{mod}(\mathbf{p}) = Q(\mathbf{p}, \mathbf{u}_1(\mathbf{p})) \quad ; \quad \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (26)$$

Le terme d'erreur de mesure  $\frac{1}{2} |q - Q_{obs}(\mathbf{p})|^2$  implique une valeur  $Q_{obs}$  de la quantité d'intérêt définie par une interpolation des mesures  $\mathbf{s}_{obs}$ , i.e. :

$$Q_{obs}(\mathbf{p}) = Q(\mathbf{p}, \mathbf{u}_2(\mathbf{p})) \quad ; \quad (\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\chi}) = \underset{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}}{\operatorname{argmin}} \bar{\mathcal{E}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) \quad (27)$$

La seconde équation de (27) implique  $\mathbf{s}_{obs}$  et aboutit au système  $[\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{p})]\{U_2\} = \{\tilde{\mathbf{F}}\}$  dans sa forme discrétisée.

La nouvelle étape de localisation consiste donc à calculer  $\mathcal{F}_Q(\mathbf{p})$ . Ce problème de minimisation sous contrainte est traité en introduisant le Lagrangien semi-discrétisé :

$$L_Q(q, \mathbf{u}_1, \{U_2\}, \boldsymbol{\mu}, \{\lambda\}) = \frac{1}{2} |q - Q(\mathbf{p}, \mathbf{u}_1)|^2 + \frac{1}{2} \frac{r}{1-r} |q - Q_h(\mathbf{p}, \{U_2\})|^2 + \mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\mu}) + \{\lambda\}^T ([\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{p})]\{U_2\} - \{\tilde{\mathbf{F}}\}) \quad (28)$$

et la recherche du point-selle de  $L_Q$  mène au système suivant :

$$[q - Q(\mathbf{p}, \mathbf{u}_1)] + \frac{r}{1-r} [q - Q_h(\mathbf{p}, \{U_2\})] = 0 \quad (29a)$$

$$-[q - Q(\mathbf{p}, \mathbf{u}_1)]Q(\mathbf{p}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_1) - a(\mathbf{p}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\mu}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_1 \in \mathcal{V} \quad (29b)$$

$$-\frac{r}{1-r} [q - Q_h(\mathbf{p}, \{U_2\})]Q_h(\mathbf{p}, \{\boldsymbol{\delta}U_2\}) + \{\lambda\}^T [\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{p})]\{\boldsymbol{\delta}U_2\} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\delta}\{U_2\} \quad (29c)$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\mu}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{u}_0 \quad (29d)$$

$$[\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{p})]\{U_2\} = \{\tilde{\mathbf{F}}\} \quad (29e)$$

où (29b) et (29c) sont des problèmes adjoints. On obtient alors :

$$q = (1 - r)Q(\mathbf{p}, \mathbf{u}_1) + rQ_h(\mathbf{p}, \{U_2\}) \quad ; \quad \mathcal{F}_Q(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}r[Q(\mathbf{p}, \mathbf{u}_1) - Q_h(\mathbf{p}, \{U_2\})]^2 \quad (30)$$

avec  $\mathbf{u}_1$  (resp.  $\{U_2\}$ ) vérifiant (29d) (resp. (29e)). Les problèmes adjoints peuvent être en outre réécrits :

$$a(\mathbf{p}, \delta\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\mu}) = \alpha Q(\mathbf{p}, \delta\mathbf{u}_1) \quad \forall \delta\mathbf{u}_1 \in \mathcal{V} \quad ; \quad \{\lambda\}^T [\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{p})] \{\delta U_2\} = \alpha Q_h(\mathbf{p}, \{\delta U_2\}) \quad \forall \delta\{U_2\} \quad (31)$$

avec  $\alpha = r[Q(\mathbf{p}, \mathbf{u}_1) - Q_h(\mathbf{p}, \{U_2\})]$ .

La séparation de  $\mathcal{F}_Q(\mathbf{p})$  en contributions de chaque élément  $p_n$  de  $\mathbf{p}$ , sous la forme :

$$\mathcal{F}_Q(\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^N \mathcal{F}_{Q,n}(p_n) \quad (32)$$

permet de localiser l'ensemble des paramètres qui contribuent le plus au contrôle de la quantité d'intérêt  $Q$  ; ces paramètres doivent donc être recalés en premier.

Dans l'étape de correction, le gradient de  $\mathcal{F}_Q(\mathbf{p})$  est calculé à partir des résultats obtenus dans l'étape précédente. En effet, on a directement :

$$\frac{\partial \mathcal{F}_Q(\mathbf{p})}{\partial p_n} = \frac{d}{dp_n} L_Q(\mathbf{p}, q, \mathbf{u}_1, \{U_2\}, \boldsymbol{\mu}, \{\lambda\}) = \frac{\partial}{\partial p_n} L_Q(\mathbf{p}, q, \mathbf{u}_1, \{U_2\}, \boldsymbol{\mu}, \{\lambda\}) \quad (33)$$

avec  $(q, \mathbf{u}_1, \{U_2\}, \boldsymbol{\mu}, \{\lambda\})$  solution de (29). Par conséquent, cette méthode permet de conduire le processus de recalage d'une façon optimale et naturelle vis-à-vis de la quantité d'intérêt (cf. Fig. 4). Les itérations sont arrêtées quand la valeur de  $\mathcal{F}_Q$  atteint une valeur seuil donnée.

## 6.2 Contrôle des mesures vis-à-vis de la quantité d'intérêt

On s'intéresse à présent à la sensibilité de  $Q$  par rapport aux mesures  $\mathbf{s}_{obs}$ . Le processus de validation est impliqué ici, car un changement dans  $\mathbf{s}_{obs}$  affecte la valeur de  $\mathbf{p}$ . Le processus (24) utilisant l'ERC modifiée peut être vu comme un problème de minimisation sous contrainte (avec des mesures fixes  $\mathbf{s}_{obs}$ ), sa solution étant le point-selle du Lagrangien suivant :

$$L(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}) = \bar{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) + \left[ \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Omega - \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \boldsymbol{\lambda} dS \right] \quad (34)$$

$L$  dépend explicitement des mesures  $\mathbf{s}_{obs}$ , qui sont impliquées dans la définition de  $\bar{\mathcal{E}}$ , de telle façon qu'on peut aussi écrire  $L(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{s}_{obs})$ .

La quantité d'intérêt s'écrit quant à elle  $Q(\mathbf{z}(\mathbf{s}_{obs}), \mathbf{s}_{obs})$ , avec  $\mathbf{z} = (\mathbf{p}, \mathbf{u}, \sigma, \boldsymbol{\mu})$  solution du problème de calibration, i.e. réalisant le point-selle de  $L$  :

$$L'_z(\mathbf{z}, \mathbf{s}_{obs}; \delta\mathbf{z}) = 0 \quad \forall \delta\mathbf{z} \quad (35)$$

On a de plus :

$$d_{\mathbf{s}_{obs}} Q(\mathbf{z}(\mathbf{s}_{obs}), \mathbf{s}_{obs}; \delta\mathbf{s}_{obs}) = Q'_{\mathbf{s}_{obs}}(\mathbf{z}(\mathbf{s}_{obs}), \mathbf{s}_{obs}; \delta\mathbf{s}_{obs}) + Q'_z(\mathbf{z}(\mathbf{s}_{obs}), \mathbf{s}_{obs}; d\mathbf{z}) \quad (36)$$

avec  $d\mathbf{z} \equiv d_{\mathbf{s}_{obs}} \mathbf{z}(\mathbf{s}_{obs}; \delta\mathbf{s}_{obs})$ . Avec les outils du contrôle optimal, on introduit le nouveau Lagrangien  $M$  défini par :

$$M(\mathbf{z}, \mathbf{s}_{obs}, \mathbf{y}) = Q(\mathbf{z}, \mathbf{s}_{obs}) - \mathcal{L}'_z(\mathbf{z}, \mathbf{s}_{obs}; \mathbf{y}) \quad (37)$$

La solution  $\mathbf{z}^*$  du problème adjoint :

$$\mathcal{L}''(\mathbf{z}, \mathbf{s}_{obs}; \mathbf{z}^*, \delta\mathbf{z}) = Q'_z(\mathbf{z}, \mathbf{s}_{obs}; \delta\mathbf{z}) \quad \forall \delta\mathbf{z} \quad (38)$$

permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{s}_{obs}} Q(\mathbf{z}(\mathbf{s}_{obs}), \mathbf{s}_{obs}; \delta\mathbf{s}_{obs}) &= M'_{\mathbf{s}_{obs}}(\mathbf{z}, \mathbf{s}_{obs}, \mathbf{z}^*; \delta\mathbf{s}_{obs}) \\ &= Q'_{\mathbf{s}_{obs}}(\mathbf{z}, \mathbf{s}_{obs}; \delta\mathbf{s}_{obs}) - \mathcal{L}''_{\mathbf{z}\mathbf{s}_{obs}}(\mathbf{z}, \mathbf{s}_{obs}; \mathbf{z}^*, \delta\mathbf{s}_{obs}) \end{aligned} \quad (39)$$

avec  $\mathbf{z}$  vérifiant (35), ce qui donne la sensibilité de  $Q$  par rapport à  $\mathbf{s}_{obs}$ .



*Remarque 2* La même solution adjointe  $\mathbf{z}^*$ , avec des mesures fixes  $\mathbf{s}_{obs}$ , permet aussi de considérer la sensibilité des paramètres  $\mathbf{p}$  identifiés par rapport au maillage éléments finis utilisé pour la validation (voir [1]).

*Remarque 3* Choisir  $Q = p_n$  dans l'analyse de sensibilité permet de mesurer l'effet des incertitudes de mesure sur les valeurs des paramètres recalés.

L'information issue de  $d_{s_{obs}} Q$  peut être utilisée pour définir un protocole expérimental optimal, en cherchant la position des capteurs et les quantités mesurées qui rendent  $\|d_{s_{obs}} Q\|$  maximal.

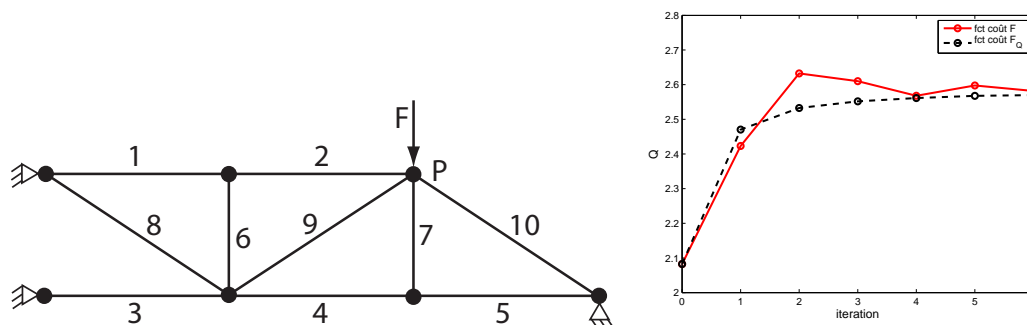


Fig. 4 – Recalage d'une structure de type treillis, chaque raideur  $E_i$  ( $i = 1, \dots, 10$ ) des barres étant un paramètre, en vue de la prédiction de la flèche au point  $P$  ( $Q = v_P$ ) : configuration de la structure étudiée (gauche) ; évolution de la valeur prédite pour  $Q$  à chaque itération du recalage avec l'ERC modifiée classique ou la nouvelle fonction coût  $\mathcal{F}_Q$  (droite).

## Références

- [1] R. Becker, B. Vexler. *A posteriori error estimation for finite element discretization of parameter identification problems*, Numerische Mathematik, 96, page 435-page 459, 2004.
- [2] M. Bonnet, A. Constantinescu. *Inverse problems in elasticity*, 21, page R21-page R50, 2005.
- [3] L. Chamoin, P. Ladevèze. *Robust control of PGD-based numerical simulations*, European Journal of Computational Mechanics, 3-6, page 195-page 207, 2012.
- [4] F. Chinesta, P. Ladevèze, E. Cueto. *A short review on model reduction based on Proper Generalized Decomposition*, Archives of Computational Methods in Engineering, 18, page 395-page 404, 2011.
- [5] P. Feissel, O. Allix. *Modified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : the elastic case*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196, 13-16, page 1968-page 1983, 2007.
- [6] M.B. Giles, E. Suli. *Adjoint methods for PDEs : a posteriori error analysis and postprocessing by duality*, Acta Numerica, page 145-page 236, 2002.
- [7] P. Ladevèze, J.P. Pelle. *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*, Springer NY, 2004.
- [8] P. Ladevèze. *Strict upper error bounds for calculated outputs of interest in computational structural mechanics*, Computational Mechanics, 42(2), page 271-page 286, 2008.
- [9] P. Ladevèze, L. Chamoin. *Calculation of strict error bounds for finite element approximations of non-linear pointwise quantities of interest*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 84, page 1638-page 1664, 2010.
- [10] P. Ladevèze, L. Chamoin. *On the verification of model reduction methods based on the Proper Generalized Decomposition*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 200, page 2032-page 2047, 2012.
- [11] P. Ladevèze, F. Pled, L. Chamoin. *New bounding techniques for goal-oriented error estimation applied to linear problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, online (DOI : 10.1002/nme.4423), 2013.
- [12] W. Oberkampf, T. Trucano, C. Hirsh. *Verification, Validation and Predictive Capability in Computational Engineering and Physics*, Technical report, Sandia 2003-3769, 2003.