



**HAL**  
open science

# Construction de champs admissibles pour le calcul d'erreur locale : application sur des exemples industriels

Florent Pled, Ludovic Chamoin, Pierre Ladevèze

## ► To cite this version:

Florent Pled, Ludovic Chamoin, Pierre Ladevèze. Construction de champs admissibles pour le calcul d'erreur locale : application sur des exemples industriels. 20ème Congrès Français de Mécanique (CFM 2011), Aug 2011, Besançon, France. pp.1881-1886. hal-01056918

**HAL Id: hal-01056918**

**<https://hal.science/hal-01056918v1>**

Submitted on 21 Aug 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Construction de champs admissibles pour le calcul d'erreur locale : application sur des exemples industriels

F. Pled<sup>a</sup>, L. Chamoin<sup>a</sup>, P. Ladevèze<sup>a,b</sup>

a. LMT-Cachan (ENS-Cachan/CNRS/Paris 6 University), 61 avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN Cedex (FRANCE)

b. EADS Foundation Chair, Advanced Computational Structural Mechanics, FRANCE

## Résumé :

*Le développement d'outils de vérification pour estimer et contrôler la qualité des modèles éléments finis se tourne depuis plusieurs années vers l'estimation d'erreur locale. Dans ce cadre, l'obtention de bornes d'erreur garanties et pertinentes nécessite la construction de champs de contrainte admissibles, i.e. vérifiant exactement les équations d'équilibre. Ce travail vise à comparer les méthodes qui fournissent de tels champs ; il s'appuie sur différents critères (qualité, coût de calcul, facilité d'implémentation) et est illustré à partir d'exemples industriels 2D/3D.*

## Abstract :

*The development of verification tools concerning the mastering and control of the quality of a finite element analysis has been turning to goal-oriented error estimation for several years. In this context, techniques providing strict and relevant error bounds require currently the construction of admissible stress fields, i.e. verifying the equilibrium equations exactly. This work aims at comparing the techniques for constructing such stress fields in terms of quality of the associated error estimate, computational cost and practical implementation. The numerical experiments are carried out on two- and three-dimensional industrial cases.*

**Mots clefs : vérification ; champs admissibles ; bornes d'erreur garanties**

## 1 Introduction

Un des enjeux principaux dans le domaine de la vérification des calculs concerne le caractère robuste des méthodes d'estimation d'erreur globale et locale. Actuellement, l'obtention de bornes d'erreur strictes et pertinentes requiert la construction d'une solution admissible, i.e. vérifiant les conditions d'admissibilité cinématique et statique. Cette étude a pour but de comparer les techniques existantes de construction de champs admissibles utilisées pour l'estimation d'erreur. Tout d'abord, nous définissons le problème de référence et l'erreur de discrétisation afin d'introduire la notion de champs admissibles. Puis, nous présentons les différentes techniques visant à élaborer des champs admissibles en vue de les comparer sur différents critères : qualité de l'estimateur d'erreur, coût de calcul engendré et facilité de mise en œuvre. Enfin, les études numériques sont menées sur des exemples 2D et 3D utilisés dans l'industrie.

## 2 L'estimation d'erreur et la notion de champs admissibles

### 2.1 Présentation du problème de référence et erreur de discrétisation

On considère une structure occupant le domaine  $\Omega$ , de frontière  $\partial\Omega$ , constituée d'un matériau élastique linéaire et soumise à : des déplacements donnés  $\underline{U}_d$  sur une partie  $\partial_1\Omega \neq \emptyset$  ; des efforts surfaciques  $\underline{F}_d$

donnés sur la partie complémentaire  $\partial_2\Omega$  de  $\partial\Omega$  telles que  $\overline{\partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega} = \partial\Omega$ ,  $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$ ; des efforts volumiques  $\underline{f}_d$  donnés dans  $\Omega$ . Sous l'hypothèse d'un chargement quasi-statique, d'un régime isotherme et de petites perturbations, la formulation continue du problème mécanique, dit de référence, consiste à trouver un couple  $(\underline{u}, \cdot)$ , sur le domaine  $\Omega$ , vérifiant :

$$\circ \text{ les liaisons cinématiques : } \underline{u} \in \mathcal{U}; \quad \underline{u}|_{\partial_1\Omega} = \underline{U}_d; \quad (\underline{u}) = \frac{1}{2}(\nabla(\underline{u}) + \nabla^T(\underline{u})); \quad (1)$$

$$\circ \text{ les équations d'équilibre : } \cdot \in \mathcal{S};$$

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \text{Tr} [(\underline{u}^*)] \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \, dS; \quad (2)$$

$$\circ \text{ la relation de comportement : } \cdot = \mathbf{K}(\underline{u}), \quad (3)$$

où  $(\underline{u})$  est le tenseur des déformations linéarisé.  $\mathcal{U} = \{\underline{u} \in [\mathcal{H}^1(\Omega)]^3\}$  et  $\mathcal{S} = \{\cdot \in \mathcal{M}_s(3) \cap [\mathcal{L}^2(\Omega)]^6\}$  désignent l'espace des distributions de déplacement et de tenseur symétrique, respectivement, à énergie finie,  $\mathcal{M}_s(3)$  représentant l'espace des matrices carrées symétriques d'ordre  $n$ .  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$  est l'espace vectoriel associé à  $\mathcal{U}$ .

La solution exacte de ce problème, notée  $(\underline{u}, \cdot)$ , est en général hors de portée. En pratique, seule une solution approchée, notée  $(\underline{u}_h, \cdot_h)$ , contenue dans un espace d'approximation  $\mathcal{U}_h \times \mathcal{S}_h \subset \mathcal{U} \times \mathcal{S}$  peut être obtenue à partir de méthodes d'approximation, telle que la méthode des éléments finis (MEF). L'utilisation d'une MEF en déplacement conduit généralement à l'obtention d'une solution  $(\underline{u}_h, \cdot_h)$  vérifiant uniquement les conditions cinématiques (1) et la relation de comportement (3). L'erreur de discrétisation, définie par  $\underline{e}_h = \underline{u} - \underline{u}_h$ , peut être évaluée :

- de manière globale, à partir de la norme énergétique  $\|\cdot\|_{u,\Omega} = (\int_{\Omega} \text{Tr} [\mathbf{K}(\cdot)(\cdot)] \, d\Omega)^{1/2}$ , fournissant une erreur de discrétisation globale  $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$ ;
- de manière locale, à partir d'une fonctionnelle  $\mathcal{L}(\cdot)$  représentant une quantité locale  $I$ , fournissant une erreur de discrétisation locale  $\underline{e}_h^{loc} = I_{ex} - I_h = \mathcal{L}(\underline{u}) - \mathcal{L}(\underline{u}_h)$ .

## 2.2 Construction de champs admissibles

Les méthodes d'estimation d'erreur robustes et pertinentes reposent actuellement sur la construction d'une solution admissible, notée  $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\cdot}_h)$ , vérifiant uniquement les conditions d'admissibilité cinématique (1) et statique (2). D'une part, le champ de déplacement EF  $\underline{u}_h$  satisfaisant (1), on choisit généralement  $\hat{\underline{u}}_h$  égal à  $\underline{u}_h$ . D'autre part, le champ de contrainte EF  $\cdot_h$  ne vérifiant pas (2), l'élaboration d'un champ de contrainte statiquement admissible  $\hat{\cdot}_h$  est plus technique. Les méthodes dédiées à la construction de  $\hat{\cdot}_h$  seront abordées dans la Section 3. La qualité de ce nouveau couple  $(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\cdot}_h)$  peut être évaluée à partir d'une mesure globale du résidu sur la relation de comportement (3), appelée erreur en relation de comportement et notée  $e_{\text{rdc}}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\cdot}_h) = \|\hat{\cdot}_h - \mathbf{K}(\hat{\underline{u}}_h)\|_{\Omega}$ , où  $\|\cdot\|_{\Omega} = (\int_{\Omega} \text{Tr} [\cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot] \, d\Omega)^{1/2}$ . L'erreur en relation de comportement  $e_{\text{rdc}}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\cdot}_h)$  et l'erreur de discrétisation globale  $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}$  sont liées par le théorème de Prager-Syngé, qui conduit à l'inégalité suivante :

$$\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega}^2 = \|\underline{u} - \hat{\underline{u}}_h\|_{u,\Omega}^2 \leq \|\underline{u} - \hat{\underline{u}}_h\|_{u,\Omega}^2 + \|\hat{\cdot}_h\|_{\Omega}^2 = e_{\text{rdc}}^2(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\cdot}_h), \quad (4)$$

traduisant le caractère garanti de l'estimateur d'erreur globale  $e_{\text{rdc}}(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\cdot}_h)$ . Nous allons à présent aborder les principaux aspects des différentes méthodes de reconstruction de champs de contrainte admissible afin d'en dégager les avantages et les inconvénients.

## 3 Les différentes méthodes de reconstruction de champs admissibles

### 3.1 Les techniques d'équilibrage par élément EET - méthode standard

La *technique d'équilibrage par élément* (EET), initialement introduite par Ladevèze [1], repose sur les propriétés du champ de contrainte EF  $\cdot_h$  via une *condition de prolongement* qui lie le champ de contrainte admissible recherché  $\hat{\cdot}_h$  au champ de contrainte EF  $\cdot_h$  :

$$\int_E (\hat{h} - h) \nabla \varphi_i \, d\Omega = \underline{0} \quad \forall E \in \mathcal{E}, \quad \forall i \in \mathcal{N}_E^{\mathcal{E}}, \quad (5)$$

où  $\varphi_i \in \mathcal{U}_h^p$  est la fonction de forme EF associé au nœud  $i$ .

La technique EET se décompose en deux étapes : (i) construction de densités d'effort  $\hat{\underline{F}}_h$  en équilibre avec le chargement imposé  $(\underline{F}_d, \underline{f}_d)$  aux frontières  $\partial E$  de chaque élément du maillage  $\mathcal{M}_h$  ; (ii) calcul local, à l'échelle de l'élément, d'un champ de contrainte admissible  $\hat{h}$  en équilibre avec les densités préalablement construites  $\hat{\underline{F}}_h$  et les charges intérieures  $\underline{f}_d$  :

$$\hat{h}|_E \in \mathcal{S}_{\hat{\underline{F}}_h} \iff \begin{cases} \hat{h}|_E \in \mathcal{S} \\ \operatorname{div} \hat{h}|_E + \underline{f}_d = \underline{0} & \text{dans } E \\ \hat{h}|_E \underline{n}_E = \eta_E \hat{\underline{F}}_h & \text{sur } \partial E \end{cases} \quad (6)$$

Les densités d'effort  $\hat{\underline{F}}_h$  sont destinées à représenter le vecteur contrainte  $\hat{h}|_E \underline{n}_E$  aux bords  $\partial E$  des éléments  $E \in \mathcal{E}$  :  $\hat{h}|_E \underline{n}_E = \eta_E \hat{\underline{F}}_h$  sur  $\partial E$ , où  $\underline{n}_E$  désigne la normale unitaire sortante à l'élément  $E$  et  $\eta_E = \pm 1$  sont des fonctions assurant la continuité du vecteur contrainte à la traversée des bords  $\partial E$ . Enfin, ces densités d'effort  $\hat{\underline{F}}_h$  sont construites en équilibre avec le chargement extérieur  $(\underline{F}_d, \underline{f}_d)$ .

Dans un premier temps, les densités d'effort  $\hat{\underline{F}}_h$  sont calculées de manière quasi-explicite à partir des équations imposées  $\eta_E \hat{\underline{F}}_h = \underline{F}_d$  sur  $\partial E \subset \partial_2 \Omega$  et de la condition de prolongement (5), conduisant à la résolution de problèmes locaux  $\mathcal{P}_i^{\mathcal{N}}$  associés à chaque nœud  $i \in \mathcal{N}$  via la minimisation éventuelle d'une fonction-coût. Bien que cette première étape de construction des densités d'effort équilibrées engendre un coût de calcul faible, son implémentation reste toutefois peu aisée et constitue un frein à sa diffusion dans les codes de calcul industriels.

Dans un second temps, on construit la restriction  $\hat{h}|_E$  du champ de contrainte admissible  $\hat{h}$  sur chaque élément  $E \in \mathcal{E}$  à travers la résolution du problème local d'équilibre  $\mathcal{P}_E^{\mathcal{E}}$  (6), pour lequel les densités d'effort préalablement construites  $\hat{\underline{F}}_{h|\partial E}$  constituent les conditions aux limites de Neumann. Auparavant, les problèmes  $\mathcal{P}_E^{\mathcal{E}}$  (6) étaient résolus de manière analytique en recherchant un champ de contrainte admissible solution sous forme polynomiale [1]. A présent, ces problèmes sont résolus de manière numérique par une MEF en déplacement en recherchant un champ de contrainte admissible dans une base d'approximation enrichie ( $h$ -version ou  $p$ -version). Une approximation cinématique de type  $p+3$  ( $p$ -version de l'enrichissement) est couramment employée en vue d'obtenir un champ de contrainte admissible de très bonne qualité.

### 3.2 La technique d'équilibrage par patch d'éléments SPET - méthode "flux-free"

La *technique d'équilibrage par patch d'éléments* (SPET), initialement introduite en Mécanique des Fluides, a été récemment adaptée à la Mécanique des Milieux Continus par Parés, Díez et Huerta [3] sous le nom *méthode "flux-free"*. Contrairement à la technique EET, celle-ci ne requiert pas de procédure d'équilibrage des densités d'effort, ce qui rend son implémentation plus facile. Elle s'appuie sur la notion de *partition de l'unité* afin de se ramener à la résolution de problèmes locaux auto-équilibrés définis sur des patches d'éléments.

A partir des équations d'équilibre (2), on définit le problème global traduisant le non-respect de l'équilibre EF et consistant à trouver l'erreur de discrétisation  $\underline{e}_h \in \mathcal{U}_0$  telle que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{Tr} [\mathbf{K}(\underline{e}_h)(\underline{u}^*)] \, d\Omega &= - \int_{\Omega} \operatorname{Tr} [\mathbf{K}(\underline{u}_h)(\underline{u}^*)] \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* \, d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u}^* \, dS \\ &= \mathcal{R}_h(\underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_0, \end{aligned} \quad (7)$$

où  $\mathcal{R}_h$  est la fonctionnelle des résidus, ou opérateur des résidus.

L'introduction de la partition de l'unité définie par les fonctions de forme EF linéaires  $\lambda_i \in \mathcal{U}_h^1$  associées aux sommets  $i \in \mathcal{I}$  dans (7) nous conduit à la définition d'un nouvel ensemble de problèmes définis sur chaque patch  $\Omega_i$  dont les solutions  $\underline{e}_i \in \mathcal{U}_{0|\Omega_i}$  vérifient :

$$\int_{\Omega_i} \text{Tr} [\mathbf{K}(\underline{e}_i)(\underline{u}^*)] \, d\Omega = \mathcal{R}_h(\lambda_i \underline{u}^*) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{0|\Omega_i}, \quad (8)$$

où  $\mathcal{U}_{0|\Omega_i}$  est la restriction de  $\mathcal{U}_0$  au patch  $\Omega_i$  :  $\mathcal{U}_{0|\Omega_i} = \left\{ \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{|\Omega_i}, \underline{u}^*_{|\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_i} = \underline{0} \right\}$

L'existence de solutions associées aux problèmes (8) est assurée par l'introduction d'un opérateur de projection  $\Pi: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_{h,0}^1$  sur l'espace des fonctions de forme EF linéaires  $\mathcal{U}_{h,0}^1$ , en particulier pour un degré d'interpolation  $p = 1$  utilisé pour l'analyse EF. Ainsi, en substituant  $\mathcal{R}_h(\lambda_i(\underline{u}^* - \Pi\underline{u}^*))$  à  $\mathcal{R}_h(\lambda_i \underline{u}^*)$ , les problèmes locaux (8) consistent à présent à trouver  $\underline{e}_i \in \mathcal{U}_{0|\Omega_i}$  tel que :

$$\int_{\Omega_i} \text{Tr} [\mathbf{K}(\underline{e}_i)(\underline{u}^*)] \, d\Omega = \mathcal{R}_h(\lambda_i(\underline{u}^* - \Pi\underline{u}^*)) \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{0|\Omega_i}. \quad (9)$$

Les problèmes  $\mathcal{P}_i^T$  (9) sont auto-équilibrés et permettent de s'affranchir des difficultés liées à l'implémentation d'une procédure d'équilibrage telle que l'étape de calcul des densités d'effort équilibrées de la méthode EET. En pratique, à l'instar des problèmes  $\mathcal{P}_E^E$  (6), ces problèmes sont résolus de manière approchée par la MEF en déplacement associée à des fonctions d'interpolation enrichies de degré  $p + 3$ . Les solutions numériques  $\underline{e}_i$  issues de la résolution fine des problèmes  $\mathcal{P}_i^T$  (9) permettent de calculer, de manière équivalente, un estimateur d'erreur globale garanti et un champ de contrainte statiquement admissible de très bonne qualité :

$$\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} \leq \left( \sum_{E \in \mathcal{E}} \left\| \sum_{i \in \mathcal{I}_E^E} \underline{e}_{i|E} \right\|_{u,E}^2 \right)^{1/2}; \quad \hat{h}_{|E} = h_{|E} + \mathbf{K} \left( \sum_{i \in \mathcal{I}_E^E} \underline{e}_{i|E} \right), \quad (10)$$

avec  $\|\bullet\|_{u,E} = \left( \int_E \text{Tr} [\mathbf{K}(\bullet|_E)(\bullet|_E)] \, d\Omega \right)^{1/2}$ . Malgré sa précision et sa facilité de mise en œuvre, la technique SPET engendre un coût de calcul plus élevé que la technique EET, dû à la résolution fine des problèmes  $\mathcal{P}_i^T$  (9) définis à l'échelle du patch, contrairement aux problèmes  $\mathcal{P}_E^E$  (6) définis à l'échelle de l'élément.

### 3.3 La technique d'équilibrage par élément et patch d'éléments EESPT - méthode hybride

Cette nouvelle technique, introduite dans [2, 4], est hybride dans la mesure où elle exploite à la fois la notion de *condition de prolongement*, base de la technique EET, et celle de *partition de l'unité*, employée dans la technique SPET. A la manière de la technique EET, la démarche de construction d'un champ de contrainte en équilibre se scinde en deux étapes : (i) construction d'un ensemble de densités d'effort équilibrées sur les bords de chaque élément du maillage  $\mathcal{M}_h$ , dont la mise en œuvre est facilitée par l'introduction d'une partition de l'unité ; (ii) calcul d'un champ de contrainte admissible, solution du problème local  $\mathcal{P}_E^E$  (6). L'étape (ii) reste inchangée par rapport à la technique EET.

En remarquant que la restriction de la condition de prolongement (5) aux fonctions de forme EF linéaires  $\lambda_i \in \mathcal{U}_h^1$  est suffisante pour assurer l'équilibre intérieur entre les densités d'effort recherchées et les forces volumiques imposées, celle-ci peut être reformulée de manière globale ; puis, en utilisant les équations d'équilibre vérifiées par le champ de contrainte recherchée, les densités d'effort  $\hat{\underline{F}}_h$  doivent satisfaire :

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} \left[ \int_{\partial E} \eta_E \hat{\underline{F}}_h \cdot \underline{v}_h^* \, dS - \int_E \left( \text{Tr} [h(\underline{v}_h^*)] - \underline{f}_d \cdot \underline{v}_h^* \right) \, d\Omega \right] = 0 \quad \forall \underline{v}_h^* \in \mathcal{V}_h^1, \quad (11)$$

où  $\mathcal{V}_h^1$  désigne l'espace des fonctions polynomiales linéaires par morceaux qui sont continues sur chaque élément  $E \in \mathcal{E}$ , mais discontinues à l'interface entre deux éléments adjacents.

En s'appuyant sur la partition de l'unité définie par les fonctions de forme EF linéaires  $\lambda_i \in \mathcal{U}_h^1$ , on définit une nouvelle famille de problèmes  $\mathcal{P}_i^{\mathcal{I}}$  définis sur chaque patch  $\Omega_i$  contenant les éléments  $E \in \mathcal{E}_i^{\mathcal{I}}$  connectés au sommet  $i \in \mathcal{I}$  : Trouver  $\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}$  tel que :

$$a(\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}, \underline{v}_h^*) = \mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i \underline{v}_h^*) \quad \forall \underline{v}_h^* \in \mathcal{V}_h^1, \quad (12)$$

$$\text{où } a(\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}, \underline{v}_h^*) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}} \int_{\Gamma} \lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)} \cdot \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Gamma}^{\mathcal{I}}} \eta_E \underline{v}_h^*|_E \right) dS$$

$$\text{et } \mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i \underline{v}_h^*) = \int_{\Omega_i} \left( \text{Tr} [{}_h(\lambda_i \underline{v}_h^*)] - \underline{f}_d \cdot \lambda_i \underline{v}_h^* \right) d\Omega.$$

Une propriété remarquable associée aux problèmes  $\mathcal{P}_i^{\mathcal{I}}$  (12) est la connaissance *a priori* du noyau de l'opérateur bilinéaire  $a(\bullet, \bullet)$  : il s'agit de l'ensemble  $\bar{\mathcal{U}}_{h,0|\Omega_i}^1 = \left\{ \underline{v}_h^* \in \bar{\mathcal{V}}_h^1, \underline{v}_h^*|_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}} \cap \partial\Omega} = \underline{0} \right\}$ , où  $\bar{\mathcal{V}}_h^1$  désigne l'ensemble des fonctions  $\underline{v}_h^* \in \mathcal{V}_h^1$ , qui sont continues sur l'ensemble du patch  $\Omega_i$  et a fortiori aux interfaces  $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$ . En considérant l'espace  $\bar{\mathcal{U}}_{h,0|\Omega_i}^1$  et l'équilibre EF vérifiée par  $h$ , on montre que les problèmes  $\mathcal{P}_i^{\mathcal{I}}$  (12) sont bien posés pour un degré d'interpolation EF  $p \geq 2$ . En revanche, dans le cas  $p = 1$ , l'écriture des problèmes (12) est légèrement modifiée en remplaçant le terme  $\mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i \underline{v}_h^*)$  par  $\mathcal{Q}_{\Omega_i}(\lambda_i \underline{v}_h^*(\underline{x}_i))$  et assure ainsi l'existence d'une solution (voir [2] pour une description détaillée).

Enfin, l'unicité de la solution associée aux problèmes (12) est obtenue par minimisation d'une fonction-coût de la forme [2] :  $J_{\Omega_i}(\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}) = \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}} (\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)} - \lambda_i \underline{F}_h^{(i)})_{|\Gamma}^2$ , où les quantités connues  $\lambda_i \underline{F}_h^{(i)}$  font intervenir le vecteur contrainte EF aux interfaces  $\Gamma \in \mathcal{J}_i^{\mathcal{I}}$  et les efforts surfaciques donnés  $\underline{F}_d$ .

Finalement, en recherchant les solutions  $\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)}$  du problème de minimisation sous contraintes dans l'espace  $\mathcal{U}_{h|\Gamma}^p$ , le calcul des densités d'effort équilibrées sur chaque interface  $\Gamma \in \mathcal{J}$  se ramène à  $\hat{\underline{F}}_{h|\Gamma} = \sum_{i \in \mathcal{I}_{\Gamma}^{\mathcal{I}}} (\lambda_i \hat{\underline{F}}_h^{(i)})_{|\Gamma}$  en remarquant que les densités d'effort ainsi construites vérifient (11). En outre, les conditions imposées  $\eta_E \hat{\underline{F}}_h = \underline{F}_d$  sur les bords  $\Gamma \subset \partial_2\Omega$  sont prises en compte dans la résolution des problèmes de minimisation sous contraintes.

## 4 Résultats numériques

Les calculs numériques visant à comparer les différentes méthodes de construction de champs admissibles ont été menés sur un modèle 2D de capteur d'effort représenté Figure 1. Le maillage EF utilisé, constitué de 11 807 éléments triangle linéaire et 6320 nœuds (i.e. 12 640 degrés de liberté), a été raffiné dans les zones de forte contrainte. La solution quasi-exacte, dite de référence, a été calculée à partir d'un maillage très fin constitué de 3 326 963 éléments triangle linéaires et 1 668 711 nœuds (i.e. 3 337 422 d.d.l.). Le calcul numérique de l'erreur de référence globale conduit à :  $\|\underline{e}_h\|_{u,\Omega} \simeq 347.997$ .

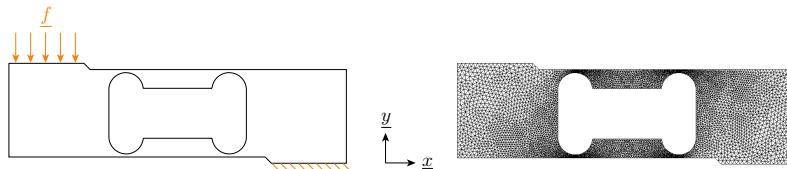


FIGURE 1 – Modèle 2D de capteur d'effort (gauche) et maillage éléments finis associé (droite).

Les caractéristiques principales associées aux différentes techniques sont regroupées dans la Tableau 1. Les résultats obtenus permettent de constater que la technique SPET est plus coûteuse, mais aussi plus performante que les techniques EET et EESPT. En effet, ces dernières fournissent des bornes d'erreur moins précises, mais offrent un coût de calcul environ 4 fois moins élevé que celui engendré par la technique SPET, ce qui constitue un réel avantage. Par ailleurs, le technique EESPT permet

de s'affranchir des difficultés liées à l'implémentation des techniques EET, rendant sa diffusion dans les codes de calcul industriels plus aisée. Finalement, la technique hybride EESPT semble être un bon compromis en terme de qualité de l'estimateur, coût de calcul et facilité d'implémentation.

TABLE 1 – Comparaison des estimateurs d'erreur globaux EET, SPET, et EESPT.

Methodes	Estimateur $e_{cre}$	Indice d'efficacité $e_{cre}/\ e_h\ _{u,\Omega}$	Temps CPU normalisé
EET	812.999	2.3362	1.000
SPET	556.629	1.5995	4.218
EESPT	812.801	2.3357	1.156

Les cartes représentant les contributions élémentaires à la mesure globale de l'erreur de discrétisation, ainsi que celles associées aux différents estimateurs d'erreur globaux sont données Figure 2. Les principales contributions à l'erreur de discrétisation et aux estimateurs d'erreur globaux sont localisées dans les régions les plus chargées de la structure.

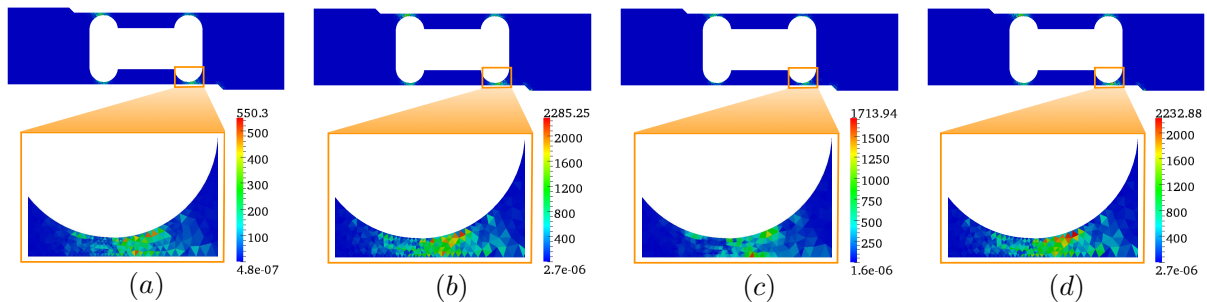


FIGURE 2 – Cartes des contributions locales à la mesure de l'erreur de discrétisation (a) et aux estimateurs d'erreur globaux obtenus par les techniques EET (b), SPET (c) et EESPT (d), respectivement.

## 5 Conclusion

Dans une démarche de vérification robuste, les méthodes d'estimation d'erreur actuelles reposent sur la construction d'une solution admissible, étape-clé dont la qualité définit la performance de l'estimateur d'erreur associé. Cette étude a porté sur la comparaison des différentes méthodes de construction de champs admissibles en terme de qualité de l'estimateur, coût de calcul et facilité d'implémentation. Il en ressort que la méthode standard (EET) offre un coût de calcul raisonnable, mais au prix d'une implémentation lourde. La méthode "flux-free" (SPET) fournit un estimateur de meilleure qualité et facile à mettre en œuvre, mais se révèle par ailleurs beaucoup plus coûteuse. Finalement, la méthode hybride (EESPT) semble être un bon compromis dans la mesure où sa mise en œuvre est plus aisée que celle de la méthode EET et le coût de calcul engendré, comparable à celui de la méthode EET, reste bien inférieur à celui de la SPET. Enfin, une version améliorée de la méthode EESPT basée sur la minimisation locale de l'énergie complémentaire est en cours de développement et vise à améliorer la qualité de l'estimateur d'erreur associé tout en conservant un coût de calcul acceptable.

## Références

- [1] Ladevèze, P., Pelle., J.P. 2004 *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*. Springer, New York.
- [2] Ladevèze, P., Chamoin, L., Florentin, E. 2010 A new non-intrusive technique for the construction of admissible stress fields in goal-oriented error estimation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **199** :766–777.
- [3] Parés, N., Díez, P., Huerta, A. 2006 Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **195**(4-6) :297–323.
- [4] Pled, F., Chamoin, L., Ladevèze, P. 2011 On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification : performances on engineering examples. *Int. J. Num. Meth. Engng.* (online).

- [5] Florentin, E., Gallimard, L., Pelle, J.P. 2002 Evaluation of the local quality of stresses in 3d finite element analysis. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **191** :4441–4457.