



HAL
open science

Fonctions arithmétiques et formes binaires cubiques et irréductibles

Armand Lachand

► **To cite this version:**

Armand Lachand. Fonctions arithmétiques et formes binaires cubiques et irréductibles. 2014. hal-01053649v2

HAL Id: hal-01053649

<https://hal.science/hal-01053649v2>

Preprint submitted on 5 Mar 2015 (v2), last revised 11 Mar 2016 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FONCTIONS ARITHMÉTIQUES ET FORMES BINAIRES CUBIQUES ET IRRÉDUCTIBLES

ARMAND LACHAND

ABSTRACT. Let $F(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ be an irreducible binary form of degree 3 and h an arithmetic function. In this article, we give some estimates for the average order $\sum_{|n_1| \leq x, |n_2| \leq x} h(F(n_1, n_2))$ when h satisfy certain conditions. We provide an asymptotic formula for the number of y -friable values of $F(n_1, n_2)$ when the variables n_1, n_2 lie in the square $[1, x]^2$ and uniformly for $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y \leq x$. This improves a result of Balog, Blomer, Dartyge and Tenenbaum in the case of cubic form. Our method also applies to some oscillating multiplicative functions like the Möbius function μ : this gives an other proof of the Chowla conjecture for binary and irreducible cubic forms, recently proved by Helfgott.

RÉSUMÉ. Soient $F(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible de degré 3 et h une fonction arithmétique. Dans cet article, nous obtenons des estimations de l'ordre moyen $\sum_{|n_1| \leq x, |n_2| \leq x} h(F(n_1, n_2))$ pour des fonctions h soumises à certaines conditions. On donne en particulier une formule asymptotique du nombre d'entiers y -friables de la forme $F(n_1, n_2)$ où (n_1, n_2) parcourent $[1, x]^2$, uniforme dans la région $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y \leq x$. Ceci améliore des résultats de Balog, Blomer, Dartyge et Tenenbaum dans le cas des formes cubiques. La méthode utilisée s'applique également à des fonctions multiplicatives oscillantes comme la fonction μ de Möbius : il s'ensuit une nouvelle preuve de la conjecture de Chowla pour les formes binaires cubiques irréductibles, récemment démontrée par Helfgott.

CONTENTS

1. Introduction	2
2. Formes cubiques et normes d'idéaux dans un corps cubique	8
2.1. Fonctions arithmétiques sur les idéaux	8
2.2. Notations et définition des idéaux admissibles	9
2.3. Transformation des sommes $M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; F; a_1, a_2, q)$ en sommes sur des idéaux admissibles	9
3. Sommes de Type I et niveau de distribution	11
3.1. Sommes d'exponentielles	11
3.2. Niveau de distribution de \mathcal{A}	13
3.3. Niveau de distribution de \mathcal{B}	20
4. La fonction de densité σ_q	21
4.1. Définition et premières propriétés	21
4.2. Ordres moyens de $\sigma_q h$	22
5. Description de la méthode	25
6. Premières applications des estimations de sommes de Type I	35
7. Estimations de sommes de Type II	45
8. Démonstration de la proposition 1.5 et applications	62
References	63

Date: March 5, 2015.

1. INTRODUCTION

Soient $F(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré 3 et h une fonction arithmétique. L'objet de ce travail est l'obtention de formules asymptotiques de l'ordre moyen

$$M_h(x; F) := \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq x} h(F(n_1, n_2))$$

pour diverses fonctions arithmétiques h dont l'indicatrice des entiers friables et la fonction μ de Möbius.

L'intérêt de considérer de telles sommes est multiple. La quantité $M_h(x; F)$ apparaît dans de nombreux problèmes arithmétiques (conjecture de Manin dans [dlBT12] et [dlBT13], crible algébrique (NFS) exposé dans le chapitre 6 de [CP05], etc.). D'autre part, il s'agit d'un angle d'attaque efficace pour étudier l'indépendance entre une propriété arithmétique relative à h et la représentation d'un entier par la forme binaire F . Enfin, les valeurs de F forment un ensemble lacunaire d'entiers, dans la mesure où

$$\frac{\log \#\{(n_1, n_2) : |F(n_1, n_2)| \leq x\}}{\log \#\{|n| \leq x\}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$$

et la persistance d'un phénomène arithmétique dans un ensemble de densité asymptotique nulle est un sujet important de la théorie des nombres, à l'origine de nombreuses conjectures.

Greaves [Gre70] initie l'étude de telles sommes en considérant la fonction de compte des diviseurs $h = \tau$. À partir de la convolution $\tau = 1 * 1$, il montre ainsi que, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute forme cubique irréductible F , il existe des constantes réelles $c_0(F) > 0$ et $c_1(F)$ telles que l'on ait, uniformément en $x \geq 2$, l'estimation

$$M_\tau(x; F) = c_0(F)x^2 \log x + c_1(F)x^2 + O_{\varepsilon, F}(x^{27/14+\varepsilon}),$$

formule asymptotique précisée par Daniel [Dan99] qui améliore sensiblement le terme d'erreur précédent en le remplaçant par $x^{15/8+\varepsilon}$.

Dans cette direction, il convient de mentionner les travaux de La Bretèche et Browning [dlBB06] qui obtiennent une borne supérieure de $M_h(x; F)$ uniforme pour une large classe de fonctions h soumises à certaines conditions de croissance et de sous-multiplicativité, majoration dans laquelle intervient la fonction γ_F définie par la formule

$$\gamma_F(d) := \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq d : d|F(n_1, n_2)\}.$$

Théorème 1.1 ([dlBB06], Corollary 1). *Soient $A > 0$, $B : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré $g \geq 1$ et h une fonction positive et sous-multiplicative satisfaisant $h(p) \leq A$ pour tout premier p et $h(n) \leq B(\varepsilon)n^\varepsilon$ pour tout entier n et $\varepsilon \in]0, 1]$. Uniformément en $x \geq 2$, on a l'estimation*

$$(1.1) \quad M_h(x; F) \ll_{A, B, F} x^2 \prod_{g < p \leq x} \left(1 + \frac{\gamma_F(p)}{p^2} (h(p) - 1)\right) + x(\log x)^{A^g - 1}.$$

Lorsque h désigne l'indicatrice $1_{\mathcal{E}}$ d'un ensemble d'entiers criblés \mathcal{E} , l'estimation précédente fournit une borne supérieure non triviale. La question de la détermination d'une minoration de $M_{1_{\mathcal{E}}}(x; F)$ est en général difficile et dépend fortement de l'ensemble \mathcal{E} en question.

Dans [Gre92], Greaves considère l'ensemble \mathcal{E}_k des entiers qui ne sont divisibles par aucune puissance k -ième de nombres premiers. Il montre ainsi que, pour tout $k \geq 2$ et toute forme cubique irréductible F , on a la formule asymptotique, uniforme en $x \geq 2$,

$$(1.2) \quad M_{1_{\mathcal{E}_k}}(x; F) = x^2 \prod_p \left(1 - \frac{\gamma_F(p^k)}{p^{2k}}\right) + O_{F, k} \left(\frac{x^2}{\log x}\right).$$

On peut également considérer l'indicatrice $1_{S(y)}$ où $S(y)$ désigne l'ensemble des entiers y -friables. On retrouve dans ce cas la fonction de comptage des valeurs friables de F , dans la mesure où

$$M_{1_{S(y)}}(x; F) = \Psi_F(x, y) := \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq x : P^+(F(n_1, n_2)) \leq y\}.$$

Au cours de leur étude du cardinal $\Psi_F(x, y)$, Balog, Blomer, Dartyge et Tenenbaum [[BBDT12], Theorem 1] ont montré entre autres que, pour toute forme binaire irréductible F de degré $g \geq 1$, on dispose de l'estimation non triviale

$$(1.3) \quad \alpha_F := \inf \left\{ \alpha : \Psi_F(x, x^\alpha) \gg_{\alpha, F} x^2 \text{ uniformément pour } x \geq x_0(\alpha, F) \right\} < g.$$

En particulier, quand F est de degré 3, ils montrent que $\alpha_F \leq e^{-1/2}$ est admissible. La motivation principale de cet article est de préciser ce résultat, dans le cas des formes cubiques irréductibles, en montrant la formule asymptotique

$$(1.4) \quad M_{1_{S(y)}}(x; F) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \rho(3u)$$

où $u := \frac{\log x}{\log y}$, uniformément dans un domaine en (x, y) à préciser.

L'ensemble des résultats cités ci-dessus ont en commun l'emploi récurrent de sommes de Type I, c'est-à-dire des estimations des cardinaux

$$A_d(x) := \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq x : d | F(n_1, n_2)\}$$

en moyenne sur $d \leq x^{2-o(1)}$. Il est naturel d'approcher $A_d(x)$ par la quantité $\frac{\gamma_F(d)}{d^2} x^2$. En posant

$$(1.5) \quad r_d(x) := A_d(x) - \frac{\gamma_F(d)}{d^2} x^2,$$

le lemme 3.3 de [Dan99] entraîne que, dans le cas où F est une forme cubique irréductible, on dispose de l'estimation de sommes de Type I suivante

$$(1.6) \quad \sum_{d \leq D} |r_d(x)| \ll_F x \sqrt{D} (\log 2D)^{7203} + D (\log 2D)^8.$$

Lorsque $h(m)$ présente un caractère oscillant au regard du nombre de facteurs premiers de m comptés avec multiplicité, noté $\Omega(m)$, il n'est en général pas possible de déduire des résultats satisfaisants à partir des seules estimations de sommes de Type I. C'est là l'incidence du phénomène de parité, mis en lumière par Selberg [Sel52] puis Bombieri [Bom76] – on trouvera un survol dans le chapitre 16 de [FI10]. En principe, il est possible de contourner ce problème si l'on dispose d'une estimation de sommes de Type II, c'est-à-dire d'une majoration non triviale de sommes bilinéaires de la forme

$$\sum_{U < r \leq 2U} \sum_{V < s \leq 2V} a_r b_s \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq x : rs = F(n_1, n_2)\}$$

pour des choix convenables de U et V , où b_s satisfait une hypothèse de type Siegel-Walfisz.

Heath-Brown [HB01] estime une telle quantité pour la forme $F(X_1, X_2) = X_1^3 + 2X_2^3$ à l'aide entre autres d'une inégalité de grand crible et d'un comptage de points sur une hypersurface. Il en déduit l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $n_1^3 + 2n_2^3$ à travers la formule asymptotique

$$\#\left\{ x < n_1, n_2 \leq x \left(1 + (\log x)^{-c_0} \right) : \begin{array}{l} n_1^3 + 2n_2^3 \\ \text{premier} \end{array} \right\} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \prod_p \left(1 - \frac{\nu_p - 1}{p} \right) \frac{x^2}{3(\log x)^{2c_0+1}}$$

pour une constante $c_0 > 0$ convenablement choisie, où ν_p désigne le nombre de racines de la congruence $X^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$. Par la suite, une généralisation de ce travail aux valeurs des polynômes de la forme $F(a_1 + X_1q, a_2 + X_2q)$ où F est une forme cubique

irréductible sur \mathbf{Z} à coefficients entiers et $(a_1, a_2, q) = 1$ a été effectuée par Heath-Brown et Moroz [HBM02, HBM04].

Enfin, les estimations de Type II obtenues dans [HBM02] ont été utilisées par Helfgott pour établir la validité de la conjecture de Chowla [Cho65], bien que les identités combinatoires mises en œuvre soient différentes de celles intervenant dans les travaux de Heath-Brown et Moroz¹. Dans le théorème principal de [Hel], il montre en particulier la formule suivante, valide pour toute forme irréductible $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ de degré 3 et tout $\varepsilon > 0$, et uniforme en $x \geq 16$,

$$(1.7) \quad M_\mu(x; F) = \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq x} \mu(F(n_1, n_2)) \ll_{F, \varepsilon} \frac{(\log \log x)^4 (\log \log \log x)^\varepsilon}{\log x} x^2.$$

Soient $q \geq 1$ et $1 \leq a_1, a_2 \leq q$ des entiers tels que $(a_1, a_2, q) = 1$. Étant donné une fonction arithmétique h , une forme binaire F et un compact $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$, on définit

$$M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; F; a_1, a_2, q) := \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathcal{K} \cdot x \cap \mathbf{Z}^2 \\ (a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q) = 1}} h(F(a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q))$$

où $\mathcal{K} \cdot x := \{(t_1 x, t_2 x) : (t_1, t_2) \in \mathcal{K}\}$. Dans le présent travail, nous étudions la somme $M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; F; a_1, a_2, q)$ pour diverses fonctions multiplicatives h .

En considérant le cas $h = 1_{S(y)}$ de l'indicatrice des friables, nous retrouvons le cardinal

$$\Psi_F^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x, y; a_1, a_2, q) := \#\left\{ (n_1, n_2) \in \mathcal{K} \cdot x \cap \mathbf{Z}^2 : (a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q) = 1 \right. \\ \left. \text{et } P^+(F(a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q)) \leq y \right\},$$

quantité qui intervient directement dans l'algorithme de factorisation du crible algébrique (voir le chapitre 6.2 de [CP05]). Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1.2. *Soient $\varepsilon > 0$, $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré 3, $0 \leq a_1, a_2 \leq q$ des entiers tels que $(a_1, a_2, q) = 1$ et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe C^1 par morceaux tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. Uniformément dans le domaine*

$$(1.8) \quad x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right) \leq y,$$

on a

$$(1.9) \quad \Psi_F^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x, y; a_1, a_2, q) = \prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \text{Vol}(\mathcal{K}) x^2 \rho(3u) + O\left(\frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right).$$

De plus, si (x, y) parcourt le domaine

$$(1.10) \quad x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y \leq x^{1/2-\varepsilon},$$

alors le terme d'erreur dans (1.9) peut être remplacé par $x^2 \exp\left(-(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}\right)$.

Compte tenu de l'estimation

$$\rho(u) = \exp(-u \log u (1 + o(1))) \quad (u \rightarrow +\infty),$$

1. Helfgott utilise des itérations de l'identité de Vaughan en lieu et place de l'identité de Buchstab.

on observe que le théorème 1.2 donne un équivalent de $\Psi_F^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x, y; a_1, a_2, q)$ dans le domaine $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y$. En prenant $q = 1$, $a_1 = a_2 = 0$ et en utilisant une convolution pour enlever la condition de coprimauté, on montre le corollaire suivant, qui améliore les résultats de [BBDT12] dans le cas des formes cubiques irréductibles, en établissant la validité de (1.4) et en augmentant la région dans laquelle on dispose d'une estimation de $\Psi_F(x, y)$.

Corollaire 1.3. *Soient $\varepsilon > 0$ et $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré 3. On a, uniformément en $x, y \geq 3$,*

$$(1.11) \quad \Psi_F(x, y) = x^2 \rho(3u) + O\left(\frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right).$$

De plus, si (x, y) parcourt le domaine (1.10), alors le terme d'erreur dans (1.11) peut être remplacé par $x^2 \exp\left(-(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}\right)$.

Dans le domaine $y \leq \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, l'estimation (1.11) est une conséquence du corollaire 1 de [dlBB06] (voir le théorème 1.1). On observe en effet que l'estimation

$$\Psi_F([1, x]^2, y) \ll x^2 \prod_{y < p \leq x} \left(1 - \frac{\gamma_F(p)}{p^2}\right) + x \ll \frac{x^2}{u} + x$$

implique (1.11) dès que $u \geq (\log \log x)^{1-\varepsilon}$.

Au premier abord, il peut paraître surprenant d'obtenir un résultat plus précis pour les grandes valeurs de u , à savoir lorsque $u > 2$. Ceci est dû notamment à la méthode employée : une partie de la contribution des termes impliqués dans l'identité combinatoire introduite dans le paragraphe 5 disparaît lorsque u devient suffisamment grand (voir aussi la proposition 1.5 *infra*).

Considérons également l'ensemble $\mathcal{M}(w)$ des fonctions h multiplicatives, bornées par 1 et satisfaisant $h(p) = w$ pour tout premier p , où $w \neq 1$ est un complexe de module 1. La méthode développée dans ce travail permet d'évaluer $M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; F; a_1, a_2, q)$ avec une certaine uniformité en w .

Théorème 1.4. *Soient $\varepsilon > 0$, $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré 3, $0 \leq a_1, a_2 \leq q$ des entiers tels que $(a_1, a_2, q) = 1$ et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. On a, uniformément en w un complexe de module 1 satisfaisant $|\operatorname{Re}(w) - 1| \geq \frac{1}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}$, $h \in \mathcal{M}(w)$ et $x \geq 3$,*

$$(1.12) \quad M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; F; a_1, a_2, q) \ll \frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}.$$

En effectuant le choix $h(n) = \mu(n)$, ce résultat permet de retrouver la formule (1.7) due à Helfgott [Hel] avec un terme d'erreur plus faible.

On peut en déduire aussi la majoration de la somme d'exponentielles

$$(1.13) \quad \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathcal{K} \cdot x \cap \mathbf{Z}^2 \\ (n_1, n_2) = 1}} e(i\theta \Omega(F(n_1, n_2))) \ll \frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}$$

avec $e(t) := \exp(2i\pi t)$, valide uniformément pour θ satisfaisant $\|\theta - 1\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \geq \frac{1}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}$ où $\|\cdot\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

Soulignons que, pour tout complexe w satisfaisant $|w| < 1$, le corollaire 1 de [dlBB06] (voir le théorème 1.1) permet d'obtenir directement la borne supérieure

$$M_h(x; F) \leq \sum_{n_1, n_2 \leq x} |h(F(n_1, n_2))| \ll x^2 (\log x)^{|w|-1}$$

pour toute fonction h multiplicative, bornée par 1 et satisfaisant $h(p) = w$ pour tout premier p . D'autre part, les estimations de sommes de Type I permettent de déterminer un équivalent asymptotique de $M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; F; a_1, a_2, q)$ pour les fonctions h dans $\mathcal{M}(1)$ (c'est-à-dire multiplicatives, bornées par 1 et satisfaisant $h(p) = 1$ pour tout premier p), à l'image de l'argument détaillé par Greaves [Gre92] pour obtenir la formule (1.2).

Dans les dernières lignes de cette introduction, décrivons succinctement la méthode employée en vue de futures applications. Soient w un complexe de module 1, $y_1, y_2 \geq 1$ des réels ou $y_2 = +\infty$ et $\mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ l'ensemble des fonctions h multiplicatives, bornées par 1 et satisfaisant les conditions suivantes :

- (1) h est à support sur les entiers m tels que $P^-(m) > y_1$ et $P^+(m) \leq y_2$,
- (2) pour tout premier p dans l'intervalle $]y_1, y_2]$, on a $h(p) = w$.

Avec ces notations, on vérifie que $1_{S(y)} \in \mathcal{M}(1; 1, y)$ et que les fonctions $h \in \mathcal{M}(w)$ considérées dans le théorème 1.4 sont des éléments de $\mathcal{M}(w; 1, +\infty)$.

Reprenant les travaux de Heath-Brown et Moroz, l'étape cruciale des preuves des théorèmes 1.2 et 1.4 consiste à réduire l'estimation de $M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; F; a_1, a_2, q)$ à l'étude asymptotique de l'ordre moyen

$$(1.14) \quad M_{\sigma_q^{\mathbf{Z}} h}(x) := \sum_{m \leq x} h(m) \sigma_q^{\mathbf{Z}}(m)$$

où $\sigma_q^{\mathbf{Z}}$ est une fonction de densité définie par la formule (4.12) au paragraphe 4.1 dont la série de Dirichlet associée $\sum_m \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(m)}{m^s}$ est analytiquement proche de la fonction zêta de Dedekind $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ d'un corps cubique \mathbf{K} .

Il nous est apparu plus commode de présenter cette étape, détaillée au cours des paragraphes 5, 6 et 7, dans le cadre plus général des fonctions $\mathcal{M}(w; y_1, y_2)$. Nous espérons que cette généralisation trouvera des applications supplémentaires dans d'autres circonstances. La proposition 1.5 ci-dessous décrit ce qui précède quand les entiers (n_1, n_2) parcourent un carré de côté $x/(\log x)^{-c_0}$ avec $c_0 > 0$ suffisamment grand, en reliant l'ordre moyen de h sur les valeurs de F à celui de $\sigma_q^{\mathbf{Z}} h$.

Proposition 1.5. *Soient $\varepsilon \geq 0$ et $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré 3. Pour toute constante $c_0 \gg_F 1$ suffisamment grande et uniformément en $x \geq 2$, $(M_1, M_2) \in [1, x]^2$ tels que $F(M_1, M_2) > x^3/(\log x)^{3c_0/4}$, $0 \leq a_1, a_2 \leq q$ des entiers tels que $(a_1, a_2, q) = 1$, $y_2 \geq \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; 1, y_2)$,*

$$(1.15) \quad \frac{(\log x)^{2c_0}}{x^2} \sum_{\substack{M_1 \leq n_1 \leq M_1 + x/(\log x)^{-c_0} \\ M_2 \leq n_2 \leq M_2 + x/(\log x)^{-c_0} \\ (n_1, n_2) = 1}} h(F(a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q)) = \sigma_q(F) \Delta_{\sigma_q^{\mathbf{Z}} h}(F(M_1, M_2), (\log x)^{-c_0}) \\ + O\left(\frac{1}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$$

où $\sigma_q(F) > 0$ est défini par (4.9) et, pour tout $t > 0$,

$$\Delta_{\sigma_q^Z h}(t, (\log x)^{-c_0}) := \frac{(\log x)^{c_0}}{F(M_1, M_2)} \sum_{F(M_1, M_2) < m \leq F(M_1, M_2)(1 + (\log x)^{-c_0})} h(m) \sigma_q^Z(m).$$

D'autre part, si $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ où $y_1, y_2 \geq \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, alors on a

$$(1.16) \quad \frac{(\log x)^{2c_0}}{x^2} \sum_{\substack{M_1 \leq n_1 \leq M_1 + x/(\log x)^{-c_0} \\ M_2 \leq n_2 \leq M_2 + x/(\log x)^{-c_0} \\ (n_1, n_2) = 1}} h(F(a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q)) = \sigma_q(F) \Delta_{\sigma_q^Z h}(F(M_1, M_2), (\log x)^{-c_0}) + O\left(\frac{\log x}{(\log y_1)^2 (\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right).$$

Si, de plus, $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y_1 \leq y_2 \leq x^{1/2-\varepsilon}$, alors on peut remplacer dans (1.15) et (1.16) le terme $1/(\log \log x)^{1-\varepsilon}$ par $\exp\left(-(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}\right)$.

En général, diverses méthodes d'analyse complexe (formule de Perron, méthode de Selberg-Delange, méthode du col, etc.) permettent d'estimer l'ordre (1.14) et donc d'évaluer la différence $\Delta_{\sigma_q^Z h}(F(M_1, M_2), t)$. Dans la mesure où ces outils dépendent de la fonction h considérée, nous n'avons pas donné un résultat général pour estimer cette dernière quantité. Au paragraphe 4.2, nous étudions asymptotiquement la quantité $M_{\sigma_q^Z h}(x)$ dans le cas où h désigne l'indicatrice des entiers friables ou $h \in \mathcal{M}(w)$ en utilisant des méthodes standards d'analyse complexe.

Conventions. Dans la suite de cet article, les constantes impliquées dans les symboles de Vinogradov et de Landau dépendent toutes de F . On emploie les notations en usage dans les travaux de Heath-Brown et Moroz, à savoir que la lettre c désignera une constante positive dépendant la forme F et pouvant varier à chaque occurrence. De même, pour tout paramètre B , la lettre $c(B)$ désignera une fonction de B et F , éventuellement différente à chaque apparition. Il convient de souligner que, dans [HB01], [HBM02], [HBM04], [Hel] et dans le présent travail, les constantes ne sont pas effectives, en raison de l'incidence du zéro de Siegel dans les arguments utilisés pour établir les estimations de sommes de Type II (voir le paragraphe 7). Mentionnons enfin que l'auteur, dans ses travaux de thèse [Lac14], montrent que l'ensemble des résultats présentés dans cet article demeurent valables uniformément en $q \leq (\log x)^A$ où A est une constante arbitrairement grande.

Ce travail présente l'organisation suivante. Au paragraphe 2, nous réduisons le problème à l'étude d'une fonction arithmétique sur les idéaux d'un corps cubique \mathbf{K} ce qui nous conduit, au paragraphe 3, à l'étude la distribution multiplicative de certains ensembles d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$. Le paragraphe 4 contient la définition et les premières propriétés de la fonction de densité σ_q^Z déjà mentionnée dans cette introduction. Au paragraphe 5, nous donnons un argument combinatoire qui a pour but d'adapter les méthodes d'Heath-Brown et Moroz à notre problème. Les paragraphes 6 et 7 sont essentiellement consacrés à l'estimation des termes d'erreur qui apparaissent dans la discussion du paragraphe qui les précède. Enfin, on illustre l'utilisation de la méthode dans le paragraphe 8 en l'appliquant pour démontrer les théorèmes 1.2 et 1.4.

Remerciements. L'auteur tient à remercier très chaleureusement sa directrice de thèse Cécile Dartyge pour son accompagnement tout au long de ce travail. Il exprime

aussi sa sincère reconnaissance à Régis de La Bretèche pour ses nombreuses remarques autour de la rédaction de cet article.

2. FORMES CUBIQUES ET NORMES D'IDÉAUX DANS UN CORPS CUBIQUE

À la suite de Heath-Brown et Moroz, transcrivons le problème considéré dans le langage des corps de nombres. Le passage entre forme cubique irréductible et corps de nombres se justifie à l'aide du lemme 2.1 de [HBM02].

Lemme 2.1 ([HBM02], Lemma 2.1). *Soit $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire cubique, primitive et irréductible sur \mathbf{Z} . Il existe un corps de nombres réel \mathbf{K} de degré 3, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ et des entiers $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

- le sous-module $\Lambda(\omega_1, \omega_2) := \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2\}$ est de rang 2,
- $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\theta_0)$ où $\theta_0 := \frac{\omega_2}{\omega_1}$,
- si \mathfrak{d} désigne l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ engendré par $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$, $N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}$ la norme de \mathbf{K} sur \mathbf{Q} et N la norme des idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, alors

$$(2.1) \quad F(X_1, X_2) = \frac{N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(X_1\omega_1 + X_2\omega_2)}{N(\mathfrak{d})}.$$

Réciproquement, l'équation (2.1) définit une forme binaire cubique, primitive et irréductible sur \mathbf{Z} .

Dans toute la suite, on considère un corps de nombres réel \mathbf{K} de degré 3. On note $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ son anneau d'entiers, $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ le monoïde des idéaux entiers non nuls de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ et $\lambda_{\mathbf{K}}$ le résidu de la fonction zêta de Dedekind $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ en $s = 1$. De plus, \mathfrak{p} désignera un idéal premier au dessus de p et $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{l}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ et \mathfrak{s} des idéaux entiers.

2.1. Fonctions arithmétiques sur les idéaux. Conséquence de la théorie des anneaux de Dedekind, l'existence et l'unicité de la décomposition d'un idéal en idéaux premiers permet d'étendre aux éléments de $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ des notions arithmétiques initialement définies sur les anneaux factoriels², à l'image de la valuation \mathfrak{p} -adique, notée $v_{\mathfrak{p}}$, et du plus grand diviseur commun, déjà utilisé dans la définition de \mathfrak{d} . Dans cette direction, on dira qu'une fonction $g : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{C}$ est multiplicative si $g(\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2) = g(\mathfrak{j}_1)g(\mathfrak{j}_2)$ dès que $(\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2) = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$. Des exemples de fonctions multiplicatives sur les idéaux sont donnés par la fonction de Möbius $\mu_{\mathbf{K}}$ et la fonction diviseur $\tau_{\mathbf{K}}$ sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$, définies comme les fonctions multiplicatives satisfaisant, pour tout idéal premier \mathfrak{p} et $k \geq 1$, la formule

$$\mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}^k) := \begin{cases} -1 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}^k) := k + 1.$$

On introduit également les fonctions $\Omega_{\mathbf{K}}$ et $\omega_{\mathbf{K}}$ qui comptent le nombre de facteurs premiers avec ou sans leur ordre de multiplicité, définies par

$$\Omega_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) := \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{j}} v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j}) \quad \text{et} \quad \omega_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) := \#\{\mathfrak{p}|\mathfrak{j}\}.$$

Étant donné une fonction arithmétique g définie sur \mathbf{Z} , on lui associe naturellement une fonction définie sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ notée encore g par la formule $g(\mathfrak{j}) := g(N(\mathfrak{j}))$. Réciproquement, on associe à une fonction g définie sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ la fonction $g^{\mathbf{Z}}$ définie par

$$g^{\mathbf{Z}}(n) := \sum_{N(\mathfrak{j})=n} g(\mathfrak{j}).$$

Dans la preuve du lemme 4.2 de [HB01], Heath-Brown énonce les inégalités suivantes, conséquences de la décomposition des idéaux en idéaux premiers,

$$(2.2) \quad \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \leq \tau(N(\mathfrak{j}))^3 \quad \text{et} \quad \#\{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(\mathfrak{j}) = n\} \leq \tau(n)^2.$$

² Voir à ce sujet la note 5 du chapitre 9 de [Nar04].

où $\tau := \tau_{\mathbf{K}}$ désigne la fonction diviseur standard.

Le lemme 6.1 de [HBM02] reformulé ci-dessous fournit une première estimation de l'ordre moyen de $\tau_{\mathbf{K}}$ sur les idéaux de la forme $(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)$.

Lemme 2.2 ([HBM02], Lemma 6.1). *Soient $x_1 \geq x_2 \geq 1$ des réels. Pour tout entier $B \geq 0$, il existe une constante $c(B) \geq 0$ telle que*

$$(2.3) \quad \sum_{\substack{|n_1| \leq x_1, |n_2| \leq x_2 \\ n_2 \neq 0}} \left| \tau_{\mathbf{K}}((n_1\omega + n_2\omega_2))^B \right| \leq x_1 x_2 (\log(2x_1))^{c(B)}.$$

2.2. Notations et définition des idéaux admissibles. Comme observé dans le paragraphe 2 de [HBM02], certains nombres premiers présentent un comportement particulier et nécessiteront un traitement spécifique. Dans la suite, on dira qu'un nombre premier est **q -singulier** s'il est ramifié dans $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ ou s'il divise q , $N(\omega_1\omega_2)$ ou l'indice $[\mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \mathbf{Z}[\theta]]$ avec $\theta := \theta_0 N(\omega_1 \mathfrak{d}^{-1})$, et **q -régulier** sinon. On note ω_{q-s} le nombres de premiers q -singuliers. Par extension, un idéal premier \mathfrak{p} est dit **q -singulier** (resp. **q -régulier**) s'il est situé au-dessus d'un nombre premier q -singulier (resp. q -régulier). Un entier ou un idéal dont tous les diviseurs premiers sont q -singuliers (resp. q -réguliers) est également dit **q -singulier** (resp. **q -régulier**). L'unicité de la décomposition en idéaux premiers dans les anneaux de Dedekind permet de définir, pour un idéal \mathfrak{j} et un entier m , les **parties q -singulières** et **q -régulières** par les formules

$$\begin{aligned} \mathfrak{j}_{q-r} &:= \prod_{\mathfrak{p} \text{ } q\text{-régulier}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j})}, & \mathfrak{j}_{q-s} &:= \prod_{\mathfrak{p} \text{ } q\text{-singulier}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j})}, \\ m_{q-r} &:= \prod_{\mathfrak{p} \text{ } q\text{-régulier}} p^{v_{\mathfrak{p}}(m)} & \text{et} & \quad m_{q-s} := \prod_{\mathfrak{p} \text{ } q\text{-singulier}} m^{v_{\mathfrak{p}}(m)}. \end{aligned}$$

où v_p désigne la valuation p -adique rationnelle. D'une manière analogue, on définit la **composante y -friable** et la **composante y -criblée** par

$$\begin{aligned} \mathfrak{j}^-(y) &:= \prod_{p \leq y} \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j})}, & \mathfrak{j}^+(y) &:= \prod_{p > y} \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j})}, \\ m^-(y) &:= \prod_{p \leq y} p^{v_p(m)} & \text{et} & \quad m^+(y) := \prod_{p > y} p^{v_p(m)}. \end{aligned}$$

On introduit enfin la **composante p -adique** d'un idéal \mathfrak{j} , notée \mathfrak{j}_p , comme l'unique diviseur de \mathfrak{j} satisfaisant $N(\mathfrak{j}_p) = p^{v_p(N(\mathfrak{j}))}$, de sorte que $\mathfrak{j} = \prod_p \mathfrak{j}_p$.

Le comportement des idéaux premiers 1-réguliers qui interviennent dans la décomposition des idéaux $(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)$ fait l'objet du lemme 2.2 de [HBM02].

Lemme 2.3 ([HBM02], Lemma 2.2). *Soient n_1 et n_2 deux entiers premiers entre eux, p un nombre premier 1-régulier, \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 deux idéaux premiers au dessus de p tels que \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 divisent $(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\mathfrak{d}^{-1}$. Alors $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ et $N(\mathfrak{p}_1) = p$.*

Au regard de ce résultat, on dira qu'un idéal \mathfrak{j} est **admissible** si sa partie 1-régulière est de la forme

$$\mathfrak{j}_{1-r} = \mathfrak{p}_1^{k_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{k_n}$$

où $N(\mathfrak{p}_i)$ est premier et $N(\mathfrak{p}_i) \neq N(\mathfrak{p}_j)$ dès que $1 \leq i < j \leq n$.

2.3. Transformation des sommes $M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; F; a_1, a_2, q)$ en sommes sur des idéaux admissibles. Soit $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, tel que $F(\mathcal{K}) \subset [0, 1]$. Recouvrons $\mathcal{K} \cdot x$ en carrés de la forme

$$C(N_1, N_2) := \{(n_1, n_2) : x\eta N_i \leq n_i < x\eta(N_i + 1) \text{ pour } i = 1, 2\}$$

où $\eta := (\log x)^{-c_0}$ pour une constante $c_0 > 0$ que l'on déterminera *a posteriori* et $0 \leq N_i \leq \eta^{-1}$ pour $i = 1, 2$. On s'attend à ce que les éléments de \mathcal{K} mis à l'écart par cette approche contribuent de manière négligeable puisque l'on a

$$(2.4) \quad \#\{0 \leq N_1, N_2 \leq \eta^{-1} : \emptyset \subsetneq C(N_1, N_2) \cap \mathcal{K} \cdot x \subsetneq C(N_1, N_2)\} \ll \eta^{-1}.$$

Définissons

$$(2.5) \quad c_q(N_1, N_2) := |F(qN_1\eta, qN_2\eta)|.$$

Pour s'assurer que $c_q(N_1, N_2)$ soit suffisamment grand, on introduit l'ensemble

$$\mathcal{N}(\eta) := \left\{ 1 \leq N_1, N_2 \leq \eta^{-1} : C(N_1, N_2) \subset \mathcal{K} \cdot x, (N_1\eta, N_2\eta) \notin \bigcup_{j=1}^3 S(\theta_j) \right\}$$

où θ_1, θ_2 et θ_3 désignent les racines de $F(X, 1)$ et

$$S(\theta) := \left\{ 0 \leq y_1, y_2 \leq 1 : |y_1 - y_2\theta| \leq \eta^{\frac{1}{4}} \right\}.$$

On a alors, uniformément en $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,

$$(2.6) \quad c_q(N_1, N_2) \gg \prod_{j=1}^3 |N_1\eta - N_2\eta\theta_j| > \eta^{\frac{3}{4}}$$

et

$$(2.7) \quad \#\left\{ 0 \leq N_1, N_2 \leq \eta^{-1} : (N_1\eta, N_2\eta) \in \bigcup_{j=1}^3 S(\theta_j) \right\} \ll \eta^{-\frac{7}{4}}.$$

Considérons l'ensemble d'idéaux

$$(2.8) \quad \mathcal{A}(N_1, N_2; a_1, a_2, q) := \left\{ ((a_1 + n_1q)\omega_1 + (a_2 + n_2q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1} : (n_1, n_2) \in C(N_1, N_2) \right. \\ \left. \text{et } (a_1 + n_1q, a_2 + n_2q) = 1 \right\}$$

que l'on notera plus simplement \mathcal{A} dans la suite, s'il n'y a pas d'ambiguïté. À l'image du lemme 2.3 de [HBM02], on peut montrer que les éléments de \mathcal{A} sont tous distincts et que $c_q(N_1, N_2)x^3$ est la valeur moyenne de $|F(a_1 + X_1q, a_2 + X_2q)|$ sur $C(N_1, N_2)$.

Lemme 2.4. *On a, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $(n_1, n_2) \in C(N_1, N_2)$, l'estimation*

$$(2.9) \quad |F(a_1 + n_1q, a_2 + n_2q)| = c_q(N_1, N_2)x^3 \left(1 + O\left(\eta^{\frac{1}{4}}\right) \right).$$

De plus, il existe $x_0 \geq 1$ tel que la relation

$$(2.10) \quad \left\{ (n_1, n_2) \in C(N_1, N_2) : (a_1 + n_1q, a_2 + n_2q) = 1 \right\} \xrightarrow{(n_1, n_2)} \mathcal{A} \\ \mapsto ((a_1 + n_1q)\omega_1 + (a_2 + n_2q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1}$$

induit une bijection dès que $x \geq x_0$.

Proof. La relation (2.9) est une conséquence de la formule de Taylor et de la définition (2.5).

Le caractère bijectif de la correspondance (2.10) est une conséquence de la démonstration de [[HBM02], Lemma 2.3]. \square

Compte tenu des observations précédentes, on peut majorer trivialement la contribution des $(n_1, n_2) \in C(N_1, N_2)$ avec $(N_1, N_2) \notin \mathcal{N}(\eta)$ pour écrire, pour toute fonction arithmétique h bornée par 1, l'estimation

$$(2.11) \quad M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; F; a_1, a_2, q) = \sum_{(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)} M_h(\mathcal{A}(N_1, N_2; a_1, a_2, q)) + O\left(\eta^{1/4}x^2\right)$$

où

$$(2.12) \quad M_h(\mathcal{A}) := \sum_{j \in \mathcal{A}} h(j).$$

Comme souligné dans l'introduction, on verra au paragraphe 5 que la relation (2.9) permet de comparer $M_h(\mathcal{A}(N_1, N_2; a_1, a_2, q))$ à la quantité plus régulière $M_{h\sigma_q}(\mathcal{B}(N_1, N_2; q))$ où σ_q est une fonction de densité qui sera introduite au paragraphe 4,

$$(2.13) \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}(N_1, N_2; q) := \left\{ j \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : c_q(N_1, N_2)x^3 < N(j) \leq c_q(N_1, N_2)x^3(1 + \eta) \right\}.$$

et

$$(2.14) \quad M_{h\sigma_q}(\mathcal{B}) := \sum_{j \in \mathcal{B}} h(j)\sigma_q(j).$$

3. SOMMES DE TYPE I ET NIVEAU DE DISTRIBUTION

Dans cette partie, on étudie la distribution multiplicative des éléments de \mathcal{A} et \mathcal{B} définis par (2.8) et (2.13) en adaptant essentiellement les arguments du paragraphe 5 de [HB01], du paragraphe 3 de [HBM02] et du paragraphe 2 de [HBM04].

3.1. Sommes d'exponentielles. Étant donné des entiers g_1 et g_2 et un idéal admissible \mathfrak{i} , considérons la somme d'exponentielles

$$E(g_1, g_2; \mathfrak{i}) = E(a_1, a_2, q; g_1, g_2; \mathfrak{i}) := \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq N(\mathfrak{i}) \\ \mathfrak{i} | ((a_1 + n_1 q)\omega_1 + (a_2 + n_2 q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1}}} e\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{N(\mathfrak{i})}\right)$$

où $e(t) := \exp(2i\pi t)$. L'estimation d'une telle quantité constitue un ingrédient de base dans de nombreux travaux relatifs aux formes cubiques (voir par exemple le paragraphe 2.4 de [Gre71] ou le paragraphe 5 de [HB01]) et intervient fréquemment dans la majoration des sommes de Type I.

Une étude de $E(g_1, g_2; \mathfrak{i})$ s'initie en observant la relation de multiplicativité

$$(3.1) \quad E(g_1, g_2; \mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2) = E(g_1, g_2; \mathfrak{i}_1) E(g_1, g_2; \mathfrak{i}_2)$$

valable dès que $(N(\mathfrak{i}_1), N(\mathfrak{i}_2)) = 1$. Conséquence directe du théorème des restes chinois (voir le lemme 2.1 de [HBM04]), l'identité (3.1) permet essentiellement de ramener l'étude de $E(g_1, g_2; \mathfrak{i})$ à la démonstration du lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soient \mathfrak{p} un idéal premier non ramifié tel que $N(\mathfrak{p}) = p$ avec $p \nmid qN(\omega_1\omega_2)$ et $k \geq 1$. On a*

$$E(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \begin{cases} p^k e\left(-\frac{(a_1 g_1 + a_2 g_2) q^{-1}}{p^k}\right) & \text{si } \mathfrak{p}^k | (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où q^{-1} est la solution modulo p^k du système $qq^{-1} \equiv 1 \pmod{p^k}$.

En vue d'établir ce résultat, nous étudions dans un premier temps la somme d'exponentielles

$$E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) := \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq N(\mathfrak{p}^k) \\ (n_1, n_2, N(\mathfrak{p})) = 1 \\ \mathfrak{p}^k | (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2)}} e\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{N(\mathfrak{p}^k)}\right).$$

Lemme 3.2. *Soient \mathfrak{p} un idéal premier non ramifié tel que $N(\mathfrak{p}) = p$, $p \nmid N(\omega_1\omega_2)$ et $k \geq 1$. Si $(g_1, g_2, p) = 1$, alors on a*

$$(3.2) \quad E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \begin{cases} (p-1)p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^k | (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ -p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-1} \parallel (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, si $(g_1, g_2, p^k) = p^{k_0}$ avec $k_0 < k$, alors on a

$$(3.3) \quad E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = p^{k_0} E^{(1)}\left(\frac{g_1}{p^{k_0}}, \frac{g_2}{p^{k_0}}; \mathfrak{p}^{k-k_0}\right).$$

Proof. La preuve s'articule essentiellement autour d'un argument développé par Greaves [Gre70]. On remarque tout d'abord que

$$E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \sum_{1 \leq m \leq p^k} N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, m) e\left(\frac{m}{p^k}\right)$$

où $N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, m)$ désigne le nombre de couples (n_1, n_2) modulo p^k tels que

$$(n_1, n_2, p) = 1, \quad \mathfrak{p}^k | (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2) \quad \text{et} \quad g_1 n_1 + g_2 n_2 \equiv m \pmod{p^k}.$$

Pour tout couple (m, m') satisfaisant $(m, p^k) = (m', p^k)$, il existe un entier λ premier à p tel que $m' \equiv \lambda m \pmod{p^k}$. Ainsi, la relation

$$(n_1 \pmod{p^k}, n_2 \pmod{p^k}) \rightarrow (\lambda n_1 \pmod{p^k}, \lambda n_2 \pmod{p^k})$$

définit une bijection, d'où $N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, m) = N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, m')$. Il s'ensuit que

$$(3.4) \quad \begin{aligned} E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) &= \sum_{0 \leq j \leq k} N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^j) \sum_{\substack{1 \leq \lambda \leq p^{k-j} \\ (\lambda, p^{k-j})=1}} e\left(\frac{\lambda}{p^{k-j}}\right) \\ &= N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^k) - N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^{k-1}). \end{aligned}$$

Les rôles de g_1 et g_2 étant symétriques, l'hypothèse $(g_1, g_2, p) = 1$ permet de supposer sans perte de généralité que $(g_1, p) = 1$. Il s'ensuit que $N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^k)$ est égal au cardinal

$$\#\left\{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k, (n_2, p) = 1, \mathfrak{p}^k | (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2), n_1 \equiv -g_2 n_2 g_1^{-1} \pmod{p^k}\right\}$$

d'où l'on déduit que

$$(3.5) \quad N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^k) = \begin{cases} (p-1)p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^k | (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De manière similaire, les conditions $p \nmid N(\omega_1)$ et \mathfrak{p} non ramifié entraînent que

$$(3.6) \quad \begin{aligned} N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^{k-1}) &= \#\left\{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k : (n_2, p) = 1, \mathfrak{p}^k | (p^{k-1} \omega_1 - n_2 (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2)), \right. \\ &\quad \left. n_1 \equiv (p^{k-1} - g_2 n_2) g_1^{-1} \pmod{p^k}\right\} \\ &= \begin{cases} p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-1} \parallel (g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

La relation (3.2) est une simple conséquence de (3.4), (3.5) et (3.6).

Supposons à présent que $(g_1, g_2, p^k) = p^{k_0}$. Sous l'hypothèse $k_0 < k$, on a

$$(3.7) \quad E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \sum_{\substack{1 \leq n'_1, n'_2 \leq p^{k-k_0} \\ (n'_1, n'_2, p) = 1}} e\left(\frac{\frac{g_1}{p^{k_0}} n'_1 + \frac{g_2}{p^{k_0}} n'_2}{p^{k-k_0}}\right) N(n'_1, n'_2; \mathfrak{p}^k, p^{k_0})$$

où $N(n'_1, n'_2; \mathfrak{p}^k, p^{k_0})$ désigne le nombre de couples (n_1, n_2) modulo p^k tels que

$$(n_1, n_2) \equiv (n'_1, n'_2) \pmod{p^{k-k_0}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}^k | (n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2).$$

Puisque \mathfrak{p} n'est pas ramifié, on a

$$(3.8) \quad \begin{aligned} N(n'_1, n'_2, \mathfrak{p}^k, p^{k_0}) &= \#\left\{0 \leq n_1^*, n_2^* < p^{k_0}, \mathfrak{p}^k \mid \left((n'_1 + n_1^* p^{k-k_0})\omega_1 + (n'_2 + n_2^* p^{k-k_0})\omega_2\right)\right\} \\ &= \begin{cases} p^{k_0} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-k_0} \mid (n'_1\omega_1 + n'_2\omega_2) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

La relation (3.3) est donc une conséquence directe de (3.7) et (3.8). \square

Preuve du lemme 3.1. Définissons les entiers k_0 et k_1 par les relations $(g_1, g_2, p^k) = p^{k_0}$ et $\mathfrak{p}^{k_1} \parallel (g_2\omega_1 - g_1\omega_2)$, de sorte que $k_0 \leq k_1$. Au vu des hypothèses sur \mathfrak{p} , il vient

$$(3.9) \quad \begin{aligned} E(0, 0, 1; g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) &= \sum_{0 \leq j \leq k} \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k \\ (n_1, n_2, p^k) = p^j \\ \mathfrak{p}^k \mid (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)}} e\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{p^k}\right) \\ &= 1 + \sum_{1 \leq j \leq k} E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^j). \end{aligned}$$

Si $1 \leq j \leq k_0$, on observe que

$$(3.10) \quad \begin{aligned} E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^j) &= \#\left\{1 \leq n_1, n_2 \leq p^j, (n_1, n_2, p) = 1, \mathfrak{p}^j \mid (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\right\} \\ &= (p-1)p^{j-1}. \end{aligned}$$

Dans le cas où $k_0 < j \leq k$, on applique le lemme 3.2 pour obtenir que

$$(3.11) \quad E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^j) = \begin{cases} (p-1)p^{j-1} & \text{si } j \leq k_1, \\ -p^{k_1} & \text{si } j = k_1 + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La combinaison des formules (3.9), (3.10) et (3.11) entraîne alors la relation

$$(3.12) \quad E(0, 0, 1; g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \begin{cases} p^k & \text{si } k \leq k_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $(p, q) = 1$, le lemme 3.1 est une conséquence de la formule (3.12) et de la relation

$$E(a_1, a_2, q; g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = e\left(-\frac{(a_1 g_1 + a_2 g_2)q^{-1}}{p^k}\right) E(0, 0, 1; g_1 q^{-1}, g_2 q^{-1}; \mathfrak{p}^k).$$

\square

3.2. Niveau de distribution de \mathcal{A} . Dans ce paragraphe, on cherche des estimations, en moyenne sur \mathfrak{i} , du cardinal de

$$\mathcal{A}_i := \{j \in \mathcal{A} : \mathfrak{i}j\}.$$

Dans le lemme 2.2 de [HBM04], de tels résultats sont obtenus en moyenne sur les idéaux \mathfrak{i} sans facteur carré. Nous généralisons ici (voir le lemme 3.5 *infra*) la démonstration de Heath-Brown et Moroz à des idéaux quelconques en y introduisant les estimations de sommes d'exponentielles du paragraphe précédent.

Omettant dans un premier temps la condition $(a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q) = 1$, étudions, pour tous réels $t \geq 1$ et x_1, x_2 , le cardinal de l'ensemble

$$(3.13) \quad \mathcal{S}(t, x_1, x_2; a_1, a_2, q; \mathfrak{i}) := \left\{ (n_1, n_2) : x_i \leq n_i < x_i + t \text{ pour } i = 1, 2 \right. \\ \left. \text{et } \mathfrak{i} \mid ((a_1 + n_1 q)\omega_1 + (a_2 + n_2 q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1} \right\},$$

noté encore $\mathcal{S}(\mathfrak{i})$. En effectuant une partition de $\mathcal{S}(\mathfrak{i})$ en classes de congruence modulo $N(\mathfrak{i})$, on peut écrire (voir [[HB01], pp.28–29])

$$\begin{aligned}
\#\mathcal{S}(\mathfrak{i}) &= \frac{1}{N(\mathfrak{i})^2} \sum_{1 \leq g_1, g_2 \leq N(\mathfrak{i})} E(g_1, g_2; \mathfrak{i}) \sum_{\substack{x_1 \leq n_1 < x_1+t \\ x_2 \leq n_2 < x_2+t}} e\left(\frac{-g_1 n_1 - g_2 n_2}{N(\mathfrak{i})}\right) \\
&= \frac{E(0, 0; \mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})^2} \left(t^2 + O(t)\right) \\
(3.14) \quad &+ O\left(\sum_{\substack{(g_1, g_2) \neq (0, 0) \pmod{N(\mathfrak{i})} \\ |g_1|, |g_2| \leq \frac{N(\mathfrak{i})}{2}}} \frac{|E(g_1, g_2; \mathfrak{i})|}{N(\mathfrak{i})^2} \min\left(t, \frac{N(\mathfrak{i})}{|g_1|}\right) \min\left(t, \frac{N(\mathfrak{i})}{|g_2|}\right)\right).
\end{aligned}$$

Compte tenu de la définition des idéaux admissibles, on peut observer que, pour tout idéal admissible \mathfrak{i} et tout premier q -régulier p , on a

$$(3.15) \quad E(0, 0; \mathfrak{i}_p) = N(\mathfrak{i}_p).$$

Rappelons les estimations de [[Dan99], lemme 3.1], à savoir, uniformément en p premier et $k \geq 1$,

$$(3.16) \quad \gamma_F(p^k) \ll p^{4k/3} \quad \text{et} \quad \gamma_F(p) = p\nu_p + O(1)$$

où ν_p désigne le nombre d'idéaux \mathfrak{p} tels que $N(\mathfrak{p}) = p^3$. Il s'ensuit que, uniformément en p premier et \mathfrak{i} un idéal, on a

$$(3.17) \quad E(0, 0; \mathfrak{i}_p) \leq \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq N(\mathfrak{i}_p) : N(\mathfrak{i}_p) | F(a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q)\} \ll N(\mathfrak{i}_p)^{4/3}.$$

Pour faciliter le traitement de la partie q -singulière des idéaux, introduisons l'ensemble

$$\mathcal{J}^-(z) := \{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(\mathfrak{j}_{q\text{-s}}) \leq z \text{ et } \mathfrak{j} \text{ admissible}\}.$$

Le terme d'erreur, relatif aux fréquences non nulles de (3.14), est estimé dans le lemme suivant, analogue de [[HBM02], Lemma 3.1].

Lemme 3.3. *Soient $B \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément en $x_1, x_2 \geq 0$, $t \geq 1$, $z \geq 1$ et $D \geq 1$, on ait*

$$\Sigma_1 := \sum_{\substack{\mathfrak{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathfrak{i}) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^B \left| \#\mathcal{S}(\mathfrak{i}) - \frac{E(0, 0; \mathfrak{i})t^2}{N(\mathfrak{i})^2} \right| \ll (t + D)z^{1/3}(\log(2D))^{c(B)}$$

Proof. Au vu de (3.14), on peut écrire $\Sigma_1 \ll \Sigma_{11} + \Sigma_{12}$ où

$$\Sigma_{11} := t \sum_{\substack{\mathfrak{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathfrak{i}) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^B \frac{E(0, 0; \mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})^2}$$

et

$$\Sigma_{12} := \sum_{\substack{\mathfrak{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathfrak{i}) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^B \sum_{\substack{(g_1, g_2) \neq (0, 0) \pmod{N(\mathfrak{i})} \\ |g_1|, |g_2| \leq \frac{N(\mathfrak{i})}{2}}} \frac{|E(g_1, g_2; \mathfrak{i})|}{N(\mathfrak{i})^2} \min\left(t, \frac{N(\mathfrak{i})}{|g_1|}\right) \min\left(t, \frac{N(\mathfrak{i})}{|g_2|}\right).$$

Les relations (3.15), (3.17) et (2.2) entraînent que

$$(3.18) \quad \Sigma_{11} \ll t \sum_{\mathfrak{i}_1 \text{ } q\text{-singulier}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i}_1)^B}{N(\mathfrak{i}_1)^{2/3}} \sum_{\substack{\mathfrak{i}_2 \text{ } q\text{-régulier} \\ D < N(\mathfrak{i}_2) \leq 2D}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i}_2)^B}{N(\mathfrak{i}_2)} \ll t(\log(2D))^{c(B)}.$$

3. Compte tenu des travaux de Dedekind, cette notation coïncide avec la définition de ν_p de l'introduction.

En suivant l'argument développé dans la preuve du lemme 3.1 de [HBM02], on écrit la décomposition $\Sigma_{12} := \Sigma_{13} + \Sigma_{14}$ où la sommation Σ_{13} (resp. Σ_{14}) porte sur les phases (g_1, g_2) satisfaisant $g_1 g_2 = 0$ (resp. $g_1 g_2 \neq 0$). En utilisant successivement le fait que $(N(i_{q-r}), qN(\omega_1 \omega_2)) = 1$, le lemme 3.1 et (2.2), il vient

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{13} &\ll tz^{1/3} \sum_{0 < g \leq D} \frac{1}{g} \sum_{\substack{i \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(i) \leq 2D \\ i_{q-r} | g}} \tau_{\mathbf{K}}(i)^B \\
 &\ll tz^{1/3} \sum_{0 < g \leq D} \frac{\tau(g)^{c(B)}}{g} (\log(2D))^{c(B)} \\
 (3.19) \quad &\ll tz^{1/3} (\log(2D))^{c(B)}.
 \end{aligned}$$

On remarque de même que

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{14} &\ll Dz^{1/3} \sum_{1 \leq |g_1|, |g_2| \leq D} \frac{1}{|g_1 g_2|} \sum_{\substack{D < N(i) \leq 2D \\ i \in \mathcal{J}^-(z) \\ i_{q-r} | g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2}} \tau_{\mathbf{K}}(i)^B \\
 &\ll Dz^{1/3} \sum_{1 \leq |g_1|, |g_2| \leq D} \frac{\tau_{\mathbf{K}}((g_2 \omega_1 - g_1 \omega_2))^{c(B)}}{|g_1 g_2|} (\log(2D))^{c(B)}.
 \end{aligned}$$

En découpant le domaine de sommation des variables g_1 et g_2 de manière dyadique et en faisant appel au lemme 2.2, il suit que

$$(3.20) \quad \Sigma_{14} \ll Dz^{1/3} (\log(2D))^{c(B)}.$$

Le résultat annoncé est alors une conséquence des estimations (3.18), (3.19) et (3.20). \square

Il est possible de relier le cardinal de $\mathcal{S}(i)$ à celui de \mathcal{A}_i par un argument de convolution, à l'image de la formule (2.3) de [HBM04]. Remarquons pour cela que la formule d'inversion de Möbius permet d'écrire, sous la condition $(a_1, a_2, q) = 1$, la relation

$$\begin{aligned}
 (3.21) \quad \#\mathcal{A}_i &= \sum_{(d,q)=1} \mu(d) \# \left\{ (n_1, n_2) \in C(N_1, N_2) : i | ((a_1 + n_1 q) \omega_1 + (a_2 + n_2 q) \omega_2) \mathfrak{d}^{-1} \right. \\
 &\quad \left. \text{et } d | (a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q) \right\}.
 \end{aligned}$$

Pour tout d premier à q et $i = 1, 2$, on définit l'entier $b_i(d) \in \{1, \dots, d\}$ comme l'unique solution de la congruence $a_i - b_i(d)q \equiv 0 \pmod{d}$, ce qui permet d'introduire la correspondance $(n_1, n_2) \mapsto \left(\frac{n_1 + b_1(d)}{d}, \frac{n_2 + b_2(d)}{d} \right)$ entre les ensembles

$$\left\{ (n_1, n_2) \in C(N_1, N_2) : i | ((a_1 + n_1 q) \omega_1 + (a_2 + n_2 q) \omega_2) \mathfrak{d}^{-1} \text{ et } d | (a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q) \right\}$$

et

$$\mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, \frac{N_1 \eta x + b_1(d)}{d}, \frac{N_2 \eta x + b_2(d)}{d}; a_1(d), a_2(d), q; \frac{i}{(i, d)} \right)$$

où \mathcal{S} est défini par (3.13) et $a_i(d) := \frac{a_i - b_i(d)q}{d}$. Au vu du lemme 3.3 et de la convolution (3.21), on peut ainsi espérer approcher le cardinal de \mathcal{A}_i par

$$\sum_{(d,q)=1} \mu(d) \frac{\eta^2 x^2 S_d(i)}{d^2 N \left(\frac{i}{(i, d)} \right)^2}$$

où $S_d(\mathbf{i})$ désigne le nombre de couples (n_1, n_2) modulo $N\left(\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)}\right)$ tels que

$$\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)} \mid ((a_1(d) + n_1q)\omega_1 + (a_2(d) + n_2q)\omega_2) \mathfrak{d}^{-1}.$$

Si $S_1(\mathbf{i}) \neq 0$, le théorème des restes chinois implique que $d \mapsto \frac{S_d(\mathbf{i})}{S_1(\mathbf{i})}$ est multiplicative. Ceci permet de faire apparaître un produit eulérien que l'on décompose en 4 parties selon que $p|q$ ou non, $p|N(\mathbf{i})$ ou non. On obtient ainsi

$$(3.22) \quad \sum_{(d,q)=1} \mu(d) \frac{S_d(\mathbf{i})}{d^2 N\left(\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)}\right)^2} = \frac{S_1(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})^2} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{S_p(\mathbf{i})N((\mathbf{i}, p))^2}{S_1(\mathbf{i})p^2}\right) = \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{\zeta_q(2)N(\mathbf{i})}$$

où

$$\zeta_q(s) := \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

et α_q est la fonction multiplicative à support sur les idéaux admissibles définie, pour tout idéal admissible \mathbf{i} , par

$$(3.23) \quad \alpha_q(\mathbf{i}) := \prod_{\substack{p|N(\mathbf{i}) \\ p \nmid q}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \left(\frac{S_1(\mathbf{i}_p)}{N(\mathbf{i}_p)} - \frac{S_p(\mathbf{i}_p)N((\mathbf{i}_p, p)^2)}{p^2 N(\mathbf{i}_p)}\right) \prod_{p|(N(\mathbf{i}), q)} \frac{S_1(\mathbf{i}_p)}{N(\mathbf{i}_p)}.$$

La formule (3.22) demeure vraie si $S_1(\mathbf{i}) = 0$ puisque l'on a alors $S_d(\mathbf{i}) = 0$ pour tout entier $d \geq 1$. On observe que la relation (3.15) et le fait que $N((\mathbf{i}_p, p)) = p$ pour tout idéal \mathbf{i} admissible et tout p premier q -régulier entraînent que l'on a

$$(3.24) \quad \alpha_q(\mathbf{i}_p) = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

De même, les majorations (3.17) et $S_p(\mathbf{i}_p) \leq S_1\left(\frac{\mathbf{i}_p}{(\mathbf{i}_p, p)}\right)$ permettent d'établir la borne supérieure suivante, uniforme pour p premier et \mathbf{i} admissible,

$$(3.25) \quad |\alpha_q(\mathbf{i}_p)| \leq \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \max\left(\frac{S_1(\mathbf{i}_p)}{N(\mathbf{i}_p)}, \frac{S_p(\mathbf{i}_p)N((\mathbf{i}_p, p)^2)}{p^2 N(\mathbf{i}_p)}\right) \ll N(\mathbf{i}_p)^{1/3}.$$

On déduit finalement de ce qui précède que

$$(3.26) \quad \#\mathcal{A}_{\mathbf{i}} = \frac{\eta^2 x^2 \alpha_q(\mathbf{i})}{\zeta_q(2) N(\mathbf{i})} + r(\mathcal{A}, \mathbf{i})$$

où

$$(3.27) \quad |r(\mathcal{A}, \mathbf{i})| \leq \sum_{(d,q)=1} \mu^2(d) \left| \#\mathcal{S}\left(\frac{\eta x}{d}, \frac{N_1 \eta x + b_1(d)}{d}, \frac{N_2 \eta x + b_2(d)}{d}; a_1(d), a_2(d), q; \frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)}\right) - \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathbf{i})}{d^2 N\left(\frac{\mathbf{i}}{(\mathbf{i}, d)}\right)^2} \right|.$$

Le lemme suivant, dont la démonstration est calquée sur celle de [[HBM04], Lemma 2.2], montre que, sous la condition $\mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z)$, on a effectivement le niveau de distribution attendu.

Lemme 3.4. *Soient $B \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $z \geq 1$ et $1 \leq D \leq x^2$, on ait*

$$\Sigma_2 := \sum_{\substack{D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ \mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B |r(\mathcal{A}, \mathbf{i})| \ll \left(x^{3/2} + xD^{1/2}\right) z^{1/3} (\log x)^{c(B)}.$$

Proof. Soit $1 \leq \Delta \leq x^{1/2}$ un paramètre qui sera explicité en toute fin de preuve. La formule (3.27) permet d'écrire la majoration $\Sigma_2 \ll \Sigma_{21} + \Sigma_{22} + \Sigma_{23}$ où

$$\Sigma_{21} := \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ d \leq \Delta, (d, q) = 1}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \left| \# \mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, \frac{N_1 \eta x + b_1(d)}{d}, \frac{N_2 \eta x + b_2(d)}{d}; a_1(d), a_2(d), q; \frac{\mathbf{i}}{(i, d)} \right) - \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathbf{i})}{d^2 N\left(\frac{\mathbf{i}}{(i, d)}\right)^2} \right|,$$

$$\Sigma_{22} := \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ d > \Delta, (d, q) = 1}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \# \mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, \frac{N_1 \eta x + b_1(d)}{d}, \frac{N_2 \eta x + b_2(d)}{d}; a_1(d), a_2(d), q; \frac{\mathbf{i}}{(i, d)} \right)$$

et

$$\Sigma_{23} := \sum_{\substack{\mathbf{i} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{i}) \leq 2D \\ d > \Delta}} \mu^2(d) \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^B \left| \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathbf{i})}{d^2 N\left(\frac{\mathbf{i}}{(i, d)}\right)^2} \right|.$$

Si $d \leq \Delta$, l'hypothèse sur Δ entraîne que $\frac{\eta x}{d} \geq 1$ ce qui nous permet d'utiliser le lemme 3.3 avec les choix $t = \frac{\eta x}{d}$ et $x_i = \frac{N_i \eta x + b_i(d)}{d}$ pour $i = 1, 2$. En écrivant $\mathbf{i} = \mathbf{a}\mathbf{b}$ avec $\mathbf{a} = (i, d)$, on peut ainsi majorer Σ_{21} par

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{\substack{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{a}\mathbf{b}) \leq 2D \\ d \leq \Delta, (d, q) = 1 \\ N(\mathbf{a}) | d^3}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{a}\mathbf{b})^B \left| \# \mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, \frac{N_1 \eta x + b_1(d)}{d}, \frac{N_2 \eta x + b_2(d)}{d}; \dots; \mathbf{b} \right) - \frac{\eta^2 x^2 S_d(\mathbf{a}\mathbf{b})}{d^2 N(\mathbf{b})^2} \right| \\ & \ll \sum_{d \leq \Delta} \sum_{N(\mathbf{a}) | d^3} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{a})^B \left(\frac{D}{N(\mathbf{a})} + \frac{x}{d} \right) z^{1/3} (\log x)^{c(B)} \\ (3.28) \quad & \ll \Delta z^{1/3} (x + D) (\log x)^{c(B)}. \end{aligned}$$

À l'aide du lemme 2.2, on dispose d'autre part de l'estimation

$$(3.29) \quad \Sigma_{22} \ll \sum_{d > \Delta} \tau(d)^{c(B)} \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq q(x+1)/d} \tau_{\mathbf{K}}((n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2))^{c(B)} \ll \Delta^{-1} x^2 (\log x)^{c(B)}.$$

Enfin, en reprenant la décomposition $\mathbf{i} = \mathbf{a}\mathbf{b}$ introduite au cours de l'étude de Σ_{21} et en écrivant $d = N(\mathbf{a}_{q-r})e$, on remarque que $d \asymp N(\mathbf{a})e$ et $S_d(\mathbf{i}) \leq N(\mathbf{b})N(\mathbf{b}_{q-s})^{1/3}$. Il s'ensuit

que

$$(3.30) \quad \Sigma_{23} \ll x^2 \sum_{\substack{\mathbf{ab} \in \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(\mathbf{ab}) \leq 2D}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{ab})^B}{N(\mathbf{a})^2 N(\mathbf{b}) N(\mathbf{b}_{q-s})^{2/3}} \sum_{e \gg \Delta N(\mathbf{a})^{-1}} \frac{1}{e^2} \ll \Delta^{-1} x^2 (\log x)^{c(B)}.$$

En combinant les estimations (3.28), (3.29) et (3.30), il suit

$$\Sigma_2 \ll \left(\Delta^{-1} x^2 + \Delta(x+D)z^{1/3} \right) (\log x)^{c(B)}.$$

Le choix $\Delta := \min(x^{1/2}, xD^{-1/2})$ conduit au résultat annoncé. \square

Au vu de la définition de $\mathcal{J}^-(z)$, on montre alors que la contribution des éléments de \mathcal{A}_i avec $i \notin \mathcal{J}^-(z)$ est négligeable lorsque z est convenablement choisi.

Lemme 3.5. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $1 \leq D \leq x^2$, on ait*

$$\Sigma_3 := \sum_{D < N(i) \leq 2D} \tau_{\mathbf{K}}(i)^B |r(\mathcal{A}, i)| \ll \left(x^{5/3} + x^{4/3} D^{1/3} \right) (\log x)^{c(B)}$$

où les $r(\mathcal{A}, i)$ sont définis par (3.26).

Proof. Remarquons dans un premier temps que les relations (2.2) et (1.5) entraînent

$$(3.31) \quad \sum_{\substack{i \notin \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(i) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(i)^B \# \mathcal{A}_i \ll \sum_{\substack{D \leq d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} \# \{1 \leq n_1, n_2 \leq 2qx : d | F(n_1, n_2)\} \\ \ll x^2 \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d)}{d^2} + \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} |r_d(2qx)|.$$

La première somme du membre de droite peut être majorée à l'aide de l'inégalité

$$(3.32) \quad \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d)}{d^2} \leq \sum_{\substack{z < d_1 \leq 2D \\ d_1 \text{ } q\text{-singulier}}} \tau(d_1)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d_1)}{d_1^2} \sum_{d_2 \leq 2D} \tau(d_2)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d_2)}{d_2^2}.$$

En utilisant l'estimation (3.16), on obtient pour la somme sur d_2 la borne supérieure uniforme en $D \geq 2$ suivante

$$(3.33) \quad \sum_{d \leq D} \tau(d)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d)}{d^2} \ll (\log(2D))^{c(B)}.$$

Compte tenu de (3.16), on majore la somme en d_1 en remarquant que

$$(3.34) \quad \sum_{\substack{z < d \leq 2D \\ d \text{ } q\text{-singulier}}} \tau(d)^{c(B)} \frac{\gamma_F(d)}{d^2} \ll z^{-2/3}.$$

De plus, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de (1.6), du corollaire 1 de [dlBB06] et de (3.33) que l'on peut estimer le terme de reste de (3.31) par

$$(3.35) \quad \sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} |r_d(2qx)| \leq \left(\sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} \tau(d)^{c(B)} |r_d(2qx)| \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{D < d \leq 2D \\ d_{q-s} > z}} |r_d(2qx)| \right)^{1/2} \\ \ll x \left(x^{1/2} D^{1/4} + D^{1/2} \right) (\log x)^{c(B)}.$$

En combinant les majorations (3.31), (3.32) et (3.35), on obtient finalement l'estimation

$$(3.36) \quad \sum_{\substack{i \notin \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(i) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(i)^B \# \mathcal{A}_i \ll \left(\frac{x^2}{z^{2/3}} + x^{3/2} D^{1/4} + x D^{1/2} \right) (\log x)^{c(B)}.$$

En utilisant la multiplicativité de α_q et les estimations (3.24) et (3.25), on a d'autre part que

$$(3.37) \quad \sum_{\substack{i \notin \mathcal{J}^-(z) \\ D < N(i) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(i)^B \frac{\alpha_q(i)}{N(i)} \ll \sum_{\substack{z < N(i_1) \\ i_1 \text{ } q\text{-singulier}}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(i_1)^B}{N(i_1)^{2/3}} \sum_{N(i_2) \leq 2D} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(i_2)^B}{N(i_2)} \ll z^{-2/3} (\log(2D))^{c(B)}.$$

On obtient finalement le résultat escompté en utilisant le lemme 3.4 ainsi que les estimations (3.36) et (3.37) et en choisissant $z = \min(x^{1/2}, x D^{-1/2})$. \square

En conclusion de notre étude relative à la distribution multiplicative de \mathcal{A} , nous considérons le cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{A}_{i,d} := \left\{ j \in \mathcal{A}_i : d | N(ji^{-1}) \right\}$$

où d est sans facteur carré. Suivant l'argument développé à la page 265 de [HBM02], le principe d'inclusion-exclusion permet d'écrire la formule

$$(3.38) \quad \mu(d) \sum_{\substack{j_1 | (j_2, d) \\ d | N(j_1)}} \mu_{\mathbf{K}}(j_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } d | N(j_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Compte tenu du lemme 3.5, la relation (3.38) suggère d'écrire

$$(3.39) \quad \# \mathcal{A}_{i,d} = \mu(d) \sum_{\substack{j | d \\ d | N(j)}} \mu_{\mathbf{K}}(j) \# \mathcal{A}_{ij} = \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(i) \xi_q(i, d)}{N(i)} + r(\mathcal{A}, i, d)$$

où

$$(3.40) \quad \xi_q(i, d) = \begin{cases} \mu(d) \sum_{d | N(j)} \frac{\mu_{\mathbf{K}}(j) \alpha_q(j)}{\alpha_q(i) N(i)} & \text{si } \alpha_q(i) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$(3.41) \quad |r(\mathcal{A}, i, d)| \leq \sum_{\substack{j | d \\ d | N(j)}} \mu^2(d) \left| \# \mathcal{A}_{ij} - \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(j)}{N(j)} \right|.$$

Il s'ensuit que, si $\alpha_q(i) \neq 0$, la fonction arithmétique $\xi_q(i, \cdot)$ est multiplicative et à support sur les entiers sans facteur carré. Pour p un nombre premier q -régulier, on a notamment par (3.24) que

$$(3.42) \quad \xi_q(i, p) = \begin{cases} \frac{1}{p} & \text{si } p | N(i), \\ \frac{\nu_p}{1+p} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas où $i = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, on pose $\xi_q(d) := \xi_q(\mathcal{O}_{\mathbf{K}}, d)$ pour tout entier $d \geq 1$. Les termes de reste $r(\mathcal{A}, i, d)$ sont estimés dans le lemme suivant, analogue de [[HBM04], Lemma 2.3].

Lemme 3.6. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, et $1 \leq D \leq x^2$, on ait*

$$\Sigma_3 := \sum_{\substack{i, d \\ D < N(i) d \leq 2D}} \mu(d)^2 \tau(N(i)d)^B |r(\mathcal{A}, i, d)| \ll \left(x^{5/3} + x^{4/3} D^{1/3} \right) (\log x)^{c(B)}.$$

Proof. Puisque la sommation (3.41) ne fait intervenir que des idéaux \mathfrak{j} admissibles et des entiers d sans facteur carré, on observe à l'aide du lemme 2.3 que, dans la sommation de (3.41), on a $N(\mathfrak{j}) \asymp d$. Par suite, on déduit du lemme 3.5 que

$$\Sigma_3 \ll \sum_{N(\mathfrak{l}) \ll D} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{l})^{c(B)} \left| \#\mathcal{A}_{\mathfrak{l}} - \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathfrak{l})}{N(\mathfrak{l})} \right| \ll \left(x^{5/3} + x^{4/3} D^{1/3} \right) (\log x)^{c(B)}.$$

□

3.3. Niveau de distribution de \mathcal{B} . Par analogie à \mathcal{A}_i et à la suite de Heath-Brown et Moroz, on considère dans ce paragraphe le cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{B}_i := \{\mathfrak{j} \in \mathcal{B} : i|\mathfrak{j}\}.$$

L'étude de la distribution des idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ se base sur l'ordre moyen suivant, dû à Weber.

Théorème 3.7 ([Web99]). *Uniformément pour $x \geq 1$, on a*

$$\#\{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(\mathfrak{j}) \leq x\} = \lambda_{\mathbf{K}} x + O(x^{2/3}).$$

On définit

$$\mathcal{B}_{i,d} := \{\mathfrak{j} \in \mathcal{B}_i : d|N(\mathfrak{j}i^{-1})\}.$$

L'estimation de Type I suivante, relative à $\mathcal{B}_{i,d}$, est une généralisation du lemme 3.6 de [HBM02] qui suggère écrire

$$(3.43) \quad \#\mathcal{B}_{i,d} = \lambda_{\mathbf{K}} \frac{c_q(N_1, N_2) \eta x^3}{N(\mathfrak{i})} \beta(d) + r(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, d)$$

où β est la fonction multiplicative à support sur les entiers sans facteur carré définie par

$$(3.44) \quad \beta(p) = 1 - \prod_{\mathfrak{p}|p} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})} \right).$$

Lemme 3.8. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $D \geq 1$ et \mathfrak{i} un idéal de $\mathcal{J}(\mathbf{K})$, on ait*

$$\sum_{D < d \leq 2D} \tau(d)^B \mu(d)^2 |r(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, d)| \ll \frac{x^2 D^{1/3}}{N(\mathfrak{i})^{2/3}} (\log(2D))^{c(B)}.$$

Proof. Au vu de la formule (3.38), on a la relation

$$\#\mathcal{B}_{i,d} = \mu(d) \sum_{\substack{\mathfrak{j}|d \\ d|N(\mathfrak{j})}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \#\left\{ \mathfrak{b} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : \frac{c_q(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{ij})} < N(\mathfrak{b}) \leq (1 + \eta) \frac{c_q(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{ij})} \right\}$$

Compte tenu du théorème 3.7, le résultat se déduit de la suite d'estimations

$$\sum_{D < d \leq 2D} \tau(d)^B \mu(d)^2 \sum_{\substack{\mathfrak{j}|d \\ d|N(\mathfrak{j})}} \frac{x^2}{N(\mathfrak{ij})^{2/3}} \ll \frac{x^2}{N(\mathfrak{i})^{2/3}} \sum_{D < d \leq 2D} \frac{\tau(d)^{c(B)}}{d^{2/3}} \ll \frac{x^2 D^{1/3}}{N(\mathfrak{i})^{2/3}} (\log(2D))^{c(B)}.$$

□

4. LA FONCTION DE DENSITÉ σ_q

4.1. Définition et premières propriétés. Étant donné un sous-ensemble \mathcal{C} de \mathbf{N} et un idéal \mathfrak{i} , on considère le cardinal

$$(4.1) \quad S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}) := \#\{\mathfrak{q} : \mathfrak{i}\mathfrak{q} \in \mathcal{A} \text{ et } N(\mathfrak{q}) \in \mathcal{C}\}.$$

En général, on ne peut espérer évaluer $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C})$ en utilisant uniquement les majorations de sommes de Type I obtenues dans la partie précédente en raison de l'incidence du phénomène de parité, mentionné en introduction.

À la suite de Heath-Brown et Moroz, on introduit le cardinal

$$(4.2) \quad S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}) := \#\{\mathfrak{q} : \mathfrak{i}\mathfrak{q} \in \mathcal{B} \text{ et } N(\mathfrak{q}) \in \mathcal{C}\}$$

et l'on cherche à montrer l'existence d'une constante $\sigma_q(F) > 0$ et d'une fonction de densité $\sigma_q : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{R}$ telles que l'approximation

$$(4.3) \quad S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sigma_q(F)\eta}{c_q(N_1, N_2)x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C})$$

soit vraie, en moyenne sur les idéaux \mathfrak{i} et pour une certaine classe d'ensembles d'entiers \mathcal{C} inclus dans l'ensemble criblé

$$(4.4) \quad \mathcal{C}^-(x^\tau) := \{d : P^-(d) > x^\tau\}$$

où $\tau := (\log \log x)^{-\varpi_0}$ avec ϖ_0 dans $]0, 1[$ fixé.

Dans ce paragraphe, on obtient des valeurs heuristiques pour $\sigma_q(F)$ et $\sigma_q(\mathfrak{i})$ en étudiant $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau))$ et $S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau))$. Au vu des estimations de sommes de Type I contenues dans les lemmes 3.6 et 3.8, l'application d'un lemme fondamental de crible - démarche effectuée en détail au paragraphe 6 - suggère que l'on a

$$(4.5) \quad S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \frac{\alpha_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \prod_{p \leq x^\tau} (1 - \xi_q(\mathfrak{i}, p))$$

et

$$(4.6) \quad S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_{\mathbf{K}} c_q(N_1, N_2) \frac{\eta x^3}{N(\mathfrak{i})} \prod_{p \leq x^\tau} (1 - \beta(p)).$$

L'étude de la singularité de $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ en $s = 1$ permet d'obtenir l'analogie suivante de la formule (6.8) de [HB01], uniforme pour $t \geq 2$,

$$(4.7) \quad \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \lambda_{\mathbf{K}}^{-1} \left(1 + O\left((\log t)^{-2}\right)\right).$$

Comme observé dans le lemme 3.4 de [HBM02], la formule (3.42) et le théorème des idéaux premiers impliquent de même l'estimation suivante, valide uniformément pour $t > \max(\{1\} \cup \{p : p \text{ est } q\text{-singulier}\})$,

$$(4.8) \quad \prod_{p \geq t} (1 - \xi_q(p)) \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \left(1 + O\left((\log t)^{-2}\right)\right),$$

où ξ_q est défini par (3.40), d'où l'on déduit la convergence du produit eulérien

$$(4.9) \quad \sigma_q(F) := \left(\prod_{\xi_q(p) \neq 1} (1 - \xi_q(p)) \left(1 + \frac{1}{p}\right) \prod_{\xi_q(p) = 1} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \right) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1},$$

produit eulérien strictement positif d'après le lemme 3.4 de [HBM02].

On observe également que la formule (3.42) implique les estimations suivantes, uniformes pour $N(\mathbf{i}) \ll x^3$,

$$(4.10) \quad \prod_{\substack{p > x^\tau \\ p|N(\mathbf{i})}} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{\substack{p > x^\tau \\ p|N(\mathbf{i})}} (1 - \xi_q(p)) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right).$$

Sous réserve d'établir les formules (4.5) et (4.6), il s'ensuit alors la formule

$$(4.11) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \sim \eta^2 x^2 \sigma_q(F) \frac{\sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

avec

$$(4.12) \quad \sigma_q(\mathbf{i}) := \tilde{\sigma}_q(\mathbf{i}) \prod_{\xi_q(p)=1} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_q(\mathbf{i}) := \alpha_q(\mathbf{i}) \prod_{\substack{p|N(\mathbf{i}) \\ \xi_q(p) \neq 1}} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) (1 - \xi_q(p))^{-1}.$$

On observe en particulier, pour p un premier q -régulier et $k \geq 1$, la formule

$$(4.13) \quad \sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k) = \nu_p \left(\frac{p-1}{p+1}\right) \left(1 - \frac{\nu_p}{1+p}\right)^{-1} = \nu_p + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

De plus, on peut déduire de l'estimation (3.25) la majoration uniforme en p premier

$$(4.14) \quad \sigma_q(\mathbf{i}_p) \leq \tilde{\sigma}_q(\mathbf{i}_p) \ll \alpha_q(\mathbf{i}_p) \ll N(\mathbf{i}_p)^{1/3}.$$

Finalement, au vu de la formule asymptotique (4.7), on a également

$$(4.15) \quad S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \sim c_q(N_1, N_2) \frac{\eta x^3}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

ce qui justifie la pertinence de (4.3) lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{C}^-(x^\tau)$.

4.2. Ordres moyens de $\sigma_q h$. Portons notre attention sur l'ordre moyen $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$ défini par la formule (2.14) pour toute fonction arithmétique $h \in \mathcal{M}(w)$ où w est un complexe de module 1, c'est-à-dire h multiplicative, à valeur dans le disque unité et satisfaisant $h(p) = w$ pour tout premier p . D'une part, la preuve du théorème 1.4 repose en partie sur une estimation asymptotique de $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$. D'autre part, les majorations de $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$ que nous développons ici seront utilisées à de nombreuses reprises dans les parties 6 et 7 *infra*.

Compte tenu de la formule (4.13) relative à la valeur de $\sigma_q^{\mathbf{Z}}$ aux entiers q -réguliers, on observe que, uniformément pour p premier et $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$, on a

$$(4.16) \quad \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p)}{p^s} = \sum_{\mathfrak{p}|p} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} + O\left(\frac{1}{p^{2\operatorname{Re}(s)}}\right).$$

Il suit alors de (4.13) que la série $\mathcal{H}_q(s) \zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-w}$ où

$$(4.17) \quad \mathcal{H}_q(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) h(n)}{n^s}$$

est prolongeable holomorphiquement dans le domaine $\operatorname{Re}(s) > 1 - c(\log(|\operatorname{Im}(s)| + 1))^{-1}$ pour une constante $c > 0$ convenable.

La méthode de Selberg-Delange (voir [[Ten08], théorème 5.2] et [[HTW08], paragraphe 1.3]) permet d'établir le résultat central de ce paragraphe, à savoir la formule asymptotique de $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$ contenue dans la proposition suivante.

Proposition 4.1. *On a, uniformément pour w un nombre complexe tel que $|w| = 1$, $h \in \mathcal{M}(w)$, $x \geq 2$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,*

$$(4.18) \quad M_{\sigma_q h}(\mathcal{B}) = c_q(N_1, N_2) \eta x^3 (3 \log x)^{w-1} \left(\frac{\sigma_q(F, h)}{\Gamma(w)} + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right) \right)$$

où

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \sigma_q(F, h) &:= \prod_{\xi_q(p) \neq 1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^w \left(1 + (1 - \xi_q(p))^{-1} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^k} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \alpha_q(\mathbf{i}) (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p))\right)\right) \\ &\times \prod_{\xi_q(p)=1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^w \left(\sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^k} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \alpha_q(\mathbf{i}) (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p))\right) \end{aligned}$$

et $\alpha_q(\cdot)$ et $\xi_q(\cdot, \cdot)$ sont définis respectivement par (3.23) et (3.40).

On a en particulier $\sigma_q(F, \mathbf{1}) = \sigma_q(F)^{-1} \zeta_q(2)^{-1}$ et, uniformément pour $x \geq 3$,

$$(4.20) \quad \sum_{N(\mathbf{i}) \leq x} \frac{\sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} = \frac{1}{\zeta_q(2) \sigma_q(F)} \log x + O(\log \log x).$$

Proof. Au vu de ce qui précède, on peut appliquer la méthode de Selberg-Delange à $\sigma_q^{\mathbf{Z}} h$. Les formules (1.17) et (1.18) de [HTW08] entraînent alors que l'on a, pour tout entier $N \geq 0$ fixé et uniformément en $|w| = 1$, $h \in \mathcal{M}(w)$ et $x \geq 2$,

$$(4.21) \quad \sum_{n \leq x} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) h(n) = x (\log x)^{w-1} \left(\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_k(h)}{\Gamma(w-k) (\log x)^k} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{N+1}}\right) \right)$$

où les $\lambda_k(h)$ sont définis à l'aide du développement de Taylor en $s = 1$

$$(4.22) \quad \frac{(s-1)^w \mathcal{H}_q(s)}{s} := \sum_{k \geq 0} \lambda_k(h) (s-1)^k.$$

En particulier, on a

$$(4.23) \quad \lambda_0(h) = \lambda_{\mathbf{K}}^w \mathcal{H}_q(s) \zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-w} \Big|_{s=1} = \sigma_q(F, h),$$

ce qui permet de déduire (4.18), compte tenu de l'estimation

$$\log \left(c_q(N_1, N_2) x^3 \right) = 3 \log x \left(1 + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right) \right).$$

Avec le choix $h(n) = 1$ pour tout entier $n \geq 1$, une sommation par parties entraîne directement la formule uniforme en $x \geq 3$ suivante

$$(4.24) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \text{ } q\text{-régulier}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n)}{n} = \sigma_q(F, \mathbf{1}) \log x + O(\log \log x)$$

Pour montrer que $\sigma_q(F, \mathbf{1}) = \sigma_q(F)^{-1} \zeta_q(2)^{-1}$ et ainsi établir (4.20), on commence par remarquer que, pour tout premier p , la définition (3.40) entraîne la formule

$$(4.25) \quad \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) = \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \left(\frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + \sum_{\substack{j|p \\ p|N(j)}} \mu_{\mathbf{K}}(j) \frac{\alpha_q(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} \right) \\ = \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \left(1 + \sum_{\substack{j|(\mathbf{i}, p) \\ p|N(j) \\ \mathbf{i} \neq j}} \mu_{\mathbf{K}}(j) \right).$$

En injectant la formule d'inclusion-exclusion (3.38) dans (4.25), on obtient ainsi l'égalité

$$(4.26) \quad \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) = - \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{i}) \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} = \xi_q(p).$$

Compte tenu des définitions (4.19) et (4.9), il s'ensuit que $\sigma_q(F, \mathbf{1}) = \sigma_q(F)^{-1} \zeta_q(2)^{-1}$. \square

Considérons à présent le cas $h = 1_{S(y)} \in \mathcal{M}(1; 1, y)$, où $S(y)$ désigne l'ensemble des entiers y -friables. Dans la proposition suivante - application de la méthode de Selberg-Delange friable développée par Hanrot, Tenenbaum et Wu [HTW08] - nous obtenons une estimation de $M_{\sigma_q 1_{S(y)}}(\mathcal{B})$, étape essentielle en vue de démontrer le théorème 1.2.

Proposition 4.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et uniformément pour $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $x \geq 3$ et $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right) \leq y \ll x^3$, on a*

$$(4.27) \quad M_{\sigma_q 1_{S(y)}}(\mathcal{B}) = \frac{\eta c_q(N_1, N_2) x^3}{\zeta_q(2) \sigma_q(F)} \rho(3u) \left(1 + O\left(\log \log x \frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right)$$

où $u := \frac{\log x}{\log y}$.

Proof. Observons tout d'abord que la série de Dirichlet engendrée par $\sigma_q^{\mathbf{Z}}$ est de la forme

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n)}{n^s} = \mathcal{G}(s) \zeta_{\mathbf{K}}(s)$$

où $\mathcal{G}(s) := \sum_n \frac{g(n)}{n^s}$ est développable en un produit eulérien absolument convergent pour $\operatorname{Re}(s) > 1/2$. On peut alors reproduire *mutatis mutandis* les arguments du paragraphe 2.3 de [HTW08] en remplaçant $\varrho_F(n)$ par $\sigma_q^{\mathbf{Z}}(n)$, pour obtenir, pour tout $\varepsilon > 0$, l'estimation

$$\sum_{P^+(n) \leq y} \frac{g(n)}{n^s} = \mathcal{G}(s) + O\left(\frac{1}{y^{1/2-\varepsilon}}\right)$$

uniformément dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geq 1/2 + \varepsilon$. La fonction arithmétique $\sigma_q^{\mathbf{Z}}$ satisfait donc les hypothèses (1.7) et (1.10) de [HTW08], ce qui permet d'appliquer [[HTW08], Théorèmes 1.1 et 1.2]. On en déduit, pour tout N fixé, l'existence de $C_N > 0$ tel que l'on ait, uniformément en

$$x \geq 3, \quad \exp\left((\log \log x)^{5/3+\varepsilon}\right) \leq y \leq x, \quad \left(0 < u < N + 1 \Rightarrow u - [u] > C_N \frac{\log \log y}{\log y}\right),$$

la formule suivante

$$(4.28) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \leq y}} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(n) = x \left(\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_k(\mathbf{1}) \rho^{(k)}(u)}{(\log y)^k} + O \left(\rho(u) \left(\frac{\log(u+1)}{\log y} \right)^{N+1} \right) \right)$$

où les $\lambda_k(\mathbf{1})$ sont définis par (4.22).

Compte tenu de l'estimation, valide pour tout $j \geq 0$ et uniforme en $0 \leq v \leq u$ suivante

$$(4.29) \quad \rho^{(j)}(u-v) \ll \log(u+1)^j \rho(u) \exp(O(v \log(u+1)))$$

établie à la suite de [[Ten08], p.507], le théorème des accroissements finis permet de montrer l'existence de N_0 et $C_{N_0} > 0$ tel que l'on ait, sous les conditions précédentes et uniformément pour $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ satisfaisant

$$(4.30) \quad \left(0 < u_{N_1, N_2} < N_0 + 1 \Rightarrow u_{N_1, N_2} - \lfloor u_{N_1, N_2} \rfloor > C_{N_0} \frac{\log \log y}{\log y} \right),$$

où $u_{N_1, N_2} := \frac{\log(c_q(N_1, N_2)x^3)}{\log y}$, la relation

$$(4.31) \quad \begin{aligned} M_{\sigma_q 1_{S(y)}}(\mathcal{B}) &= \frac{\eta c_q(N_1, N_2)x^3}{\zeta_q(2)\sigma_q(F)} \rho(3u_{N_1, N_2}) \left(1 + O \left(\frac{\log(u_{N_1, N_2} + 1)}{\log y} \right) \right) \\ &= \frac{\eta c_q(N_1, N_2)x^3}{\zeta_q(2)\sigma_q(F)} \rho(3u) \left(1 + O \left(\log \log x \frac{\log(u+1)}{\log y} \right) \right). \end{aligned}$$

Pour conclure la preuve de la proposition, il s'agit d'évaluer $M_{\sigma_q 1_{S(y)}}(\mathcal{B})$ pour les couples (N_1, N_2) ne vérifiant pas (4.30). Il suffit alors d'observer que

$$M_{\sigma_q 1_{S(y_1)}}(\mathcal{B}) \leq M_{\sigma_q 1_{S(y)}}(\mathcal{B}) \leq M_{\sigma_q 1_{S(y_2)}}(\mathcal{B})$$

dès que $y_1 \leq y \leq y_2$ et de remarquer que (4.31) entraîne

$$M_{\sigma_q 1_{S(y_1)}}(\mathcal{B}) = M_{\sigma_q 1_{S(y_2)}}(\mathcal{B}) = \frac{\eta c_q(N_1, N_2)x^3}{\zeta_q(2)\sigma_q(F)} \rho(3u) \left(1 + O \left(\log \log x \frac{\log(u+1)}{\log y} \right) \right)$$

avec les choix $y_1 = y(\log x)^{-c_1}$ et $y_2 = y(\log x)^{c_2}$ où c_1, c_2 sont des constantes suffisamment grandes. \square

5. DESCRIPTION DE LA MÉTHODE

Rappelons le choix de paramètre $\tau := (\log \log x)^{-\varpi_0}$ avec ϖ_0 fixé dans $]0, 1[$ effectué précédemment. Dans la série d'articles [HB01, HBM02, HBM04], Heath-Brown et Moroz réalisent le tour de force de montrer la validité de la formule (avec les notations (4.1) et (4.2))

$$(5.1) \quad S(\mathcal{A}, \mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \mathcal{C}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sigma_q(F)\eta}{c_q(N_1, N_2)x} S(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \mathcal{C}),$$

pour certains ensembles \mathcal{C} inclus dans

$$(5.2) \quad \mathcal{C}(m, n) := \left\{ rs : \Omega(r) = \omega(r) = m \text{ et } \Omega(s) = \omega(s) = n, P^-(rs) > x^\tau, x^{1+\tau} \leq s \leq x^{\frac{3}{2}-\tau} \right\}.$$

En adaptant les arguments de Heath-Brown et Moroz, on montrera dans le paragraphe 7 que la formule (5.1) se généralise sous la forme

$$(5.3) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sigma_q(F)\eta}{c_q(N_1, N_2)x} \sigma_q(\mathbf{i}) S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$$

uniformément pour les ensembles $E \in \mathcal{E}(m+n)$ avec la définition de $\mathcal{E}(m+n)$ suivante. Pour tout entier k , on désigne par $\mathcal{E}(k)$ l'ensemble des parties de \mathbf{N} qui s'écrivent sous la forme

$$(5.4) \quad E = \bigcap_{j=1}^{D_k} E_j(k)$$

où $D_k \geq 1$ et les $E_j(k)$ sont des ensembles de la forme

$$(5.5) \quad E_j(k) = E_j(k; y, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \prec) := \left\{ m : \Omega(m) = \omega(m) = k, yP^{(\vec{\alpha})}(m) \prec P^{(\vec{\beta})}(m) \right\}$$

où $y > 0$, \prec désigne l'ordre $<$ ou \leq , $\vec{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_{l_1})$ avec $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_{l_1}$ et $\vec{\beta} := (\beta_1, \dots, \beta_{l_2})$ avec $1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_{l_2}$ et les termes $P^{(\vec{\alpha})}(m)$ et $P^{(\vec{\beta})}(m)$ sont les produits

$$(5.6) \quad P^{(\vec{\alpha})}(m) := P^{(\alpha_1)}(m) \cdots P^{(\alpha_{l_1})}(m) \quad \text{et} \quad P^{(\vec{\beta})}(m) := P^{(\beta_1)}(m) \cdots P^{(\beta_{l_2})}(m),$$

les $P^{(i)}(m)$ étant définis par la décomposition de m en facteurs premiers

$$m = P^{(1)}(m) \cdots P^{(\Omega(m))}(m) \quad \text{avec} \quad P^{(i)}(m) \leq P^{(i+1)}(m)$$

avec la convention $P^{(\vec{\alpha})}(m) = 1$ (resp. $P^{(\vec{\beta})}(m) = 1$) si $l_1 = 0$ (resp. $l_2 = 0$)⁴. De tels ensembles apparaîtront naturellement au cours de l'argument qui conduit au théorème 5.2 *infra*. Obtenus à l'issue de multiples itérations de l'identité de Buchstab, ils étaient en particulier implicites dans [HB01].

Soient w un complexe de module 1, y_1, y_2 deux réels tels que $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$ et $y_2 > x^\tau$. Considérons h un élément de $\mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, c'est-à-dire une fonction multiplicative bornée par 1 satisfaisant les conditions suivantes :

- (1) h est à support sur les entiers m tels que $P^-(m) > y_1$ et $P^+(m) \leq y_2$,
- (2) pour tout premier p dans l'intervalle $]y_1, y_2]$, on a $h(p) = w$.

En isolant les idéaux \mathfrak{j} de \mathcal{A} tels que $\mathfrak{j}^+(x^\tau)$ possède au moins un facteur carré, on peut réécrire l'ordre moyen $M_h(\mathcal{A})$ défini par (2.12) sous la forme

$$(5.7) \quad M_h(\mathcal{A}) = \sum_{P^+(N(\mathfrak{i})) \leq x^\tau} h(\mathfrak{i}) \sum_{k \geq 0} w^k S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, (*_k) \cap \mathcal{C}^-(x^\tau)) + O \left(\sum_{\substack{\mathfrak{j} \in \mathcal{A} \\ N(\mathfrak{j}) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(\mathfrak{j})| \right)$$

où

$$(5.8) \quad (*_k) := \left\{ m : \Omega(m) = \omega(m) = k, y_1 < P^-(m), P^+(m) \leq y_2 \right\}$$

et

$$(5.9) \quad \Upsilon(z) := \bigcup_p \bigcup_{\substack{k \geq 2 \\ p^k > z}} p^k \mathbf{Z}.$$

Sous réserve de la validité de (4.3) et en remarquant que (4.10) implique l'estimation

$$(5.10) \quad \sigma_q(\mathfrak{j}) = \sigma_q(\mathfrak{j}^-(x^\tau)) \left(1 + O \left(\frac{1}{\tau x^\tau} \right) \right)$$

4. On peut ainsi considérer les inégalités du type $y \prec P^{(\vec{\alpha})}(m)$ ou $P^{(\vec{\alpha})}(m) \prec y$.

dès que $N(\mathfrak{j}) \ll x^3$, on peut espérer approcher $M_h(\mathcal{A})$ par la quantité

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_q(F)\eta}{c_q(N_1, N_2)x} \sum_{P^+(N(\mathfrak{i})) \leq x^\tau} h(\mathfrak{i}) \sigma_q(\mathfrak{i}) \sum_{k \geq 0} w^k S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, (*_k) \cap \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ &= \frac{\sigma_q(F)\eta}{c_q(N_1, N_2)x} \left(M_{\sigma_q h}(\mathcal{B}) \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right) \right) + O\left(\sum_{\substack{\mathfrak{j} \in \mathcal{B} \\ N(\mathfrak{j}) \in \mathcal{Y}(x^{2\tau})}} \sigma_q(\mathfrak{j}) |h(\mathfrak{j})| \right) \right) \end{aligned}$$

où $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$ est défini par (2.14).

Dans la suite de ce paragraphe, on établit un raisonnement combinatoire qui conduira au théorème 5.2, étape intermédiaire en vue de prouver la proposition 1.5. Celui-ci ramène le problème de l'estimation de $M_h(\mathcal{A})$ (resp. $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$) à l'estimation des cardinaux $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$ (resp. $S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$) pour des ensembles $E \in \mathcal{E}(m+n)$.

Soit $\varpi_1 \in]0, \varpi_0[$. On introduit un paramètre $\tau_1 \geq (\log \log x)^{-\varpi_1}$ suffisamment petit qui sera rendu explicite dans les applications du paragraphe 8, en vue de contrôler la contribution des idéaux \mathfrak{j} satisfaisant $N(\mathfrak{j}^+(x^\tau)) \geq x^{\tau_1}$.

Considérons, pour un idéal admissible \mathfrak{j} de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ donné, la décomposition de sa partie x^τ -criblée en produits d'idéaux premiers

$$(5.11) \quad \mathfrak{j}^+(x^\tau) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k, \quad N(\mathfrak{p}_i) \leq N(\mathfrak{p}_{i+1}), \quad i \in \{1, \dots, k-1\}.$$

On effectue une partition de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ sous la forme $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$ où les $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}$ sont des ensembles d'idéaux définis par des conditions sur la norme de \mathfrak{p}_k et \mathfrak{p}_{k-1} , à savoir

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} &:= \left\{ \mathfrak{j} : x^2 < N(\mathfrak{p}_k) \right\}, & \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)} &:= \left\{ \mathfrak{j} : x^{3/2} < N(\mathfrak{p}_k) \leq x^2 \right\}, \\ \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)} &:= \left\{ \mathfrak{j} : x < N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2} \right\}, & \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)} &:= \left\{ \mathfrak{j} : N(\mathfrak{p}_k) \leq x \text{ et } x^{3/2} < N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \right\} \\ & & \text{et } \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)} &:= \left\{ \mathfrak{j} : N(\mathfrak{p}_k) \leq x \text{ et } N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2} \right\}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$M_h(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^5 M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}) \quad \text{avec} \quad M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}) := \sum_{\mathfrak{j} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}} h(\mathfrak{j}).$$

Pour $i \in \{2, \dots, 5\}$, on peut remplacer le terme $M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)})$ par une formule où interviennent des cardinaux de la forme $S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(m, n))$ où $\mathcal{C}^{(i)}(m, n) \subset \mathcal{C}(m, n)$.

Lemme 5.1. *Uniformément en $x \geq 2$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, on a*

$$(5.12) \quad M_h(\mathcal{A}) = M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}) + \sum_{i=2}^5 \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{m, n} w^{m+n} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(m, n)) \\ + O\left(\sum_{\substack{\mathfrak{j} \in \mathcal{A} \\ N(\mathfrak{j}) \in \mathcal{Y}(x^{2\tau})}} |h(\mathfrak{j})| + \sum_{\substack{\mathfrak{j} \in \mathcal{A} \\ N(\mathfrak{j}^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(\mathfrak{j})| + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|) \right)$$

où

$$(5.13) \quad \mathcal{I} := \left\{ m \in \mathbf{Z} : m \leq x^{\tau_1} \text{ et } P^+(m) \leq x^\tau \right\},$$

(5.14)

$$\mathcal{C}^{(2)}(m, n) := \begin{cases} \{rs \in \mathcal{C}(m, n) : y_1 < P^-(s), P^+(s) \leq P^-(r), P^+(r) \leq y_2\} & \text{si } m = 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

(5.15)

$$\mathcal{C}^{(3)}(m, n) := \begin{cases} \{rs \in \mathcal{C}(m, n) : y_1 < P^-(r), P^+(r) \leq P^-(s), P^+(s) \leq y_2\} & \text{si } n = 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

(5.16)

$$\mathcal{C}^{(4)}(m, n) := \begin{cases} \{rs \in \mathcal{C}(m, n) : y_1 < P^-(s), P^+(s) \leq P^-(r), \\ P^+(r) \leq \max(x^{1-\tau_1}, y_2)\} & \text{si } m = 2, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

(5.17)

$$\mathcal{C}^{(5)}(m, n) := \left\{ rs \in \mathcal{C}(m, n) : y_1 < P^-(r), P^+(r) \leq P^-(s), P^+(s) \leq \max(x^{1-\tau_1}, y_2), \right. \\ \left. \frac{s}{P^-(s)} < x^{1+\tau} \right\}$$

(5.18)

$$\Delta_1(\mathcal{A}; |h|) := \max_{Y \geq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathfrak{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{ip}, \max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2-\tau_1}))\right).$$

et

(5.19)

$$\Delta_2(\mathcal{A}; |h|) := \max_{Y \geq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{\substack{x^{1/2} \leq N(\mathfrak{p}_1) \leq N(\mathfrak{p}_2) \\ Y \leq N(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \leq Yx^{\tau_1}}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{ip}_1 \mathfrak{p}_2, \max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2}))\right).$$

Proof. À l'image de (5.7), on peut écrire, pour tout $i \in \{2, \dots, 5\}$,

$$M_h\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}\right) = \sum_{P^+(N(\mathfrak{i})) \leq x^\tau} h(\mathfrak{i}) \sum_{k \geq 0} w^k S\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}, \mathfrak{i}, (*_k) \cap \mathcal{C}^-(x^\tau)\right) \\ + O\left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)|\right).$$

Soit j un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}$. En utilisant la décomposition (5.11) et sous l'hypothèse supplémentaire que $N(j^-(x^\tau)) \leq x^{\tau_1}$, l'encadrement

$$x^{3/2} < N(\mathfrak{p}_k) \leq x^2$$

entraîne largement que

$$x^{1-2\tau_1} \ll N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1}) \ll x^{3/2}.$$

En posant $r = N(\mathfrak{p}_k)$, $s = N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1})$ et $n = k - 1$, on déduit ainsi des définitions (5.13) et (5.14) que

$$M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{n \geq 0} w^{1+n} S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(2)}(1, n)) \\ + O \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \sum_{\substack{x^{3/2} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2+\tau_1} \\ \text{ou } x^{2-2\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^2}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \right).$$

De même, on peut écrire, en posant maintenant $s = N(\mathfrak{p}_k)$, la formule

$$M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)}) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{m \geq 0} w^{m+1} S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(3)}(m, 1)) \\ + O \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \sum_{\substack{x \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{1+\tau} \\ \text{ou } x^{3/2-\tau} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2}}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \right)$$

et, avec $s = N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-2})$,

$$M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)}) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{n \geq 0} w^{2+n} S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(4)}(2, n)) \\ + O \left(\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \sum_{x^{1-\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \right. \\ \left. + \sum_{\substack{x^{1/2} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}) < N(\mathfrak{p}_k) \\ x^{3/2} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2+\tau_1}}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \right).$$

Considérons enfin $j \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$. Si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{1+\tau}$ et $N(\mathfrak{p}_{k-2}) > x^{1/2-2\tau}$, on a les inégalités

$$x^{1/2-2\tau} < N(\mathfrak{p}_{k-2}) \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}) \leq N(\mathfrak{p}_k) < x^{1/2+3\tau}.$$

D'autre part, si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{1+\tau}$ et $N(\mathfrak{p}_{k-2}) \leq x^{1/2-2\tau}$, alors l'hypothèse de majoration $N(j^-(x^\tau)) \leq x^{\tau_1}$ implique l'existence d'un indice $j \geq 2$ tel que

$$N(\mathfrak{p}_{k-j+1} \cdots \mathfrak{p}_k) < x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_{k-j} \cdots \mathfrak{p}_k) < x^{3/2-\tau}.$$

Enfin, si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \geq x^{1+\tau}$, alors on a trivialement

$$x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{3/2}.$$

En posant $s = N(\mathfrak{p}_{k-j} \cdots \mathfrak{p}_k)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}) &= \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{m, n \geq 0} w^{m+n} S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(5)}(m, n)) \\
&+ O \left(\begin{aligned} &\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| \\ &+ \sum_{\substack{x^{1-\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x \\ \text{ou } x^{1/2-2\tau} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{1/2+3\tau}}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \\ &+ \sum_{\substack{x^{1/2} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}) < N(\mathfrak{p}_k) \\ x^{3/2-\tau} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2}}} \sum_{j \in \mathcal{A}_{\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k}} |h(j)| \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. \square

Le traitement de $M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)})$ nécessite davantage de travail pour faire apparaître des sous-ensembles de $\mathcal{C}(m, n)$. Au vu du lemme 2.4, on a

$$N(\mathfrak{p}_k) = \frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{N(j^-(x^\tau)\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1})} \left(1 + O(\eta^{1/4})\right)$$

ce qui suggère de remplacer la condition $N(\mathfrak{p}_k) \leq y_2$ par l'inégalité

$$N(j^-(x^\tau)\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1}) \geq \frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{y_2}.$$

Dans la mesure où les éléments de $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}$ satisfont $N(\mathfrak{p}_k) \geq x^2$, on peut écrire, en posant $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1}$,

$$\begin{aligned}
M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}) &= \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} \pi(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) \\
&+ O \left(\begin{aligned} &\sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

où la sommation $\sum^{i,k}$ porte sur les idéaux \mathfrak{q} à $k-1$ facteurs premiers satisfaisant $\frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{y_2 N(\mathfrak{i})} \leq N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1}$ et $P^-(N(\mathfrak{q})) > \max(x^\tau, y_1)$, et

$$\pi(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \# \{\mathfrak{p} \text{ premier} : \mathfrak{l}\mathfrak{p} \in \mathcal{A}\}.$$

Pour estimer $\pi(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$, on reproduit le raisonnement combinatoire à l'origine du lemme 4.1 de [HBM02]. En utilisant la notation (4.4), l'identité de Buchstab et le lemme 2.3 assurent que, si

$$\max(\{1\} \cup \{p^3 : p \text{ premier } 1\text{-singulier}\}) < z_1 \leq z_2,$$

alors on a

$$(5.20) \quad S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}, \mathcal{C}^-(z_1)) - S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}, \mathcal{C}^-(z_2)) = \sum_{z_1 < N(\mathfrak{p}) \leq z_2} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))) \\ + O\left(\sum_{z_1 < N(\mathfrak{p}) \leq z_2} \sum_{k \geq 2} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}^k, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p})))\right).$$

Ceci permet d'établir par récurrence la formule combinatoire suivante, analogue des formules (4.3) et (4.4) de [HBM02],

$$\pi(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) = S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}, \mathcal{C}^-(x^{3/2+\tau})) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) + \sum_{n \geq 1} (-1)^n U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) \\ - S_1(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) - S_2(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) + O\left(\#\{j \in \mathcal{A}_\mathfrak{l} : N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})\}\right)$$

où

$$S_1(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{x^{1-\tau} \leq N(\mathfrak{p}) < x^{1+\tau}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))),$$

$$S_2(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{x^{3/2-\tau} < N(\mathfrak{p}) \leq x^{3/2+\tau}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))),$$

$$(5.21) \quad T^{(0)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}, \mathcal{C}^-(x^\tau)), \quad U^{(1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))),$$

$$(5.22) \quad T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \dots < N(\mathfrak{p}_n) < x^{1-\tau} \\ N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n) < x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}_1 \dots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \quad \text{si } n \geq 1$$

et

$$U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \dots < N(\mathfrak{p}_n) < x^{1-\tau} \\ N(\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n) < x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}_1 \dots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1))) \quad \text{si } n \geq 2.$$

Le niveau de crible x^τ impliqué dans la définition de $T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$ étant suffisamment petit, on étudiera la contribution de ces termes, en moyenne sur les idéaux \mathfrak{l} tels que $N(\mathfrak{l}) \leq x^{1-3\tau_1}$, au lemme 6.7 en utilisant le crible de Selberg, validant ainsi la pertinence de (4.5).

Si $n \geq 4$, les conditions

$$x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \dots < N(\mathfrak{p}_n) < x^{1-\tau}$$

et

$$N(\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n) < x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)$$

entraînent que

$$N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}.$$

Par suite, on peut espérer évaluer la contribution de $U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q})$ lorsque $n \geq 4$ ou $n = 1$ avec $N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}$ en utilisant l'estimation (5.3) puisque l'on peut écrire

$$\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{m}} w^{m_1} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathfrak{m}, n, \mathfrak{i}))$$

où $\mathbf{m} := (m_1, m_2)$,

$$\mathcal{C}(\mathbf{m}, n) := \left\{ r_1 r_2 s : \omega(r_i) = \Omega(r_i) = m_i \text{ pour } i = 1, 2, \omega(s) = \Omega(s) = n, \right. \\ \left. P^-(r_1 r_2 s) > x^\tau, x^{1+\tau} \leq s \leq x^{3/2-\tau} \right\},$$

$$(5.23) \quad \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, 1, \mathbf{i}) := \left\{ r_1 r_2 s \in \mathcal{C}((m_1 - 1, m_2), 1) : P^-(r_2) > s, \right. \\ \left. \frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{y_2 N(\mathbf{i})} \leq r_1 \leq x^{1-4\tau_1} \text{ et } P^-(r_1) > y_1 \right\}$$

et, pour $n \geq 2$,

$$(5.24) \quad \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, n, \mathbf{i}) := \left\{ r_1 r_2 s \in \mathcal{C}((m_1 - 1, m_2), n) : P^-(r_2) > P^-(s), P^+(s) < x^{1-\tau}, \right. \\ \left. \frac{s}{P^-(s)} < x^{1+\tau}, \frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{y_2 N(\mathbf{i})} \leq r_1 \leq x^{1-4\tau_1} \text{ et } P^-(r_1) > y_1 \right\},$$

où les triplets (r_1, r_2, s) sont comptés avec multiplicité, en posant $m_1 = k$, $s = N(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n)$ et $r_1 = N(\mathbf{q})$ avec les notations de la définition de $U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$.

Si $n = 2$ ou 3 , l'inégalité $N(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n) \leq x^{3/2-\tau}$ peut faire défaut. On s'inspire alors des identités (4.5) et (4.6) de [HBM02] en écrivant

$$U^{(2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := U^{(2,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) + U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$$

et

$$U^{(3)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := U^{(3,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) + S_3(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$$

où

$$U^{(2,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}_2) < x^{1-\tau} \\ x^{1+\tau} \leq N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))),$$

$$U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}_2) < x^{1-\tau} \\ x^{\frac{3}{2}-\tau} < N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))),$$

$$U^{(3,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}_2) < N(\mathbf{p}_3) < x^{1-\tau} \\ N(\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) < x^{1+\tau} \leq N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3}, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1)))$$

et

$$S_3(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}_2) < N(\mathbf{p}_3) < x^{1-\tau} \\ N(\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) < x^{1+\tau} \\ N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) > x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3}, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))).$$

On peut observer que

$$\sum_k w^k \sum_{\mathbf{q}}^{i,k} U^{(2,1)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{m}} w^{m_1} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, 2, \mathbf{i}))$$

et

$$\sum_k w^k \sum_{\mathbf{q}}^{i,k} U^{(3,1)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{m}} w^{m_1} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, 3, \mathbf{i}))$$

où $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, 2, \mathbf{i})$ et $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, 3, \mathbf{i})$ sont définis par (5.24).

De plus, remarquons que, si un idéal \mathfrak{j} intervient dans $U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{iq})$, alors \mathfrak{j} est de la forme $\mathfrak{j} = \mathfrak{iq}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ avec

$$x^{3/2-\tau} < N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{2-2\tau} \text{ et } P^-(N(\mathfrak{l})) > N(\mathfrak{p}_1).$$

Il s'ensuit que

$$x^{1-\tau_1} \leq N(\mathfrak{ql}) \leq x^{3/2+\tau}$$

ce qui suggère d'écrire, en posant $r = N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)$, $s_1 = N(\mathfrak{q})$, $s_2 = N(\mathfrak{l})$ et $n_1 = k$,

$$\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{iq}) = \sum_{\mathbf{n}} w^{n_1} S\left(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(2, \mathbf{n}, \mathbf{i})\right) + O\left(\sum_{\substack{\frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{y_2} \leq N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > \max(y_1, x^\tau)}} \sum_{\substack{x^{1/2} < N(\mathfrak{p}_1) < N(\mathfrak{p}_2) \\ x^{3/2-\tau} \leq N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{3/2+\tau} \\ \text{ou } x^{2-2\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{2-2\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{iq}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1)))\right)$$

où

$$\mathcal{C}(m, \mathbf{n}) := \left\{ r s_1 s_2 : \omega(r) = \Omega(r) = m, \omega(s_i) = \Omega(s_i) = n_i \text{ pour } i = 1, 2, \right. \\ \left. P^-(r s_1 s_2) > x^\tau, x^{1+\tau} \leq s_1 s_2 \leq x^{3/2-\tau} \right\}.$$

et

$$(5.25) \quad \mathcal{C}^{(1)}(2, \mathbf{n}, \mathbf{i}) := \left\{ r s_1 s_2 \in \mathcal{C}(2, (n_1 - 1, n_2)), P^+(r) < x^{1-\tau}, P^-(r) < P^-(s_2), \right. \\ \left. \frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{y_2 N(\mathbf{i})} \leq s_1 \leq x^{1-4\tau_1}, P^-(s_1) > y_1 \right\}$$

où les triplets (r, s_1, s_2) sont comptés avec multiplicité.

On observe enfin que l'on peut majorer la somme sur \mathbf{i} du terme d'erreur précédent par la quantité $\Delta_2(\mathcal{A}; |h|)$ défini par (5.19). De même, en remarquant que les conditions de sommations définissant $S_3(\mathcal{A}, \mathbf{i})$ impliquent

$$x^{1/2-2\tau} < N(\mathfrak{p}_1) < x^{1/2+\tau/2},$$

on a, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, l'estimation

$$\sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{\frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{y_2} \leq N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > \max(x^\tau, y_1)}} S_i(\mathcal{A}, \mathfrak{iq}) \ll \Delta_1(\mathcal{A}; |h|).$$

où $\Delta_1(\mathcal{A}; |h|)$ est défini par (5.19).

On déduit finalement de ce qui précède la formule

$$(5.26) \quad M_h \left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \right) = \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathbf{i}) \left(\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} \sum_{n \geq 0} (-1)^n T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathfrak{q}) \right. \\ \left. + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \sum_{\mathbf{m}} w^{m_1} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, n, \mathbf{i})) + \sum_{\mathbf{n}} w^{n_1} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(2, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right) \\ + O \left(\Delta_1(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|) + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| + \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)| \right).$$

L'argument développé ci-dessus s'adapte *mutatis mutandis* pour réécrire $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$ à l'aide de cardinaux de la forme $S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$. En l'absence d'un analogue du lemme 2.3 adapté aux idéaux de \mathcal{B} , il convient toutefois d'user de précaution en considérant également la contribution des idéaux non admissibles dans l'utilisation de (5.20) au cours du traitement de $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)})$. Cette nouveauté dans la transcription à \mathcal{B} de l'argument combinatoire précédent était déjà implicitement contenue dans les travaux de Heath-Brown et Moroz, à l'image de la formule (6.4) de [HB01] ou encore lors de l'introduction de l'ordre total sur les idéaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ dans le paragraphe 4 de [HBM02].

Avant d'énoncer la proposition qui résume la discussion de cette partie, harmonisons les notations précédentes en introduisant, pour $\mathbf{m} := (m_1, m_2)$, $\mathbf{n} := (n_1, n_2)$, \mathbf{i} un idéal et $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} , les notations

$$(5.27) \quad \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) := \begin{cases} \left\{ (r, 1, s, 1) : rs \in \mathcal{C}^{(i)}(m_1, n_1) \right\} & \text{si } 2 \leq i \leq 5 \text{ et } m_2 = n_2 = 0, \\ \left\{ (r_1, r_2, s, 1) : r_1 r_2 s \in \mathcal{C}^{(1)}((m_1, m_2), n_1, \mathbf{i}) \right\} & \text{si } i = 1 \text{ et } n_2 = 0, \\ \left\{ (r, 1, s_1, s_2) : r s_1 s_2 \in \mathcal{C}^{(1)}(m_1, (n_1, n_2), \mathbf{i}) \right\} & \text{si } i = 1 \text{ et } m_2 = 0, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$S(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) := \# \left\{ (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2) : (N(\mathfrak{r}_1), N(\mathfrak{r}_2), N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)) \in \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) \right. \\ \left. \text{et } \mathfrak{it}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{D} \right\}.$$

Théorème 5.2. *On a, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, l'estimation*

$$M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2)x} M_{\sigma_q h} S(\mathcal{B}) \ll T(|h|) + S(|h|) + \Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(|h|, x^{2\tau/3}) \\ + \Delta_1(|h|) + \Delta_2(|h|)$$

où

$$T(|h|) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} \sum_{n \geq 0} \left| T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathfrak{q}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2)x} \sigma_q(\mathbf{i}) T^{(n)}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathfrak{q}) \right|,$$

$T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i})$ et $T^{(n)}(\mathcal{B}, \mathbf{i})$ étant définis par (5.22),

$$(5.28) \quad S(|h|) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left| S\left(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})\right) - \frac{\eta\sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2)x} \sigma_q(\mathbf{i}) S\left(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})\right) \right|,$$

les $\mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})$ étant définis par (5.14), (5.15), (5.16), (5.17), (5.23), (5.24) et (5.25),

$$(5.29) \quad \Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) := \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \\ N(\mathbf{j}^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(\mathbf{j})| + \frac{\eta\sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2)x} \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{B} \\ N(\mathbf{j}^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} \sigma_q(\mathbf{j}) |h(\mathbf{j})|,$$

$$(5.30) \quad \Delta_0(|h|, x^{2\tau/3}) := \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon(x^{2\tau/3})}} |h(\mathbf{j})| + \frac{\eta\sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2)x} \left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{B} \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon(x^{2\tau/3})}} \sigma_q(\mathbf{j}) |h(\mathbf{j})| \right),$$

$$(5.31) \quad \Delta_1(|h|) := \max_{Y \geq x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathbf{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \left(S\left(\mathcal{A}, \mathbf{ip}, \max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2-\tau_1}))\right) + \sigma_q(\mathbf{i}) \frac{\eta\sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2)x} S\left(\mathcal{B}, \mathbf{ip}, \max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2-\tau_1}))\right) \right)$$

et

$$(5.32) \quad \Delta_2(|h|) := \max_{Y \geq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{\substack{x^{1/2} \leq N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}_2) \\ Y \leq N(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) \leq Yx^{\tau_1}}} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \left(S\left(\mathcal{A}, \mathbf{ip}_1\mathbf{p}_2, \max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2}))\right) + \sigma_q(\mathbf{i}) \frac{\eta\sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2)x} S\left(\mathcal{B}, \mathbf{ip}_1\mathbf{p}_2, \max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2}))\right) \right).$$

Au cours des paragraphes 6 et 7, on établira des bornes supérieures des différents termes d'erreur impliqués dans le théorème 5.2.

6. PREMIÈRES APPLICATIONS DES ESTIMATIONS DE SOMMES DE TYPE I

Dans cette partie, on utilise les estimations de sommes de Type I du paragraphe 3 pour établir des bornes supérieures des différents termes d'erreur impliqués dans le théorème 5.2, à l'exception de $S(|h|)$ qui fera l'objet du paragraphe 7 sur les estimations de sommes de Type II.

Le lemme ci-dessous donne une majoration de la contribution des idéaux dont la norme appartient à $\Upsilon((\log x)^c)$, c'est-à-dire est divisible par un $p^k > (\log x)^c$ avec $k \geq 2$. Il en découle une majoration du terme $\Delta_0(|h|, x^{2\tau/3})$ défini par (5.30).

Lemme 6.1. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) > 0$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, on ait*

$$(6.1) \quad \#\left\{1 \leq n_1, n_2 \leq x : F(n_1, n_2) \in \Upsilon\left((\log x)^{c(B)}\right)\right\} \ll x^2 (\log x)^{-B}$$

et

$$(6.2) \quad \sum_{\substack{N(\mathbf{j}) \leq x \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon((\log x)^{c(B)})}} \sigma_q(\mathbf{j}) \ll x (\log x)^{-B}.$$

En particulier, uniformément en $x \geq 2$, w un complexe de module 1, $y_1, y_2 \geq 1$ des réels et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, on a

$$(6.3) \quad \Delta_0(|h|, x^{2\tau/3}) \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

Ce résultat – largement inspiré du lemme 2 de [Gre92] – peut être considéré comme une extension du lemme 5 de [Del71] aux formes binaires.

Proof. Soit $C > 0$. Pour tout nombre premier p , posons

$$k(p) := \max\left(2, \left\lfloor \frac{C \log \log x}{\log p} \right\rfloor + 1\right).$$

Étant donné des entiers n_1 et n_2 tels que $(p, n_1 n_2) = 1$ et $p^{k(p)} | F(n_1, n_2)$, il existe ω tel que

$$F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}} \quad \text{et} \quad n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^{k(p)}}.$$

Par suite, on peut écrire à l'aide du lemme 1 de [Gre92] les inégalités

$$(6.4) \quad \begin{aligned} & \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : (p, n_1 n_2) = 1, p^{k(p)} | F(n_1, n_2) \right\} \\ & \leq \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \# \left\{ 0 \leq n_1, n_2 \leq x : n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^{k(p)}} \right\} \\ & \leq \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \left(\frac{x^2}{p^{k(p)}} + O\left(\frac{x}{M_0(\omega, p^{k(p)})}\right) \right) \end{aligned}$$

où

$$M_0(\omega, p^k) := \min_{\substack{(n_1, n_2) \neq (0, 0) \\ n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^k}}} \max(|n_1|, |n_2|).$$

Considérons tout d'abord les premiers $p \nmid F(1, 0)F(0, 1)$. On a

$$\begin{aligned} & \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : p^{k(p)} | F(n_1, n_2) \right\} \\ & \leq \frac{x^2}{p^{2k(p)/3}} + \sum_{0 \leq k < k(p)/3} \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq \frac{x}{p^k} : (p, n_1 n_2) = 1, p^{k(p)-3k} | F(n_1, n_2) \right\}. \end{aligned}$$

Dans la mesure où le nombre de racines modulo p^k du polynôme $F(X_1, 1)$ est borné uniformément pour p premier et $k \geq 1$, il suit de (6.4) que l'on a

$$\sum_{p \nmid F(1, 0)F(0, 1)} \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : p^{k(p)} | F(n_1, n_2) \right\} \ll \sum_{p \leq x^{3/2}} \frac{x^2}{p^{2k(p)/3}} + S_1 + S_2 + S_3$$

où

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{p \leq x^{1/2}} \sum_{0 \leq k < k(p)/3} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)-3k} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)-3k}}}} \frac{x}{p^k M_0(\omega, p^{k(p)-3k})}, \\ S_2 &= \sum_{x^{1/2} < p \leq x^{3/2}} \sum_{0 \leq k < k(p)/3} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)-3k} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)-3k}} \\ p^k M_0(\omega, p^{k(p)-3k}) > x^{3/4}}} \frac{x}{p^k M_0(\omega, p^{k(p)-3k})} \end{aligned}$$

et

$$S_3 = \sum_{x^{1/2} < p \ll x^{3/2}} \sum_{0 \leq k < k(p)/3} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)-3k} \\ F(\omega, 1) \equiv 0 \pmod{p^{k(p)-3k}} \\ p^k M_0(\omega, p^{k(p)-3k}) \leq x^{3/4}}} \frac{x}{p^k M_0(\omega, p^{k(p)-3k})}.$$

Observons que

$$\sum_p \frac{x^2}{p^{2k(p)/3}} \ll \sum_{p \leq (\log x)^{C/2}} \frac{x^2}{(\log x)^{2C/3}} + \sum_{p > (\log x)^{C/2}} \frac{x^2}{p^{4/3}} \ll \frac{x^2}{(\log x)^{C/6}}.$$

En utilisant le fait que $k(p) \ll \log \log x$, l'estimation triviale $M_0(\omega, p^{k(p)-3k}) \geq 1$ pour S_1 et l'hypothèse $p^k M_0(\omega, p^{k(p)-3k}) > x^{3/4}$ pour S_2 , il vient aussi les majorations

$$S_1 \ll \frac{x^{3/2} \log \log x}{\log x} \quad \text{et} \quad S_2 \ll \frac{x^{7/4}}{\log x}.$$

De l'estimation

$$S_3 \ll \sum_{1 \leq n_1 \leq x^{3/4}} \frac{x}{n_1} \sum_{0 \leq n_2 \leq n_1} \sum_{\substack{x^{1/2} < p \\ p^2 | F(n_1, n_2)}} 1 \ll x^{7/4},$$

on déduit finalement que

$$\sum_{p \nmid F(1,0)F(0,1)} \# \{1 \leq n_1, n_2 \leq x : p^{k(p)} | F(n_1, n_2)\} \ll x^2 (\log x)^{-C/6}.$$

Étudions à présent la contribution des p , n_1 et n_2 tels que $p | F(1,0)F(0,1)$. Les estimations (1.6) et (3.16) entraînent alors la majoration

$$\begin{aligned} \# \{1 \leq n_1, n_2 \leq x : p^{k(p)} | F(n_1, n_2)\} &\ll x^2 \frac{\gamma_F(p^{k(p)})}{p^{2k(p)}} + x (\log x)^{C/2} (\log \log x)^{7203} \\ &\ll x^2 (\log x)^{-2C/3}. \end{aligned}$$

En choisissant C suffisamment grand, il s'ensuit l'estimation (6.1).

Pour établir (6.2), on utilise la méthode de Rankin pour écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N(j) \leq x \\ N(j) \in \Upsilon((\log x)^C)}} \sigma_q(j) &\ll \sum_p \sum_{k(p) \leq k} \sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k) \sum_{N(j) \leq x/p^k} \sigma_q(j) \\ &\ll x \sum_p \sum_{k(p) \leq k} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \sum_{N(j) \leq x} \frac{\sigma_q(j)}{N(j)}. \end{aligned}$$

Au vu de (4.20) et (4.14), il suit

$$\sum_{\substack{N(j) \leq x \\ N(j) \in \Upsilon((\log x)^C)}} \sigma_q(j) \ll x \log x \sum_p \sum_{k(p) \leq k} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \ll x (\log x)^{1-C/6},$$

ce qui implique (6.2) quitte à choisir C suffisamment grand. \square

Les estimations de Type I établies dans la section 3 permettent, au moyen d'un lemme de crible, de donner des bornes supérieures du bon ordre de grandeur des cardinaux $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z))$ et $S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z))$ définis au paragraphe 4.1. De telles estimations seront centrales dans les majorations de $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$, $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$.

Lemme 6.2. Soient B_1 et $B_2 \geq 0$. Il existe $c(B_1, B_2) > 0$ tel que, uniformément pour $z > \max(p \text{ premier } q\text{-singulier})$, on ait

$$(6.5) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(\mathbf{i}^-(z))}{\log z N(\mathbf{i})} + R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z)$$

et

$$(6.6) \quad S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{c_q(N_1, N_2) \eta x^3}{N(\mathbf{i}) \log z} + R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z)$$

où $R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z)$ et $R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z)$ sont définis par (6.7) infra et satisfont

$$\sum_{N(\mathbf{i})z^2 \leq x^2 (\log x)^{-c(B_1, B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z) \ll x^2 (\log x)^{-B_2}$$

et

$$\sum_{N(\mathbf{i})z^2 \leq x^3 (\log x)^{-c(B_1, B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} \sigma_q(\mathbf{i}) R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z) \ll x^3 (\log x)^{-B_2}.$$

Proof. Puisque la fonction de densité $\xi_q(\mathbf{i}, \cdot)$ définie par (3.40) satisfait (3.42), elle vérifie les hypothèses de crible (Ω_0) et (Ω_1) de [HR74]. On peut donc appliquer le théorème 4.1 de [HR74] ce qui entraîne l'estimation

$$S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z)) \ll \eta^2 x^2 \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq z} (1 - \xi_q(\mathbf{i}, p)) + R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z)$$

où, pour $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} ,

$$(6.7) \quad R_{\mathcal{D}}(\mathbf{i}, z) := \sum_{d \leq z^2} \tau(d)^2 \mu(d)^2 |r(\mathcal{D}, \mathbf{i}, d)|$$

et $r(\mathcal{D}, \mathbf{i}, d)$ est défini par (3.39) et (3.43). En estimant le terme de reste à l'aide du lemme 3.6, on en déduit l'existence d'une constante $c(B_1, B_2) > 0$ pour laquelle on ait

$$\sum_{N(\mathbf{i})z^2 \leq x^2 (\log x)^{-c(B_1, B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z) \ll x^2 (\log x)^{-B_2}.$$

Sous l'hypothèse $z > \max(p \text{ premier } q\text{-singulier})$, la formule de crible (6.5) est une conséquence de (4.8), (4.9) et (4.12).

Pour établir (6.6), il suffit de reproduire le même argument en utilisant le lemme 3.8 (resp. (4.7)) en lieu et place du lemme 3.6 (resp. (4.8), (4.9) et (4.12)). D'après (4.13) et (4.14), il suit ainsi que, pour $c(B_2) > 0$ suffisamment grand, on a

$$(6.8) \quad \sum_{N(\mathbf{i})z^2 \leq x^3 (\log x)^{-c(B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} \sigma_q(\mathbf{i}) R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z) \ll x^3 (\log x)^{-B_2} \sum_{N(\mathbf{i}) \leq x^3} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \ll (\log x)^{c(B_1, B_2)}.$$

□

Une borne supérieure de la quantité $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$ définie par (5.29) peut être obtenue en s'inspirant de travaux antérieurs concernant les ordres moyens de fonctions arithmétiques sur les valeurs polynomiales. Par exemple, Tenenbaum [[Ten90], Lemme 3.7] montre que, pour tout polynôme $F \in \mathbf{Z}[X]$, il existe $c(F) > 0$ tel que, uniformément en $z \geq y \geq 2$ et $x \geq 2$, on ait

$$\# \left\{ n \leq x : \prod_{\substack{p \leq y \\ p^\nu \parallel F(n)}} p^\nu > z \right\} \ll x \exp \left(-c(F) \frac{\log z}{\log y} \right).$$

En vue d'obtenir un analogue de ce résultat au cas des formes binaires, on peut adapter la preuve du théorème 1 de [Shi80], démarche à l'origine du résultat suivant.

Lemme 6.3. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que, uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, et $z \geq y \geq \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, on ait*

$$(6.9) \quad \#\{j \in \mathcal{A} : N(j^-(y)) > z\} \ll \eta^2 x^2 \exp\left(-c_1 \frac{\log z}{\log y} \log\left(\frac{\log z}{\log y}\right)\right)$$

et

$$(6.10) \quad \sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ N(j^-(y)) > z}} \sigma_q(j) \ll c_q(N_1, N_2) \eta x^3 \exp\left(-c_1 \frac{\log z}{\log y} \log\left(\frac{\log z}{\log y}\right)\right).$$

En particulier, on a, sous les conditions précédentes et uniformément en w un complexe de module 1, $y_2 \geq 1$ et $h \in \mathcal{M}(w; 1, y_2)$,

$$\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) \ll \eta^2 x^2 \exp\left(-c_1 \frac{\tau_1}{\tau} \log\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)\right).$$

Proof. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on a $y \leq z^{1/4}$ et $z \leq x$, le résultat étant trivial autrement. Étant donné un idéal j et la décomposition de la norme de sa partie q -régulière et y -friable

$$N(j_{q-r}^-(y)) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad p_i < p_{i+1},$$

considérons $j \geq 0$ le plus grand entier tel que

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j} \leq z^{1/2}$$

et définissons les diviseurs j_1 et j_2 de $j_{q-r}^-(y)$ par les conditions

$$N(j_1) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j} \quad \text{et} \quad N(j_2) = p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

On scinde l'ensemble des différents j tels que $N(j^-(y)) > z$ en quatre classes :

- classe I : $N(j_{q-s}) > z^{1/2}$,
- classe II : $N(j_1) \leq z^{1/4}$ et $N(j_{q-s}) \leq z^{1/2}$,
- classe III : $p_{j+1} \leq \log x \log \log x$, $N(j_1) > z^{1/4}$ et $N(j_{q-s}) \leq z^{1/2}$,
- classe IV : $\log x \log \log x < p_{j+1} \leq y$, $N(j_1) > z^{1/4}$ et $N(j_{q-s}) \leq z^{1/2}$,

et on estime la contribution de chacune de ces classes séparément.

Contribution de la classe I. Compte tenu de l'hypothèse $N(j_{q-s}) > z^{1/2}$, il existe un premier q -singulier p et un entier $k \geq 2$ tels que $p^k > z^{1/(2\omega_{q-s})} \geq \exp\left(\frac{\log x}{2\omega_{q-s}(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, où ω_{q-s} désigne le nombre de premiers q -singuliers. Par suite, le lemme 6.1 entraîne que, pour tout $B > 0$, on a

$$\#\{j \in \mathcal{A} : N(j_{q-s}) > z^{1/2}\} \ll x^2 (\log x)^{-B} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ N(j_{q-s}) > z^{1/2}}} \sigma_q(j) \ll x^3 (\log x)^{-B}.$$

Contribution de la classe II. Dans la mesure où les idéaux de cette classe vérifient les inégalités $N(j_1) \leq z^{1/4}$ et $N(j_{q-r}^-(y)) > z^{1/2}$, il s'ensuit que $p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} > z^{1/4}$. Sous l'hypothèse $y \leq z^{1/4}$, on a également $\alpha_{j+1} \geq 2$ ce qui signifie que les idéaux de cette classe ont leur norme dans $\Upsilon(z^{1/4})$. Là encore, le lemme 6.1 entraîne que l'on a, pour tout $B > 0$,

$$\#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe II}\} \ll x^2 (\log x)^{-B} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ j \text{ dans la classe II}}} \sigma_q(j) \ll x^3 (\log x)^{-B}.$$

Contribution de la classe III. En utilisant successivement le lemme 3.5 puis la majoration large $\alpha_q^{\mathbf{Z}}(m) \ll m^{1/2}$ consécutive à (3.25), on remarque que, sous l'hypothèse $z \leq x$, on obtient par la méthode de Rankin l'estimation

$$\begin{aligned} & \# \{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe III}\} \\ & \ll \eta^2 x^2 \sum_{\substack{z^{1/4} < N(\mathbf{i}) \leq z^{1/2} \\ P^+(N(\mathbf{i})) \leq \log x \log \log x}} \frac{\alpha_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^{5/3} (\log x)^c \\ & \ll x^2 \sum_{\substack{m \leq x^{1/2} \\ P^+(m) \leq \log x \log \log x}} \frac{1}{m^{1/2}} \left(\frac{m}{z^{1/4}} \right)^{1/2} + x^{5/3} (\log x)^c \\ & \ll x^2 z^{-1/8} \Psi(x^{1/2}, \log x \log \log x) + x^{5/3} (\log x)^c. \end{aligned}$$

L'estimation de $\Psi(x, t)$ due à de Bruijn [[dB66], Theorem 1] et uniforme en $x \geq t > 2$, à savoir

$$\begin{aligned} \log \Psi(x, t) = & \left(\frac{\log x}{\log t} \log \left(1 + \frac{t}{\log x} \right) + \frac{t}{\log t} \log \left(1 + \frac{\log x}{t} \right) \right) \\ & \times \left(1 + O \left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log \log(x+2)} \right) \right), \end{aligned}$$

entraîne la majoration $\Psi(x^{1/2}, \log x \log \log x) \ll \exp \left(O \left(\frac{\log x \log \log \log x}{\log \log x} \right) \right)$. Par suite, il suit de l'hypothèse $z \geq \exp \left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}} \right)$, que l'on a, pour tout $B > 0$,

$$\# \{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe III}\} \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

De façon similaire, le théorème 3.7 et l'estimation (4.14) impliquent

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ J \text{ dans la classe III}}} \sigma_q(j) \ll x^3 (\log x)^{-B}.$$

On déduit de ce qui précède que les contributions des classes I, II et III sont négligeables dans (6.9) et (6.10). La contribution principale proviendra ainsi des idéaux de la classe IV.

Contribution de la classe IV. Commençons par découper l'ensemble des p_{j+1} en sous-intervalles du type $\left] z^{1/(s+1)}, z^{1/s} \right]$ avec $s_1 \leq s \leq s_2$ où

$$s_1 := \left\lfloor \frac{\log z}{\log y} \right\rfloor \text{ et } s_2 := \left\lfloor \frac{\log z}{\log(\log x \log \log x)} \right\rfloor.$$

On observe alors que

$$\begin{aligned} & \# \{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe IV}\} \\ & \ll \sum_{s_1 \leq s \leq s_2} \sum_{\substack{j_1 \text{ } q\text{-régulier} \\ z^{1/4} \leq N(j_1) < z^{1/2} \\ P^+(N(j_1)) < z^{1/s}}} S \left(\mathcal{A}, \mathbf{i}j_1, \mathcal{C}^-(z^{1/(s+1)}) \right). \end{aligned}$$

Puisque $z^{1/(s+1)} > \log x$ si $s \leq s_2$, on peut utiliser la formule (6.5) du lemme 6.2 pour en déduire que, pour tout $B > 0$, la contribution des idéaux de la classe IV est

$$\ll \frac{\eta^2 x^2}{\log z} \sum_{s_1 \leq s \leq s_2} (s+1) \sum_{\substack{m \text{ } q\text{-régulier} \\ z^{1/4} \leq m < z^{1/2} \\ P^+(m) \leq z^{1/s}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(m)}{m} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

Dans la mesure où la fonction $\sigma_q^{\mathbf{Z}}$ restreinte aux entiers q -réguliers satisfait les hypothèses du lemme 4 de [Shi80], celui-ci entraîne l'estimation de la somme intérieure, uniforme en $s \leq \log z / \log \log z$, suivante

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m \text{ } q\text{-régulier} \\ z^{1/4} \leq m \\ P^+(m) \leq z^{1/s}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(m)}{m} &\ll \exp \left(\sum_{\substack{p \text{ } q\text{-régulier} \\ p \leq z^{1/s}}} \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p)}{p} - \frac{1}{20} s \log(s/2) \right) \\ &\ll \frac{\log z}{s} \exp \left(-\frac{1}{20} s \log(s/2) \right) \end{aligned}$$

Ceci implique alors l'estimation

$$\#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe IV}\} \ll \eta^2 x^2 \sum_{s_1 \leq s \leq s_2} \exp(-c_1 s \log s) + x^2 (\log x)^{-B}.$$

Au vu de l'hypothèse $z \geq y \geq \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, on en déduit que

$$\#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe IV}\} \ll \eta^2 x^2 \exp\left(-c_1 \frac{\log z}{\log y} \log\left(\frac{\log z}{2 \log y}\right)\right).$$

En utilisant (6.6) au lieu de (6.5), on obtient de même que

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ j \text{ dans la classe IV}}} \sigma_q(j) \ll c_q(N_1, N_2) \eta x^3 \exp\left(-c_1 \frac{\log z}{\log y} \log\left(\frac{\log z}{2 \log y}\right)\right)$$

ce qui permet de déduire (6.10). \square

À partir de maintenant, nous n'emploierons le lemme 6.2 qu'avec un niveau de crible $z \geq x^\tau$. Le lemme suivant précise la borne supérieure disponible dans un tel cadre.

Lemme 6.4. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c_1(B)$ et $c_2(B) > 0$ tels que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $z > \log x$ et $\mathcal{C} \subset \left(\mathcal{C}^-((\log x)^{c_1(B)})\right)^2$ où $\mathcal{C}^-(\cdot)$ est défini par (4.4), et pour tout idéal \mathfrak{i} tel que $N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}$, on ait*

$$(6.11) \quad \begin{aligned} &\sum_{\substack{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ (N(\mathfrak{q}_1), N(\mathfrak{q}_2)) \in \mathcal{C} \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)z^2 \leq x^2(\log x)^{-c_2(B)}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, \mathcal{C}^-(z)) \\ &\ll \frac{\eta^2 x^2}{\log z} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \sum_{(d_1, d_2) \in \mathcal{C}} \mu^2(d_1 d_2) \frac{\nu_{d_1 d_2}}{d_1 d_2} + R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i}). \end{aligned}$$

et

$$(6.12) \quad \begin{aligned} &\sum_{\substack{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ (N(\mathfrak{q}_1), N(\mathfrak{q}_2)) \in \mathcal{C} \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)z^2 \leq x^3(\log x)^{-c_2(B)}}} S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, \mathcal{C}^-(z)) \\ &\ll \frac{c_q(N_1, N_2) \eta x^3}{N(\mathfrak{i}) \log z} \sum_{(d_1, d_2) \in \mathcal{C}} \mu^2(d_1 d_2) \frac{\nu_{d_1 d_2}}{d_1 d_2} + R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i}) \end{aligned}$$

où ν_d est le nombre d'idéaux \mathfrak{j} tels que $N(\mathfrak{j}) = d$ et

$$\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i})| \ll x^2 (\log x)^{-B} \quad \text{et} \quad \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \sigma_q(\mathfrak{i}) |R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i})| \ll x^3 (\log x)^{-B}.$$

Proof. Une application directe du lemme 6.2 donne

$$S(\mathcal{A}, \mathfrak{iq}_1 \mathfrak{q}_2, \mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_q(F)}{\log z} \frac{\sigma_q((\mathfrak{iq}_1 \mathfrak{q}_2)^-(z))}{N(\mathfrak{iq}_1 \mathfrak{q}_2)} + R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{iq}_1 \mathfrak{q}_2, z)$$

avec

$$\sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ N(\mathfrak{iq}_1 \mathfrak{q}_2) z^2 \ll x^2 (\log x)^{-c_2(B)}}} R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{iq}_1 \mathfrak{q}_2, z) \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

Sous l'hypothèse $z > \log x$ et compte tenu de (4.13), on remarque que, uniformément pour les idéaux \mathfrak{q}_1 et \mathfrak{q}_2 satisfaisant $N(\mathfrak{iq}_1 \mathfrak{q}_2) \ll x^2$, on a

$$\sigma_q((\mathfrak{iq}_1 \mathfrak{q}_2)^-(z)) \ll \sigma_q(\mathfrak{i}).$$

En choisissant $c_1(B)$ suffisamment grand, on peut alors majorer la contribution des $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2$ avec facteur carré par

$$\sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \\ P^-(N(\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2)) \geq (\log x)^{c_1(B)} \\ \mu(N(\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2)) = 0 \\ N(\mathfrak{iq}_1 \mathfrak{q}_2) \ll x^2}} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{iq}_1 \mathfrak{q}_2)} \ll (\log x)^{-B}$$

ce qui achève la preuve de (6.11), compte tenu de (6.8). Un raisonnement similaire permet d'établir (6.12). \square

Le lemme suivant, qui rappelle essentiellement les estimations (7.1) et (7.2) de [HB01], sera utilisé pour estimer les membres de droite de (6.11) et (6.12).

Lemme 6.5. *On a, uniformément en $t \geq z \geq 2$*

$$(6.13) \quad \sum_{t \leq p \leq tz} \frac{\nu_p}{p} \ll \frac{\log z}{\log t}$$

et

$$\sum_{z \leq p_1 < \dots < p_k \leq t} \frac{\nu_{p_1 \dots p_k}}{p_1 \dots p_k} \ll \frac{\left(\log \left(\frac{\log t}{\log z} \right) + O(1) \right)^k}{k!}.$$

Proof. La première majoration, analogue de la formule (7.1) de [HB01], est une conséquence du théorème des idéaux premiers. Au vu de la multiplicativité de ν_d , la seconde estimation provient de l'inégalité

$$\sum_{z \leq p_1 < \dots < p_k \leq t} \frac{\nu_{p_1}}{p_1} \dots \frac{\nu_{p_k}}{p_k} \leq \frac{1}{k!} \left(\sum_{z \leq p \leq t} \frac{\nu_p}{p} \right)^k \ll \frac{\left(\log \left(\frac{\log t}{\log z} \right) + O(1) \right)^k}{k!}.$$

\square

On établit dans le lemme suivant des estimations de $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$ définies par les formules (5.32) et (5.31), suffisantes pour nos applications mais qui pourraient être précisées pour des fonctions h spécifiques.

Lemme 6.6. *Uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > x^\tau$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; 1, y_2)$, on a*

$$(6.14) \quad \Delta_1(|h|), \Delta_2(|h|) \ll \tau_1 \eta^2 x^2.$$

D'autre part, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, on a

$$(6.15) \quad \Delta_1(|h|), \Delta_2(|h|) \ll \eta^2 x^2 \frac{\tau_1 \log x}{(\log y_1)^2}.$$

Proof. Observant qu'un idéal ne contribue qu'un nombre fini de fois dans chaque $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$, il vient

$$\Delta_1(|h|) \ll \max_{Y \geq x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathfrak{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{ip}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) + \frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2)x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{ip}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \right)$$

et

$$\Delta_2(|h|) \ll \max_{Y \ll x^{\frac{3}{2}+\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathfrak{j}) \leq Yx^{\tau_1}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{j}, \mathcal{C}^-(x^{1/2})) + \frac{\eta}{c_q(N_1, N_2)x} \sigma_q(\mathfrak{j}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{j}, \mathcal{C}^-(x^{1/2})) \right).$$

Pour majorer $\Delta_1(|h|)$, on peut faire appel aux lemmes 6.4 et 6.5. Dans l'intervalle $x^{1/2-\tau_1} \leq Y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}$, on a la majoration suivante, valide pour tout $B > 0$,

$$\begin{aligned} & \sum_{Y \leq N(\mathfrak{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{ip}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) + \frac{\eta}{c_q(N_1, N_2)x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{ip}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \right) \\ & \ll \frac{\eta^2 x^2}{\tau \log x} \max_{x^{1/2-\tau_1} \leq Y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq p \leq Yx^{\tau_1}} \frac{\nu_p}{p} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2 (\log x)^{-B} \\ & \ll \tau_1 \eta^2 x^2, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la majoration

$$(6.16) \quad \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \leq \prod_{p \leq x^\tau} \sum_k \frac{\sigma_q^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \ll \tau \log x.$$

En utilisant (4.20), on peut borner la contribution des $Y > x^{\frac{3}{2}-\tau_1}$ par

$$\begin{aligned} & \max_{Y \ll x^{\frac{3}{2}+\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathfrak{j}) \leq Yx^{\tau_1}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{j}, \mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})) + \frac{\eta}{c_q(N_1, N_2)x} \sigma_q(\mathfrak{j}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{j}, \mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})) \right) \\ & \ll \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \max_{Y \ll x^{\frac{3}{2}+\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathfrak{j}) \leq Yx^{\tau_1}} \frac{\sigma_q(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} + x^2 (\log x)^{-B} \\ & \ll \tau_1 \eta^2 x^2 \end{aligned}$$

et on montre de même que $\Delta_2(|h|) \ll \tau_1 \eta^2 x^2$.

Supposons désormais que h est à support sur les entiers y_1 -criblés. En procédant comme précédemment, on peut majorer $\Delta_1(|h|)$ par

$$\begin{aligned}
&\ll \max_{x^{1/2-\tau_1} \leq Y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathfrak{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{p}, \mathcal{C}^-(y_1)) + \frac{\eta}{c_q(N_1, N_2)x} S(\mathcal{B}, \mathfrak{p}, \mathcal{C}^-(y_1)) \right) \\
&\quad + \max_{Y \leq x^{\frac{3}{2}+\tau_1}} \sum_{\substack{Y \leq N(\mathfrak{j}) \leq Yx^{\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{j})) > y_1}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{j}, \mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})) + \frac{\eta}{c_q(N_1, N_2)x} S(\mathcal{B}, \mathfrak{j}, \mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})) \right) \\
&\ll \frac{\eta^2 x^2}{\log y_1} \max_{x^{1/2-\tau_1} \leq Y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq p \leq Yx^{\tau_1}} \frac{\nu_p}{p} \\
&\quad + \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_k \sum_{y_1 < p_2 < \dots < p_k \leq x^{3/2+\tau_1}} \frac{\nu_{p_2 \dots p_k}}{p_2 \dots p_k} \max_{y_1 < Y} \sum_{Y \leq p_1 \leq Yx^{\tau_1}} \frac{\nu_{p_1}}{p_1} + x^2 (\log x)^{-B} \\
&\ll \eta^2 x^2 \frac{\tau_1 \log x}{(\log y_1)^2}.
\end{aligned}$$

Une estimation identique est valable pour $\Delta_2(|h|)$. \square

Avec le choix de paramètre de crible $z = x^\tau$, on peut reproduire l'argument du paragraphe 6 de [HB01], basé sur le crible de Selberg, pour obtenir un équivalent asymptotique de $S(\mathcal{D}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau))$. Ceci valide en particulier la pertinence de (4.3) avec le choix de l'ensemble $\mathcal{C} = \mathcal{C}^-(x^\tau)$, conduisant ainsi à une borne supérieure de

$$T(|h|) := \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} \sum_{n \geq 0} \left| T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) - \frac{\eta}{c_q(N_1, N_2)x} \sigma_q(\mathfrak{i}) T^{(n)}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) \right|$$

où $T^{(n)}(\mathcal{A}, \cdot)$ et $T^{(n)}(\mathcal{B}, \cdot)$ sont définis par (5.22).

Lemme 6.7. *Soit $B > 0$. Uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, on a*

$$T(|h|) \ll \frac{\eta^2 x^2}{\tau^3 \log x} \exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right) \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathfrak{i})| \sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

Proof. Ayant remarqué au cours de la preuve du lemme 6.2 que $\gamma(\mathfrak{i}, \cdot)$ et β satisfont les hypothèses (Ω_0) et (Ω_1) de [HR74], on peut appliquer le théorème 7.1 de [HR74] avec les choix de paramètres ' $z' = x^\tau$ et ' $\xi' = x^{\tau_1}$. On obtient ainsi les formules

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau)) &= \eta^2 x^2 \sigma_q(F) \frac{\sigma_q(\mathfrak{i}) \alpha_q(\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\
&\quad \times \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\right)\right) + O\left(\sum_{d \leq x^{2\tau_1}} \mu(d)^2 \tau(d)^2 |r(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n, d)|\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau)) &= \frac{c_q(N_1, N_2) \eta x^3}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\right)\right) \\
&\quad + O\left(\sum_{d \leq x^{2\tau_1}} \mu(d)^2 \tau(d)^2 |r(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n, d)|\right).
\end{aligned}$$

Au vu de la définition (3.24), on observe alors que, pour tout idéal x^τ -criblé \mathfrak{j} admissible tel que $N(\mathfrak{j}) \ll x^2$, on a $\alpha_q(\mathfrak{j}) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right)$.

La contribution des idéaux $\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ dont la norme possède des facteurs carrés peut être majorée par

$$(6.17) \quad \ll \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \left(\sum_{p > x^{\tau/2}} \frac{1}{p^2} + \sum_{p > x^{\tau/3}} \frac{1}{p^3} \right) \ll x^{-\tau/2} \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})},$$

ce qui permet de déduire que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} \sum_n \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \cdots < N(\mathfrak{p}_n) \\ N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq x^{1+\tau}}} \frac{|\alpha_q(\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) - 1|}{N(\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n)} &\ll (\tau^{-1} x^{-\tau} + x^{-\tau/2}) \sum_{N(\mathfrak{j}) \ll x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \\ &\ll x^{-\tau/2} (\log x)^c. \end{aligned}$$

Dans la mesure où $N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq x^{2-3\tau_1+\tau}$, la contribution des termes de restes $|r(\mathcal{D}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, d)|$ est négligeable au vu des lemmes 3.6 et 3.8. On en déduit alors, pour tout $B > 0$, l'estimation

$$T(|h|) \ll \frac{\eta^2 x^2}{\tau \log x} \exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right) \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathfrak{i})| \sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \ll x^2 \\ P^-(N(\mathfrak{j})) > x^\tau}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

En utilisant le lemme 6.5 pour estimer la contribution des idéaux \mathfrak{j} dont la norme est sans facteur carré et la majoration (6.17) pour les autres idéaux, il suit

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \leq x^2 \\ P^-(N(\mathfrak{j})) > x^\tau}} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} &\ll \sum_{N(\mathfrak{j}) \leq x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \left(\sum_{p > x^{\tau/2}} \frac{1}{p^2} + \sum_{p > x^{\tau/3}} \frac{1}{p^3} \right) + \sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \leq x^2 \\ P^-(N(\mathfrak{j})) > x^\tau}} \mu^2(N(\mathfrak{j})) \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} \\ &\ll x^{-\tau/2} (\log x)^c + \sum_n 2^n \sum_{x^\tau < p_1 < \cdots < p_n \leq x^2} \frac{\nu_{p_1 \cdots p_n}}{p_1 \cdots p_n} \\ (6.18) \quad &\ll x^{-\tau/2} (\log x)^c + \sum_n \frac{2^n}{n!} (-\log \tau + O(1))^n \ll \tau^{-2}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme. \square

7. ESTIMATIONS DE SOMMES DE TYPE II

Dans cette partie, on établit (cf. proposition 7.7 *infra*) une majoration de

$$\begin{aligned} S(|h|) := \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}} \left| S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})\right) \right. \\ \left. - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2) x} \sigma_q(\mathfrak{i}) S\left(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})\right) \right| \end{aligned}$$

où les $\mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})$ sont définis par (5.27) et (5.14), (5.15), (5.16), (5.17) (5.23), (5.24) et (5.25), ce qui permet de valider (5.3). On étend pour ce faire l'approche développée dans les travaux de Heath-Brown et Moroz [HB01, HBM02, HBM04], à travers l'introduction de sommes de Type II adéquates.

Réécrivons les différents ensembles $\mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})$ sous la forme

$$\mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i}) = \bigcup_{(s_1, s_2) \in \mathcal{S}^{(i)}(\mathfrak{n}, \mathfrak{i})} \mathcal{R}^{(i)}(\mathfrak{m}, (s_1, s_2), \mathfrak{i}) \times \{(s_1, s_2)\}$$

avec

$$\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}) := \left\{ (s_1, s_2) : \Omega(s_i) = \omega(s_i) = n_i, (s_1, s_2) \text{ satisfait } (E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i})) \text{ pour } j \ll 1 \right\}$$

où $(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}))$ désigne une inégalité du type

$$YN(\mathbf{i})^\varepsilon \prec P^{(\vec{\alpha}^{(1)})}(s_1)P^{(\vec{\alpha}^{(2)})}(s_2)$$

avec $Y > 0$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, \prec désigne l'ordre \leq , $<$, \geq ou $>$ et les $P^{(\vec{\alpha})}$ sont définis dans (5.6), et

$$\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}) := \left\{ (r_1, r_2) : \Omega(r_i) = \omega(r_i) = m_i, \right. \\ \left. (r_1, r_2) \text{ satisfait } (F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i})) \text{ pour } j \ll 1 \right\}$$

où $(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}))$ désigne une inégalité du type

$$YN(\mathbf{i})^\varepsilon P^{(\vec{\beta}^{(1)})}(r_1)P^{(\vec{\beta}^{(2)})}(r_2) \prec P^{(\vec{\gamma}^{(1)})}(s_1)P^{(\vec{\gamma}^{(2)})}(s_2).$$

Soulignons que les $(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}))$ et $(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}))$ introduits ci-dessus correspondent non seulement aux hypothèses sur le support de h mais aussi aux contraintes relatives à la définition des $\mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})$, en particulier aux conditions $x^{1+\tau} \leq s_1 s_2 \leq x^{3/2-\tau}$ et $P^-(s_1 s_2) > x^\tau$.

La première étape dans l'estimation de $S(\mathcal{D}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ consiste à rendre les ensembles $\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i})$ indépendants de (s_1, s_2) et \mathbf{i} . Pour ce faire, on introduit un paramètre $\xi = o(\tau)$ que l'on explicitera dans les applications du paragraphe 8. Dans leurs travaux, Heath-Brown et Moroz effectuent le choix $\xi = (\log \log x)^{-\varpi_2}$ où $\varpi_0 < \varpi_2 < 1$. À la lecture de [HB01] et [HBM02], il apparaît en fait que leurs arguments demeurent valables pour des ξ satisfaisant $(\log x)^{-\varpi_2} \leq \xi$ où $0 < \varpi_2 < 1$, hypothèse que l'on suppose à présent. Une étape importante dans l'estimation de $S(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ consiste à trier les facteurs de s_i dans des intervalles du type $[x^{v\xi}, x^{(v+1)\xi}]$ puis à remplacer les occurrences de ces facteurs par $x^{v\xi}$ dans les inégalités $(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}))$ et $(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}))$, procédure que l'on détaille ci-dessous. Posant $v_0 := \left\lfloor \frac{\log N(\mathbf{i})}{\xi \log x} \right\rfloor$, introduisons les ensembles d'exposants

$$(7.1) \quad \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0)) := \left\{ \vec{v} \in \mathbf{Z}^{n_1} \times \mathbf{Z}^{n_2} : \vec{v} \text{ satisfait } (\widehat{E}_j^{(i)}(\mathbf{n}, v_0)) \text{ pour } j \ll 1 \right. \\ \left. \text{et } v_k \neq v_l \text{ si } k \neq l \right\}$$

où $\vec{v} := (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)})$ et $(\widehat{E}_j^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))$ désigne l'inégalité associée à $(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}))$ définie par

$$\frac{\log Y}{\xi \log x} + (\varepsilon v_0 + 1) < \sum_{k=1}^{k_1} v_{\alpha_k}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k_2} v_{\alpha_k}^{(2)}$$

si \prec désigne $<$ ou \leq et

$$\frac{\log Y}{\xi \log x} + \varepsilon v_0 > \sum_{k=1}^{k_1} (v_{\alpha_k}^{(1)} + 1) + \sum_{k=1}^{k_2} (v_{\alpha_k}^{(2)} + 1)$$

sinon, ainsi que

$$\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0) := \left\{ (r_1, r_2) : \Omega(r_i) = \omega(r_i) = m_i, \right. \\ \left. (r_1, r_2) \text{ satisfait } (\widehat{F}_j^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0)) \text{ pour } j \ll 1 \right\}$$

où $(\widehat{F}_j^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0))$ désigne l'inégalité associée à $(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}))$ définie par

$$\frac{\log \left(YP(\vec{\beta}^{(1)})(r_1) P(\vec{\beta}^{(2)})(r_2) \right)}{\xi \log x} + (\varepsilon v_0 + 1) < \sum_{l=1}^{l_1} v_{\gamma_l^{(1)}}^{(1)} + \sum_{l=1}^{l_2} v_{\gamma_l^{(2)}}^{(2)}.$$

si \prec désigne \leq ou $<$ et

$$\frac{\log \left(YP(\vec{\beta}^{(1)})(r_1) P(\vec{\beta}^{(2)})(r_2) \right)}{\xi \log x} + \varepsilon v_0 > \sum_{l=1}^{l_1} (v_{\gamma_l^{(1)}}^{(1)} + 1) + \sum_{l=1}^{l_2} (v_{\gamma_l^{(2)}}^{(2)} + 1).$$

sinon.

Dans ce qui suit, nous adaptons la méthode du paragraphe 3 de [HB01] et du paragraphe 5 de [HBM02]. Introduisons, pour $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{N}^{n_1} \times \mathbf{N}^{n_2}$, le poids $d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathbf{v}})$ en posant

$$(7.2) \quad d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathbf{v}}) = \frac{\log N(\mathfrak{p}_1^{(1)}) \cdots \log N(\mathfrak{p}_{n_1}^{(1)}) \log N(\mathfrak{p}_1^{(2)}) \cdots \log N(\mathfrak{p}_{n_2}^{(2)})}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}}$$

si $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2$ où $\Omega(N(\mathfrak{s}_i)) = \Omega_{\mathbf{K}}(\mathfrak{s}_i) = n_i$, $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{p}_1^{(i)} \cdots \mathfrak{p}_{n_i}^{(i)}$ avec $x^{v_k^{(i)}} \xi \leq N(\mathfrak{p}_k^{(i)}) < x^{(v_k^{(i)}+1)\xi}$ pour $1 \leq k \leq n_i$ et $i \in \{1, 2\}$, et $d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathbf{v}}) = 0$ sinon. Posons également, pour tout sous-ensemble \mathcal{R} de \mathbf{N}^2 et toute paire d'idéaux $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$ la quantité,

$$(7.3) \quad b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (N(\mathfrak{r}_1), N(\mathfrak{r}_2)) \in \mathcal{R}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans l'esprit du lemme 3.7 de [HB01] et du lemme 5.1 de [HBM02], il est naturel d'approcher $S(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ par la quantité

$$\widehat{S}(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) := \sum_{\vec{\mathbf{v}} \in \iota(S^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \widehat{S}(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0))$$

où

$$(7.4) \quad \widehat{S}(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0)) := \sum_{\substack{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{s} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s} \in \mathcal{D}}} b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0)) d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathbf{v}}).$$

Il en résulte l'apparition de termes d'erreur

$$(7.5) \quad R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \left(R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right. \\ \left. + \frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2) x} \sigma_q(\mathbf{i}) R(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right)$$

où, pour $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} ,

$$R(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) = \left| S(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \widehat{S}(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right|.$$

On peut obtenir une borne supérieure de telles quantités en reproduisant les différentes étapes de la démonstration du lemme 3.7 de [HB01].

Lemme 7.1. *Soit $B > 0$. Uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, $y_2 > x^\tau$, w un complexe de module 1, $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ et $\xi \leq \tau^2$, on a pour tout $i \in \{1, \dots, 5\}$,*

$$(7.6) \quad \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \ll \xi \tau^{-6} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sigma_q(\mathbf{i}) \frac{|h(\mathbf{i})|}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

Proof. On ne décrit ci-dessous que la contribution des termes $R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$, le traitement de $R(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ étant en tout point similaire. Soient \mathbf{i} un idéal tel que $N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}$ et $v_0 = \lfloor \frac{\log N(\mathbf{i})}{\xi \log x} \rfloor$. Observons l'inégalité triviale

$$R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \leq R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) + R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) + R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$$

où le terme $R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ est défini comme la différence

$$\left| S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \sum_{\substack{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \\ \mathfrak{ir}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A} \\ d_n(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v}) \neq 0}} b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i})) \right|$$

et résulte de l'introduction de $\iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))$, le terme $R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ provient du remplacement de 1 par $d_n(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v})$, à savoir

$$\sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \sum_{\substack{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \\ \mathfrak{ir}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A} \\ d_n(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v}) \neq 0}} |1 - d_n(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v})| b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i}))$$

et le terme $R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ apparaît en remplaçant $\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i})$ par l'ensemble $\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)$, c'est-à-dire

$$R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) := \sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \sum_{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2} d_n(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v}) \Delta(\mathcal{A}, \mathbf{m}, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathbf{i})$$

où

$$\Delta(\mathcal{A}, \mathbf{m}, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathbf{i}) := \# \left\{ (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) : \mathfrak{ir}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A} \right. \\ \left. (N(\mathfrak{r}_1), N(\mathfrak{r}_2)) \in \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i}) \setminus \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0) \right\}.$$

Au vu de la définition des $(\widehat{E}_j^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))$, on observe que tous les idéaux \mathfrak{s}_1 et \mathfrak{s}_2 comptés dans $\widehat{S}(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ apparaissent dans $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$. Par suite, dans la mesure où

$$(7.7) \quad 1 - d_n(\mathfrak{p}_1^{(1)} \cdots \mathfrak{p}_{n_1}^{(1)} \mathfrak{p}_1^{(2)} \cdots \mathfrak{p}_{n_2}^{(2)}, \vec{v}) = 1 - \prod_{j_1=1}^{n_1} \frac{\log N(\mathfrak{p}_{j_1}^{(1)})}{v_{j_1}^{(1)} \xi \log x} \prod_{j_2=1}^{n_2} \frac{\log N(\mathfrak{p}_{j_2}^{(1)})}{v_{j_2}^{(1)} \xi \log x} \ll \xi \tau^{-2}$$

dès que $x^{v_k^{(i)} \xi} \leq N(\mathfrak{p}_k^{(i)}) < x^{(v_k^{(i)} + 1) \xi}$ (cf [[HB01] p.44]), il vient l'inégalité

$$(7.8) \quad R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \ll \xi \tau^{-2} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})).$$

On sépare la suite de la démonstration en deux parties selon que $i = 1$ ou non.

Cas $i \in \{2, \dots, 5\}$. Au vu des définitions (5.14), (5.15), (5.16) et (5.17) de $\mathcal{C}^{(i)}(m, n)$, il existe au plus un couple (m, n) tel que $N(\mathfrak{rs})$ appartienne à $\mathcal{C}^{(i)}(m, n)$. Par suite, on peut observer, en suivant l'argument de la preuve du lemme 3.7 de [HB01] que l'on a, pour tout $N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}$, l'estimation

$$\sum_{\mathfrak{m}} R_1 \left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, (n, 0), \mathfrak{i}) \right) \ll \sum_{j \ll \tau^{-1}} \sum_{(N(\mathfrak{p}_1), \dots, N(\mathfrak{p}_n)) \in \Delta_j^{(i)}(n)} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i} \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau))$$

où

$$\Delta_j^{(i)}(n) := \{(p_1, \dots, p_n) : x^\tau < p_1 \leq \dots \leq p_n, \\ x^{1+\tau} < p_1 \cdots p_n \leq x^{3/2-\tau}, (p_1, \dots, p_n) \text{ satisfait } E_j^{(i)}(n)\}$$

et $E_j^{(i)}(n)$ désigne une inégalité de la forme

$$y_1 \leq p_1 \leq y_1 x^\xi, \quad y_2 x^{-\xi} \leq p_n \leq y_2, \quad x^{1-\tau_1-\xi} \leq p_n \leq x^{1-\tau_1}, \quad p_2 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})}$$

$$p_1 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})}, \quad p_1 \cdots p_n = x^{3/2-\tau+O(\xi\tau^{-1})} \text{ ou } p_j \leq p_{j+1} \leq x^\xi p_j.$$

En utilisant les lemmes 6.4 et 6.5, il suit ainsi l'estimation, valide pour tout $B \geq 0$,

$$\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}} R_1(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})) \ll \xi \tau^{-4} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathfrak{i})| \sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2 (\log x)^{-B}$$

Compte tenu de la borne triviale $\sum_{m, n} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(m, n)) \leq S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau))$, la majoration

$$\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}} R_2(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})) \ll \xi \tau^{-3} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathfrak{i})| \sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2 (\log x)^{-B}$$

est aussi une conséquence immédiate du lemme 6.4 combiné à (7.8).

Considérons à présent $R_3(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i}))$. On remarque que les termes d'erreur qui apparaissent proviennent des idéaux \mathfrak{its} qui satisfont les conditions

$$P^-(N(\mathfrak{s}))x^{-\xi} \leq P^+(N(\mathfrak{r})) \leq P^-(N(\mathfrak{s})) \text{ ou } P^+(N(\mathfrak{s})) \leq P^-(N(\mathfrak{r})) \leq P^+(N(\mathfrak{s}))x^\xi.$$

Lorsque $i \in \{4, 5\}$, on a alors, d'après les lemmes 6.4 et 6.5, l'estimation suivante, valide pour $B > 0$,

$$\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}} R_3(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})) \ll \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) \leq x^{1-\tau_1} \\ N(\mathfrak{p}_2) = x^{O(\xi)} N(\mathfrak{p}_1)}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i} \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ \ll \xi \tau^{-3} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathfrak{i})| \sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

D'autre part, si $j \in \{2, 3\}$, les lemmes 2.4, 6.4 et 6.5 permettent d'obtenir, en posant $\mathbf{j} = \mathbf{i}\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\mathbf{l}$, la majoration

$$\begin{aligned} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_3 \left(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) \right) &\ll \sum_{\substack{x^{1+\tau} < N(\mathbf{p}_1) \\ N(\mathbf{p}_2) = x^{O(\xi)} N(\mathbf{p}_1)}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ &\ll \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{x^{1+\tau} < N(\mathbf{p}_1) \\ N(\mathbf{i}\mathbf{p}_1) \leq x^{2-\tau} \\ N(\mathbf{p}_1) = \frac{x^{3+O(\xi)}}{N(\mathbf{i})} \\ P^-(N(\mathbf{l})) > x^\tau}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{p}_1\mathbf{l}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ &\ll \xi^{\tau-2} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B} \end{aligned}$$

valide pour tout $B > 0$. Ceci achève l'estimation de $R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ lorsque $i \in \{2, \dots, 5\}$.

Cas $i = 1$. Dans un premier temps, considérons la contribution issue des ensembles $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (1, 0), \mathbf{i})$ et $\mathcal{C}^{(1)}((2, 0), \mathbf{n}, \mathbf{i})$. En observant que le nombre de couples (\mathbf{m}, \mathbf{n}) dans lequel intervient chaque idéal $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2$ est borné si $N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2) \ll x^3$, les arguments précédents s'adaptent sans difficulté nouvelle, conduisant aux bornes supérieures

$$\sum_{\mathbf{m}} R^{(1)}(\mathbf{m}, (1, 0)) \ll \xi^{\tau-3} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}$$

et

$$\sum_{\mathbf{n}} R^{(1)}((2, 0), \mathbf{n}) \ll \xi^{\tau-4} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}$$

pour tout $B > 0$.

Supposons donc à présent que $n \geq 2$. Au vu de la définition (5.24) de $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i})$, on a la majoration

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathbf{m}} R_1 \left(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i}) \right) \\ &\ll \sum_{j \ll \tau-1} \sum_{\substack{N(\mathfrak{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{(N(\mathfrak{p}_1), \dots, N(\mathfrak{p}_n)) \in \Delta_j(n)} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1))) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_j(n) := &\left\{ (p_1, \dots, p_n) : x^\tau < p_1 \leq \dots \leq p_n < x^{1-\tau}, \right. \\ &\left. p_2 \cdots p_n \leq x^{1+\tau} < p_1 \cdots p_n \leq x^{3/2-\tau}, (p_1, \dots, p_n) \text{ satisfait } E_j(n) \right\} \end{aligned}$$

et $E_j(n)$ désigne une inégalité de la forme :

$$x^\tau \leq p_1 \leq x^{\tau+\xi}, \quad p_2 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})}, \quad p_1 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})},$$

$$p_1 \cdots p_n = x^{3/2-\tau+O(\xi\tau^{-1})} \quad \text{ou} \quad p_j \leq p_{j+1} \leq x^\xi p_j.$$

On traite la contribution des inégalités

$$p_1 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})} \quad \text{et} \quad p_1 \cdots p_n = x^{3/2-\tau+O(\xi\tau^{-1})}$$

en utilisant les lemmes 6.4 et 6.5. En effet, le lemme 2.4 nous amène à estimer la contribution des idéaux \mathbf{i} , \mathfrak{r}_1 et \mathfrak{r}_2 satisfaisant

$$N(\mathbf{i}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = Y x^{O(\xi\tau^{-1})},$$

avec $Y = x^{3/2+\tau}$ ou $x^{2-\tau}$ et l'on observe que l'on a alors

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{P^-(N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)) > x^\tau \\ N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = Y x^{O(\xi \tau^{-1})}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-5} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Supposons $n \geq 3$. Pour les ensembles $\Delta_j(n)$ restants, au moins l'un des p_i n'apparaît pas dans la définition de $E_j(n)$, disons p_n . Observant que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_n)) \in \Delta_j(n)} S(\mathcal{A}, \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))) \\ & \ll \tau^{-1} \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_{n-1}) \\ (N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_{n-1}), 1) \text{ satisfait } E_j(n) \\ N(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n-1}) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n-1}, \mathcal{C}^-(x^\tau)), \end{aligned}$$

on déduit, en utilisant les lemmes 6.4 et 6.5, l'estimation

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\mathbf{m}} \sum_{n \geq 3} R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i})) \\ & \ll \xi \tau^{-6} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Si $n = 2$, l'argument précédent échoue uniquement pour l'inégalité $p_1 < p_2 \leq p_1 x^\xi$. Le cas échéant, il apparaît que $x^{1/2} < p_1 < x^{3/4-\tau/2}$ ce qui permet de majorer cette contribution par

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{x^{1/2} < N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}_2) \leq N(\mathbf{p}_1) x^\xi \leq x^{\frac{3}{4}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-1} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Par des arguments similaires, les estimations (7.7) et (7.8) permettent de majorer la contribution des termes $R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i}))$ par

$$\begin{aligned} & \ll \xi \tau^{-3} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{n \geq 2} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_2) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_n) \\ N(\mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-5} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sigma_q(\mathbf{i}) \frac{|h(\mathbf{i})|}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Achevons la démonstration du lemme en étudiant $R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i}))$ en étudiant la contribution issue de l'inégalité

$$P^-(s) \leq P^-(r_2) \leq P^-(s) x^\xi.$$

Si $n \geq 3$, on majore ce terme d'erreur par

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_n) \\ N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi \\ N(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n-1}) \leq x^{1+\tau}}} \sum_{N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi} S(\mathcal{A}, \mathbf{it}_1 \mathbf{p} \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}))) \\ & \ll \tau^{-2} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_{n-2}) \\ N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi \\ N(\mathbf{p} \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n-2}) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{it}_1 \mathbf{p} \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n-2}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-6} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Lorsque $n = 2$, il advient que $P^-(s) \leq x^{3/4}$ et la contribution de tels idéaux est inférieure à

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq x^{1/2} \\ N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi}} \sum_{N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi} S(\mathcal{A}, \mathbf{it}_1 \mathbf{p} \mathbf{p}_1, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))) \\ & + \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{x^{1/2} < N(\mathbf{p}_1) \leq x^{3/4} \\ N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi}} \sum_{N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1)x^\xi} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{p} \mathbf{p}_1, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-4} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma_q(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

□

Au vu du lemme précédent, il convient de montrer que, en moyenne sur m et \mathbf{i} , la quantité $\frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2) x^3} \sigma_q(\mathbf{i}) \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ constitue une bonne approximation de $\widehat{S}(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$. Estimer $\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ se réduit essentiellement à étudier les idéaux $\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n_1+n_2}$ tels que le n -uplet $(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_{n_1+n_2}))$ appartienne à l'ensemble

$$G(\vec{v}, t) := \left\{ \vec{x} \in \mathbf{R}^{n_1+n_2} : x_i \in [x^{v_i \xi}, x^{(v_i+1)\xi}] \left[\text{pour } 1 \leq i \leq n_1 + n_2 \text{ et } \prod_{i=1}^{n_1+n_2} x_i \leq t \right] \right\}$$

Pour considérer de tels idéaux, Heath-Brown obtient dans [HB01] la généralisation suivante du théorème des idéaux premiers.

Lemme 7.2 ([HB01], Lemma 4.10). *Il existe $c > 0$ tel que, uniformément en $t \geq 1$, $x \geq 2$, $1 \leq n \ll \tau^{-1}$ et $\vec{v} \in \mathbf{N}^n$ satisfaisant $\tau \leq v_j \xi$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on ait*

$$(7.9) \quad \sum_{(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_n)) \in G(\vec{v}, t)} \prod_{i=1}^n \log N(\mathbf{p}_i) = w(t) + O\left(t \exp\left(-c\sqrt{\log x^\tau}\right)\right)$$

où $w(t) = w(\vec{v}, t)$ désigne la mesure de $G(\vec{v}, t)$.

Le comportement analytique de la fonction w définie dans le lemme 7.2 a été étudié dans le paragraphe 8 de [HB01].

Lemme 7.3 (Formules (8.3) et (8.4) de [HB01]). *Pour $t > 0$, $h \geq 0$ et $n \geq 2$, on a*

$$|w'(t+h) - w'(t)| \leq \frac{h}{t} (\xi \log x)^{n-2}$$

et

$$0 \leq w'(t) \leq (\xi \log x)^{n-1}.$$

De plus, si $n = 1$, alors la dérivée à droite $w'(v_1, t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[x^{v_1 \xi}, x^{(v_1+1)\xi}]$.

En reproduisant l'argument développé dans le paragraphe 10 de [HB01], on peut utiliser les lemmes 7.2 et 7.3 pour obtenir une estimation de $\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$.

Lemme 7.4. *Soit $i \in \{1, \dots, 5\}$. Uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $I \in \mathcal{I}$ et $v_0 \geq 0$, on a l'estimation*

$$(7.10) \quad \left| \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \frac{c_q(N_1, N_2)\eta x^3}{N(\mathbf{i})} \sum_{\vec{v} \in \mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0)} \Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0), \vec{v}) \right| \ll \frac{\eta^2 c_q(N_1, N_2) x^3}{\xi^2 N(\mathbf{i})}$$

où, pour tout sous-ensemble $\mathcal{R} \subset \mathbf{N}^2$,

$$(7.11) \quad \Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}, \vec{v}) := \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R})}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2} N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} w' \left(\frac{c_q(N_1, N_2) x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right).$$

Proof. Compte tenu des définitions (7.1), (7.3) et (7.4), il suffit de montrer que, uniformément pour tout $n \geq 1$, $\vec{v} \in \mathbf{N}^n$ tel que $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$, $\tau \leq \xi v_i$ et tout ensemble $\mathcal{R}(\mathbf{m})$ tel que

$$\mathcal{R}(\mathbf{m}) \subset \{(r_1, r_2) : \Omega(r_1) = \omega(r_1) = m_1, \Omega(r_2) = \omega(r_2) = m_2 \text{ et } P^-(r_1 r_2) > x^\tau\},$$

on a

$$(7.12) \quad \sum_{\mathbf{m}} \left| \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) - c_q(N_1, N_2) x^3 \eta \frac{\Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v})}{N(\mathbf{i})} \right| \ll \frac{\eta^2 c_q(N_1, N_2) x^3}{N(\mathbf{i}) v_1 \cdots v_n}$$

où

$$\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) := \sum_{\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{s} \in \mathcal{B}} b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m})) d_n(\mathbf{s}, \vec{v}),$$

$$d_n(\mathbf{s}, \vec{v}) = \begin{cases} \frac{\log N(\mathbf{p}_1) \cdots \log N(\mathbf{p}_n)}{v_1 \cdots v_n (\xi \log x)^n} & \text{si } \mathbf{s} = \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n \text{ avec } N(\mathbf{p}_i) \in [x^{v_i \xi}, x^{(v_i+1)\xi}] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) = \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{v_1 \cdots v_n (\xi \log x)^n N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} w' \left(\frac{c_q(N_1, N_2) x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right).$$

Une fois cette estimation établie, la majoration (7.10) se déduira directement de l'inégalité

$$(7.13) \quad \sum_n \sum_{\vec{v} \in \mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0)} \frac{1}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)}} \leq \left(\sum_n \frac{1}{n!} \left(\sum_{v \leq \xi^{-1}} \frac{1}{v} \right)^n \right)^2 \ll \xi^{-2}.$$

À la suite de [[HB01], Section 9], observons tout d'abord que

$$(7.14) \quad \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) = \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{v_1 \cdots v_n (\xi \log x)^n} \sum_{\substack{x^{v_1 \xi} \leq N(\mathbf{p}_1) < x^{(v_1+1)\xi} \\ \dots \\ x^{v_n \xi} \leq N(\mathbf{p}_n) < x^{(v_n+1)\xi}}} \prod_{i=1}^n \log N(\mathbf{p}_i). \\ \frac{c_q(N_1, N_2) x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} < N(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n) \leq \frac{c_q(N_1, N_2) x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} (1+\eta)$$

Le lemme 7.2 permet d'estimer la somme intérieure, ainsi égale à

$$(7.15) \quad w \left(\frac{c_q(N_1, N_2)x^3(1+\eta)}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)} \right) - w \left(\frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)} \right) + O \left(\frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)} \exp(-c\sqrt{\log x^\tau}) \right).$$

Supposons que $n \neq 1$. En utilisant les hypothèses faites sur $\mathcal{R}(\mathbf{m})$ et (6.18), la contribution du terme d'erreur peut être estimée en remarquant que

$$\sum_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2} \frac{b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \ll \tau^{-2}.$$

Par suite, le théorème des accroissements formules et le lemme 7.3 entraînent

$$w \left(\frac{c_q(N_1, N_2)x^3(1+\eta)}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)} \right) - w \left(\frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)} \right) = \frac{c_q(N_1, N_2)\eta X^3}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)} \left(w' \left(\frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)} \right) + O \left(\eta(\xi \log x)^{n-2} \right) \right)$$

ce qui implique finalement (7.12).

Considérons à présent le cas $n = 1$. La dérivée à droite w' étant la fonction caractéristique de $[x^{v_1\xi}, x^{(v_1+1)\xi}]$, on en déduit que l'estimation

$$w \left(\frac{c_q(N_1, N_2)x^3(1+\eta)}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)} \right) - w \left(\frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)} \right) = \eta \frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)} w' \left(\frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)} \right)$$

est valide sauf éventuellement lorsque $\frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)} \leq x^{v\xi} \leq \frac{c_q(N_1, N_2)x^3(1+\eta)}{N(\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2)}$ avec $v = v_1$ ou $v_1 + 1$. Pour estimer la contribution de ces derniers idéaux, il suffit d'observer que, d'après le théorème 3.7, on a

$$\sum_{N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = \frac{c_q(N_1, N_2)x^{3-v\xi}}{N(\mathfrak{i})} (1+O(\eta))} \frac{b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)} \ll \sum_{N(\mathfrak{j}) = \frac{c_q(N_1, N_2)x^{3-v\xi}}{N(\mathfrak{i})} (1+O(\eta))} \frac{e^{c\tau^{-1}}}{N(\mathfrak{j})} \ll \eta e^{c\tau^{-1}}.$$

□

L'argument de la preuve précédente ne permet pas d'estimer l'analogue de (7.14) avec \mathcal{A} , à savoir

$$\sum_{\substack{x^{v_1\xi} \leq N(\mathfrak{p}_1) < x^{(v_1+1)\xi} \\ \vdots \\ x^{v_n\xi} \leq N(\mathfrak{p}_n) < x^{(v_n+1)\xi} \\ \mathfrak{ip}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{A}}} \prod_{i=1}^n \log N(\mathfrak{p}_i).$$

Le rôle manifeste du phénomène de parité dans une telle somme rend caduque la possibilité de l'étudier directement à partir des seules estimations de Type I obtenues au paragraphe 3. En vue de lever cette obstruction et de contourner partiellement la dépendance en \mathbf{n} dans la somme précédente, introduisons, en nous inspirant des notations (5.10), (5.11) et (5.12) de [HBM02], les quantités

$$\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i})) := \sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0))$$

où

$$\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)) := \sum_{\mathfrak{ir}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s} \in \mathcal{A}} b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)) e_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{s}, \vec{v})$$

avec

$$(7.16) \quad e_n(\mathfrak{s}, \vec{v}) := \frac{w'(N(\mathfrak{s}))}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}} \sum_{\substack{j|\mathfrak{s} \\ N(j) < x^{\tau/2}}} \mu_{\mathbf{K}}(j) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(j)} \right).$$

Compte tenu de la définition de w et du lemme 7.3, on peut observer que $e_n(\mathfrak{s}, \vec{v})$ et $d_n(\mathfrak{s}, \vec{v})$ sont

$$(7.17) \quad \begin{cases} \ll \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{s}) \log x & \text{si } 0 \leq \frac{\log N(\mathfrak{s})}{\xi \log x} - (v_1^{(1)} + \cdots + v_{n_1}^{(1)} + v_1^{(2)} + \cdots + v_{n_2}^{(2)}) \leq n_1 + n_2, \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le lemme suivant, nous nous attachons à estimer asymptotiquement la quantité $\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i}))$. Les estimations de Type I combinées à la formule de Perron permettent en particulier de la relier à $\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i}))$ en suivant essentiellement l'argument développé au paragraphe 8 de [HB01].

Lemme 7.5. *Soit $i \in \{1, \dots, 5\}$. Uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $v_0 \geq 1$, on a l'estimation*

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I} \\ x^{v_0} \leq N(\mathfrak{i}) < x^{(v_0+1)\xi}}} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left| \widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i})) - \sigma_q(F) \eta^2 x^2 \frac{\sigma_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \Sigma(\mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0), \vec{v}) \right| \ll \eta^{\frac{11}{5}} x^2 (\log x)^c$$

où $\Sigma(\mathfrak{i}, \mathcal{R}, \vec{v})$ est défini par (7.11).

Proof. Dans l'esprit de la preuve du lemme 3.9 de [HB01] et compte tenu du lemme 2.4, commençons par remplacer $w'(N(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2))$ par $w'\left(\frac{c_q(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)}\right)$. Si $n_1 + n_2 \geq 2$, on utilise successivement le lemme 7.3, l'inégalité de Hölder et le lemme 2.2 de sorte que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \\ \mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A}}} \frac{b(\cdots)}{(\xi \log x)^{n_1+n_2}} \left| w'(N(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2)) - w'\left(\frac{c_q(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)}\right) \right| \left| \sum_{\substack{j|\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \\ N(j) < x^{\tau/2}}} \mu_{\mathbf{K}}(j) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(j)} \right) \right| \\ & \ll \frac{\eta^{\frac{1}{4}}}{\xi^2 \log x} \sum_{j \in \mathcal{A}} \tau_{\mathbf{K}}(j)^5 \\ & \ll \frac{\eta^{\frac{1}{4}}}{\xi^2 \log x} \# \mathcal{A}^{39/40} \left(\sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq 2qx} \tau_{\mathbf{K}}((n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2))^{200} \right)^{1/40} \\ & \ll \eta^{\frac{11}{5}} x^2 (\log x)^c. \end{aligned}$$

Considérons à présent le cas $n_1 + n_2 = 1$. La formule $w'(N(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2)) = w'\left(\frac{c_q(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)}\right)$ est vraie excepté pour les idéaux qui satisfont $N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2) = c_q(N_1, N_2) x^{3-v\xi} (1 + O(\eta^{\frac{1}{4}}))$ pour $v = v_1$ ou $v_1 + 1$. Par suite, en reproduisant l'argument développé au cours de la preuve du lemme 7.4 conduisant à l'estimation de $\sum^{(i)} \frac{b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{N(\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)}$ et en utilisant le

lemme 3.5, on peut majorer le terme d'erreur ainsi engendré par

$$\begin{aligned}
&\ll \xi^{-1} \sum_{\substack{\mathfrak{i}, \mathfrak{s} \\ N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{s}) \sum_{\substack{N(\mathfrak{it}) = c_q(N_1, N_2)x^{3-v\xi}(1+O(\eta^{\frac{1}{4}})) \\ \mathfrak{irs} \in \mathcal{A}}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{r}) \\
&\ll \xi^{-1} \left(\sum_{\substack{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I} \\ N(\mathfrak{it}) = c_q(N_1, N_2)x^{3-v\xi}(1+O(\eta^{\frac{1}{4}}))}} \sum_{N(\mathfrak{it}) \ll x^{2-\tau/2}(\log x)^c} \# \mathcal{A}_{\mathfrak{it}} \right)^{44/45} \left(\sum_{1 \leq n_1, n_2 \ll x} \tau_{\mathbf{K}}((n_1\omega_1 + n_2\omega_2))^{135} \right)^{1/45} \\
&\ll \eta^{\frac{11}{5}} x^2 (\log x)^c.
\end{aligned}$$

Définissons

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(\mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathfrak{v}}, v_0)) &:= \sum_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2} \frac{b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathfrak{v}}, v_0))}{v_1^{(1)} \dots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \dots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}} w' \left(\frac{c_q(N_1, N_2)x^3}{N(\mathfrak{it}_1\mathfrak{r}_2)} \right) \\
&\quad \times \sum_{N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \# \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{ij}} \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})} \right).
\end{aligned}$$

Dans la mesure où $N(\mathfrak{it}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{j}) \ll x^{2-\tau/2}(\log x)^c$, le lemme 3.5 combiné à l'estimation $\alpha_q(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right)$ entraînent, pour tout $B > 0$, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\mathbf{m}} \left| \Sigma_1(\mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathfrak{v}}, v_0)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \Sigma(\mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathfrak{v}}, v_0), \vec{\mathfrak{v}}) \sum_{N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathfrak{ij})}{N(\mathfrak{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})} \right) \right| \\
(7.18) \quad &\ll \frac{x^2}{v_1^{(1)} \dots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \dots v_{n_2}^{(2)}} (\log x)^{-B}.
\end{aligned}$$

Montrons à présent, pour tout $B > 0$, l'estimation

$$(7.19) \quad \sum_{N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathfrak{ij})}{N(\mathfrak{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})} \right) - \sigma_q(F) \sigma_q(\mathfrak{i}) \zeta_q(2) \ll \alpha_q(\mathfrak{i}) (\log x)^{-B}$$

ce qui conclura la preuve du lemme au vu de l'estimation $\sum_{N(\mathfrak{i}) \leq x} \frac{\alpha_q(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \ll \log x$ et de (7.13). Dans cette direction, écrivons

$$(7.20) \quad \sum_{N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathfrak{ij})}{N(\mathfrak{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})} \right) = \alpha_q(\mathfrak{i}) \sum_{m < x^{\tau/2}} \frac{\widehat{\xi}_q(\mathfrak{i}, m)}{m} \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{m} \right)$$

où $\widehat{\xi}_q(\mathfrak{i}, \cdot)$ est la fonction multiplicative définie par

$$(7.21) \quad \widehat{\xi}_q(\mathfrak{i}, p^k) := \sum_{N(\mathfrak{j}) = p^k} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \frac{\alpha_q(\mathfrak{ij})}{\alpha_q(\mathfrak{i})}$$

lorsque $\alpha_q(\mathfrak{i}) \neq 0$. Soit \mathfrak{i} un tel idéal, on observe que, pour tout premier p q -régulier et $k \geq 1$, la formule (3.24) entraîne que

$$(7.22) \quad \widehat{\xi}_q(\mathfrak{i}, p^k) = \begin{cases} -\frac{\nu_p}{1+p^{-1}} & \text{si } k = 1 \text{ et } p \nmid N(\mathfrak{i}), \\ -1 & \text{si } k = 1 \text{ et } p \mid N(\mathfrak{i}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Au vu de (7.22), la série de Dirichlet $\zeta_{\widehat{\xi}_q(\mathfrak{i}, \cdot)}(s)$ définie par

$$\zeta_{\widehat{\xi}_q(\mathfrak{i}, \cdot)}(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{\widehat{\xi}_q(\mathfrak{i}, n)}{n^s},$$

est telle que $\zeta_{\widehat{\xi}_q(\mathfrak{i}, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}}(s)$ définit un produit eulérien absolument convergent si $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Par suite, la formule de Perron (voir le théorème II.2.5 de [Ten08]) implique que

$$(7.23) \quad \sum_{N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathfrak{ij})}{\alpha_q(\mathfrak{i})N(\mathfrak{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \zeta_{\widehat{\xi}_q(\mathfrak{i}, \cdot)}(s+1) x^{s\tau/2} \frac{ds}{s^2}.$$

Compte tenu des propriétés analytiques de la série $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$, on peut reproduire le raisonnement détaillé dans le paragraphe 10 de [HB01] et appliquer le théorème des résidus pour ainsi obtenir la formule

$$\sum_{N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha_q(\mathfrak{ij})}{\alpha_q(\mathfrak{i})N(\mathfrak{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})} \right) = \lambda_{\mathbf{K}}^{-1}(\zeta_{\widehat{\xi}_q(\mathfrak{i}, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}})(1) + O \left(\exp \left(-c\sqrt{\log x^{\tau/2}} \right) \right).$$

Un calcul direct de produit eulérien conduit finalement à la formule

$$\frac{\alpha_q(\mathfrak{i})}{\lambda_{\mathbf{K}}} \left(\zeta_{\widehat{\xi}_q(\mathfrak{i}, \cdot)} \zeta_{\mathbf{K}} \right) (1) = \sigma_q(F) \sigma_q(\mathfrak{i}) \zeta_q(2).$$

□

L'estimation du terme d'erreur qui apparaît avec le remplacement de $d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})$ par $e_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})$ a constitué le tour de force majeur des travaux de Heath-Brown et Moroz (voir à ce sujet les paragraphes 8 et 10 à 12 de [HB01], les paragraphes 6 et 7 de [HBM02] et les paragraphes 4 et 5 de [HBM04]). De telles estimations de sommes, dites de Type II, se révèlent être l'ingrédient nécessaire pour s'affranchir du phénomène de parité.

Pour des raisons techniques, il suffit d'établir de telles estimations sous l'hypothèse $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ où \mathcal{P} désigne l'ensemble des idéaux primitifs, à savoir

$$\mathcal{P} := \{ \mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : p\mathcal{O}_{\mathbf{K}} \nmid \mathfrak{j} \text{ pour tout premier } p \}.$$

Pour simplifier les notations, supposons par exemple que $\mathfrak{d} := (\omega_1, \omega_2) = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ (on peut considérer le cas général en utilisant un isomorphisme avec le groupe de classes : voir [[HBM02], p. 276–277]). En suivant les arguments de [[HBM02], pp. 276–277], on observe l'existence d'un entier $z \geq 1$ et d'une base (w_1, w_2, w_3) de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ tels que (w_1, zw_2) soit une base de $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\omega_1 = w_1$ et $\omega_2 = zw_2$, de sorte que les éléments de \mathcal{A} sont de la forme $(a_1 + n_1q)w_1 + (a_2 + n_2q)zw_2$. En effectuant une partition de l'ensemble des n_1 selon les classes de congruence modulo z , on peut écrire

$$\sum_{\mathfrak{j} \in \mathcal{A}} h(\mathfrak{j}) = \sum_{b_1 \equiv a_1 \pmod{q}} \sum_{\mathfrak{j} \in \mathcal{A}^{(b_1)}} h_{b_1}(\mathfrak{j})$$

où $h_{b_1}(m) := h(d_{b_1}m)$ avec $d_{b_1} = (b_1, a_2, qz)$ et

$$(7.24) \quad \mathcal{A}^{(b_1)} := \left\{ \left(\frac{b_1}{d_{b_1}} + n_1 \frac{qz}{d_{b_1}} \right) w_1 + \left(\frac{a_2}{d_{b_1}} + n_2 \frac{qz}{d_{b_1}} \right) w_2, (n_1, n_2) \in C \left(\frac{N_1}{d_{b_1}}, \frac{N_2}{d_{b_1}} \right) \right. \\ \left. \text{et} \left(\frac{b_1}{d_{b_1}} + n_1 \frac{qz}{d_{b_1}}, \frac{a_2}{d_{b_1}} + n_2 \frac{qz}{d_{b_1}} \right) = 1 \right\}.$$

On observe alors que $\mathcal{A}^{(b_1)} \subset \mathcal{P}$. En effet, en utilisant la définition de w_1 et w_2 , l'existence d'un premier p tel que $p\mathcal{O}_{\mathbf{K}} | m_1 w_1 + m_2 w_2$ entraînerait que $p | (m_1, m_2)$. Sans perte de généralité, on peut donc supposer dans le lemme qui suit que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$.

Lemme 7.6. *Soient $B \geq 0$ et C une classe d'idéaux. Uniformément pour $h : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{C}$ bornée par 1 et $b : \mathcal{J}(\mathbf{K})^2 \rightarrow [-1, 1]$, $x \geq 2$, $x^{1+\tau} \leq V \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}$ et $\xi \leq \tau$, on a*

$$S_V := \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in C \\ I, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ i\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{P} \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V}} h(i)b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) (d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) - e_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})) \ll x^2 (\log x)^{-B}$$

où la constante implicite dépend du zéro de Siegel.

Proof. La preuve étant calquée sur les arguments développés dans [HB01], [HBM02] et [HBM04], nous nous contentons ici de souligner les différences dans le cas où C désigne la classe des idéaux principaux (voir [[HBM02]] ou la thèse de l'auteur pour un argument permettant de se ramener à cette situation dans le cas d'une classe quelconque).

En vue de s'affranchir de la condition de coprimalité dans la définition de \mathcal{A} , écrivons, à l'aide du principe d'inclusion-exclusion, la relation

$$S_V = \sum_{m \geq 1} \mu(m) S_V(m)$$

où

$$S_V(m) := \sum_{i, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K})} h(i)b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \cap C \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ i\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)}} d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) - e_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})$$

et

$$\mathcal{A}(m) = \left\{ ((a_1 + n_1 q)\omega_1 + (a_2 + n_2 q)\omega_2)\mathfrak{d}^{-1} : (n_1, n_2) \in C(N_1, N_2), m | (a_1 + n_1 q, a_2 + n_2 q) \right\}.$$

Soit $M \geq 1$ un paramètre qui sera explicité plus tard. Au vu de (7.17), du lemme 2.2 et de la borne sur b et h , on estime la contribution des entiers $m > M$ en s'inspirant de la majoration (11.2) de [HB01] par

$$(7.25) \quad \sum_{m > M} \left| \sum_{i\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{P}} h(i)b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \cap C \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ i\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)}} f_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) \right| \leq \log x \sum_{m > M} \sum_{j \in \mathcal{A}(m)} \tau_{\mathbf{K}}(j)^4 \ll \frac{x^2}{M} (\log x)^c.$$

Pour traiter les entiers $m \leq M$, on suit essentiellement la démarche développée dans la preuve du lemme 3.10 de [HB01], de la proposition 6.1 de [HBM02] ainsi que de la proposition 4.2 de [HBM04]. Heath-Brown et Moroz [[HBM02], p. 278] associent en particulier, pour tout idéal \mathfrak{s} , un unique entier algébrique $\beta(\mathfrak{s})$ qui engendre \mathfrak{s} , ainsi qu'un système de coordonnées $\widehat{\beta}(\mathfrak{s})$ à travers le choix de la base effectuée dans [[HBM02], pp.276–277], notations que l'on conservera dans la suite. On note \mathcal{P}' l'ensemble de tels entiers $\beta(\mathfrak{s})$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on observe tout d'abord que

$$S_V(m) \ll \left(\frac{x^3}{V} \right)^{\frac{1}{2}} S_V^{(0)}(m)^{\frac{1}{2}} (\log x)^c$$

où

$$S_V^{(0)}(m) := \sum_{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C} f_n(\beta_1, \vec{\nu}) f_n(\beta_2, \vec{\nu}) \delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2),$$

avec $f_n(\beta, \vec{\nu}) = d_n(\beta \mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \vec{\nu}) - e_n(\beta \mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \vec{\nu})$ et

(7.26)

$$\delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2) := \begin{cases} \# \{j \in \mathcal{P} : \beta_{1j}, \beta_{2j} \in \mathcal{A}(m)\} & \text{si } V < |N(\beta_i)| \leq 2V \text{ et } \beta_i \in \mathcal{P}', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $Y \ll x^{\tau/3}$ un paramètre qui sera explicité en fin de preuve. La contribution dans $S_V^{(0)}(m)$ des termes diagonaux et des $\widehat{\beta}_1 \neq \widehat{\beta}_2$ qui vérifient $\text{pgcd}(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) \leq Vx^{-1}Y^{-1}$ peut-être estimée en reprenant la preuve du lemme 11.2 de [HB01], conduisant à la majoration

$$S_V^{(0)}(m) \ll VxY^{-1}(\log x)^c + S_V^{(1)}(m)$$

où

$$S_V^{(1)}(m) := \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ \text{pgcd}(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) > Vx^{-1}Y^{-1}}} f_n(\beta_1, \vec{\nu}) f_n(\beta_2, \vec{\nu}) \delta_{V,m}(\beta_1, \beta_2).$$

En découpant la région de sommation de $\text{pgcd}(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2)$ en sous-intervalles dyadiques de la forme $] (Z-1)Y^{-2}\Delta, ZY^{-2}\Delta]$, on observe l'existence de $Vx^{-1}Y^{-1} < \Delta \ll Vx^{-1}$ et $Y^2 < Z \leq 2Y^2$ et $\nu \in \{\pm 1\}$ tels que l'on ait

$$S_V^{(1)}(m) \ll S_V^{(2)}(m, Z, \Delta) Y^2 \log x$$

où $S_V^{(2)}(m, Z, \Delta)$ est défini par la somme

$$\sum_{D \in] \frac{Z-1}{Y^2}\Delta, \frac{Z}{Y^2}\Delta]} \left| \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ \text{pgcd}(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) = D}} f_n(\beta_1, \vec{\nu}) f_n(\beta_2, \vec{\nu}) 1_{U(D, \nu)}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \epsilon_{m, D, \nu}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \right|$$

où $U(D, \nu)$ est un ensemble défini par des inégalités dans [[HBM04], p.308] et $\epsilon_{m, D, \nu}$ est l'indicatrice définie par

$$\epsilon_{m, D, \nu}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) := \begin{cases} 1 & \text{si } mD | h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \text{ et } D^{-1}\nu h_{ij}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \equiv a_j \pmod{q}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

les h_{ij} désignant les polynômes défini par [[HBM02], (6.4)]. En recouvrant la région $U(D, \nu)$ en cubes $\mathfrak{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ à la manière de [[HBM02], Section 6], on peut montrer que les cubes $\mathfrak{C} \not\subset U(D, \nu)$ contribuent de manière négligeable. Pour les cubes \mathfrak{C} restants, on tronque la convolution

$$1_{\text{pgcd}(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2) = D} = \sum_{dD | \text{pgcd}(\widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2)} \mu(d)$$

en $d_0 := x^{-1}VY^{15} + V^{1/6}$. La contribution des $dD > d_0$ peut-être estimée en suivant [[HBM02], pp. 280–282] et permet d'obtenir, pour un certain $\mathfrak{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$,

$$S_V^{(2)}(m, Z, \Delta) \ll VxY^{-3}(\log x)^c + Y^{12}S_V^{(3)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C})$$

où

$$S_V^{(3)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}) := \sum_{D \in]\frac{Z-1}{Y^2}\Delta, \frac{Z}{Y^2}\Delta]} \left| \sum_{dD \leq d_0} \mu(d) S^{(4)}(m, d, D, \mathfrak{C}) \right|$$

avec

$$S^{(4)}(m, d, D, \mathfrak{C}) := \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \cap C \\ (\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \in \mathfrak{C} \\ dD | \widehat{\beta}_1 \wedge \widehat{\beta}_2}} f_n(\beta_1, \vec{\nu}) f_n(\beta_2, \vec{\nu}) \epsilon_{m, D, \nu}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2).$$

Soient d^* le dénominateur commun des h_{ij} et $H_{ij} = d^* h_{ij}$. En reprenant *mutatis mutandis* les arguments de [[HBM04], Section 5] basés sur l'introduction de caractères additifs, on peut réécrire $S^{(4)}(m, d, D, \mathfrak{C})$ sous la forme

$$S^{(4)}(m, d, D, \mathfrak{C}) = \frac{1}{(d^* q m d D)^6} \sum_{\substack{\lambda \in (\mathbf{Z}/(dD)\mathbf{Z})^* \\ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in (\mathbf{Z}/(d^* q m d D)\mathbf{Z})^3}} T(\lambda, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \\ \times S(d^* q m d D, \mathbf{b}_1, C_1) S(d^* q m d D, \mathbf{b}_2, C_2)$$

avec

$$S(l, \mathbf{b}, C) = \sum_{\substack{\widehat{\beta} \in C \cap \mathbf{Z}^3 \\ (\beta) \in \mathcal{P} \cap C}} e\left(\frac{\mathbf{b} \cdot \widehat{\beta}}{l}\right) f_n(\beta, \vec{\nu}).$$

et

$$T(\lambda, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) := \sum_{\boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_5} e\left(-\frac{(\mathbf{b}_1 + \lambda \mathbf{b}_2) \cdot \boldsymbol{\eta}_5}{dD}\right) e\left(-\frac{(\mathbf{b}_1 + \lambda \mathbf{b}_2) \cdot \boldsymbol{\eta}_4 + dD \mathbf{b}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_3}{d^* q m d D}\right)$$

où la sommation porte sur les $\boldsymbol{\eta}_3, \boldsymbol{\eta}_4 \in \mathbf{Z}/(d^* q m)\mathbf{Z}$ et $\boldsymbol{\eta}_5 \in \mathbf{Z}/(dD)\mathbf{Z}$ satisfaisant $\nu H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_4, \lambda \boldsymbol{\eta}_4 + dD \boldsymbol{\eta}_3) \equiv D d^* a_i \pmod{q D d^*}$ et $H_{ij}(\boldsymbol{\eta}_4, \lambda \boldsymbol{\eta}_4 + dD \boldsymbol{\eta}_3) \equiv 0 \pmod{m D d^*}$.

La propriété d'orthogonalité des caractères additifs et la majoration triviale entraînent que

$$|T(\lambda, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)| \leq \begin{cases} (dD)^3 (d^* q m)^6 & \text{si } \mathbf{b}_1 + \lambda \mathbf{b}_2 \equiv 0 \pmod{dD}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, si $T(\lambda, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \neq 0$, alors \mathbf{b}_2 est déterminé de manière unique modulo dD par la donnée de λ et de \mathbf{b}_1 . L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne alors l'estimation

$$S^{(4)}(m, d, D, \mathfrak{C}) \ll \frac{m^3}{(dD)^2} \max_{i=1,2} \sum_{\mathbf{b} \pmod{d^* q m d D}} |S(d^* q m d D, \mathbf{b}, \mathfrak{C}_i)|^2.$$

Afin d'appliquer une inégalité de grand crible, on réduit les phases $\mathbf{b}(d^* q m d D)^{-1}$ à des phases irréductibles $\mathbf{b}l^{-1}$, c'est-à-dire telles que $(l, b_1, b_2, b_3) = 1$, en suivant [[HB01], p. 78]. On remarque pour cela qu'une phase $\mathbf{b}l^{-1}$ apparaît avec un poids qui peut être majoré uniformément en m par

$$\sum_{D \geq V x^{-1} Y^{-1}} \sum_{\substack{d \\ l | d^* q m d D}} \frac{m^3}{(dD)^2} \ll m^5 \sum_{\substack{v \geq V x^{-1} Y^{-1} \\ l | v}} \frac{\tau(v)}{v^2} \ll m^5 \frac{\tau(l)}{l} x Y \frac{\log V}{V}.$$

Au vu de la condition $dD \leq d_0$, on en déduit que

$$(7.27) \quad S_V^{(3)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}) \ll \frac{m^5 x Y (\log x)^c}{V} \max_{i=1,2} \sum_{l \leq m q d^* d_0} \frac{\tau(l)}{l} \sum_{\mathbf{b} \pmod{l}}^{(l)} |S(l, \mathbf{b}, \mathfrak{C}_i)|^2$$

où la sommation $\sum^{(l)}$ porte sur les vecteurs $\mathbf{b} \pmod{l}$ tels que $(l, b_1, b_2, b_3) = 1$.

On peut alors reproduire étape par étape les arguments du paragraphe 13 de [HB01] pour majorer la somme du membre de droite de (7.27). Il s'ensuit l'estimation

$$S_V^{(3)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}) \ll m^8 x V \left(Y Q_1^{-1/4} + Y^{46} x^{-\tau/2} \right) (\log x)^c$$

où $Q_1 := (\log x)^{c(B)}$ avec $c(B) > 0$ une constante qui peut-être choisie arbitrairement grande. Par suite, en collectant les différents termes d'erreur, il vient, pour $m \leq M$, la borne supérieure

$$S_V(m) \ll x^2 \left(Y^{-1/2} + m^4 \left(Y^{15/2} Q_1^{-1/8} + Y^{30} x^{-\tau/4} \right) \right) (\log x)^c$$

et donc, d'après (7.25),

$$S_V \ll x^2 \left(M^{-1} + M Y^{-\frac{1}{2}} + M^5 \left(Y^{15/2} Q_1^{-1/8} + Y^{30} x^{-\tau/4} \right) \right) (\log x)^c.$$

Quitte à supposer la constante $c(B)$ introduite dans la définition de Q_1 suffisamment grande, les choix $Y = M^4$ et $M = Q_1^{1/288}$ impliquent finalement que

$$S_V \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

L'uniformité du résultat en $(\log x)^{-\varpi_2} \leq \xi \leq \tau$ ainsi que la non-effectivité de la constante implicite sont des conséquences directes de la preuve du lemme 3.8 de [HB01]. \square

En conclusion de cette partie, on peut énoncer une borne supérieure du terme d'erreur $S(|h|)$ défini par (5.28).

Proposition 7.7. *Soit $B > 0$. Il existe une constante $c(B) > 0$ telle que, pour tout $c_0 > c(B)$ et uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1, $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, $(\log x)^{-\tau} \leq \xi \leq \tau^2$, on ait*

$$S(|h|) \ll \eta^2 x^2 (\log x)^{-B} + \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$$

pour le choix $\eta := (\log x)^{-c_0}$, où les $R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ sont définis par (7.5).

Proof. Soit $c_1 > 0$. Puisqu'il y a au plus $O(\xi^{-1})$ choix possibles pour chaque v_i , les lemmes 7.4, 7.5 et 7.6 entraînent l'existence d'une constante $c > 0$ indépendante de c_1 et η telle que, pour $i \in \{1, \dots, 5\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \sum_{N^{(i)} \in \mathcal{I}} \left| \widehat{S}(\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2) x} \sigma_q(\mathbf{i}) \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right| \\ \ll x^2 \left(\eta^{\frac{11}{5}} + \xi^{-c\tau-1} (\log x)^{-c_1} \right) (\log x)^c. \end{aligned}$$

En remarquant que la condition $(\log x)^{-\tau} \leq \xi \leq \tau^2$ entraîne que $\xi^{-c\tau-1} \leq (\log x)^c$, on en déduit l'existence de $c_2 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \sum_{N^{(i)} \in \mathcal{I}} \left| \widehat{S}(\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2) x} \sigma_q(\mathbf{i}) \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right| \\ \ll x^2 \left(\eta^{\frac{11}{5}} + (\log x)^{-c_1} \right) (\log x)^{c_2}. \end{aligned}$$

En choisissant $c(B) = 5(c_2 + B)$ et $c_1 = 2c_0 + c_2 + B$ et en utilisant la formule

$$\begin{aligned} S(|h|) \leq \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \sum_{N^{(i)} \in \mathcal{I}} \left| \widehat{S}(\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2) x} \sigma_q(\mathbf{i}) \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right| \\ + \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}), \end{aligned}$$

on en déduit le résultat. \square

8. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.5 ET APPLICATIONS

Compte tenu des résultats des paragraphes précédents, il est possible d'estimer les différentes quantités intervenant dans le théorème 5.2. On obtient alors le résultat suivant qui consiste en une reformulation de la proposition 1.5 en tenant compte de la notation $\eta := (\log x)^{-c_0}$.

Proposition 8.1. *Soit $\varepsilon > 0$. Uniformément en $x \geq 2$, $y_2 > \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, w un complexe de module 1, $h \in \mathcal{M}(w; 1, y_2)$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, on a*

$$(8.1) \quad M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2)x} M_{\sigma_q h}(\mathcal{B}) \ll \frac{\eta^2 x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}.$$

D'autre part, si $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ où $y_1 > \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, alors on a

$$(8.2) \quad M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2)x} M_{\sigma_q h}(\mathcal{B}) \ll \frac{\eta^2 x^2}{\log y_1 \log y_1 (\log \log x)^{1-\varepsilon}} \log x.$$

Si, de plus, $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y_1 \leq y_2 \leq x^{1/2-\varepsilon}$, alors on peut remplacer dans (8.1) et (8.2) le terme $1/(\log \log x)^{1-\varepsilon}$ par $\exp\left(-(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}\right)$.

Proof. Soient $\tau := (\log \log x)^{\varepsilon/2-1}$ et $\tau_1 := (\log \log x)^{\varepsilon-1}$. Les lemmes 6.1, 6.3 et 6.7 fournissent une borne supérieure des quantités $\Delta_0(|h|, x^{2\tau/3})$, $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$ et $T(|h|)$ qui est négligeable, compte tenu des choix de τ et τ_1 . En utilisant la proposition 7.7 avec le choix $\xi := \tau^7$, le lemme 7.1, ainsi que la majoration (6.16), on obtient d'autre part l'estimation

$$S(|h|) \ll \tau \eta^2 x^2.$$

Enfin, le lemme 6.6 permet d'estimer $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$, ce qui conduit à (8.1).

L'estimation (8.2) s'obtient en utilisant (6.15) en lieu et place de (6.14) et en notant que $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) = 0$.

Supposons à présent que $y_2 \leq x^{1/2-\varepsilon}$ et posons $\tau := (\log \log x)^{\varepsilon/2-1/2}$ et $\tau_1 := \varepsilon/2$. Sous ces conditions, on observe que seuls interviennent les éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$ dans la discussion du paragraphe 5. On a alors

$$M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2)x} M_{\sigma_q h}(\mathcal{B}) \ll S(|h|) + \Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(|h|, x^{2\tau/3}).$$

On en déduit le résultat en utilisant là encore les lemmes 6.1 et 6.3, la proposition 7.7 avec le choix $\xi := (\log x)^{-\tau}$ ainsi que le lemme 7.1. \square

En combinant le résultat précédent avec les ordres moyens établis dans le paragraphe 4.2, on peut en déduire les théorèmes 1.2 et 1.4 et le corollaire 1.3.

Preuve du théorème 1.2 et du corollaire 1.3. La proposition 4.2 entraîne que, uniformément en $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et dans le domaine (1.8) défini par

$$x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right) \leq y \ll x^3,$$

on a

$$\frac{\eta \sigma_q(F)}{c_q(N_1, N_2)x} M_{\sigma_q 1_{S(y)}}(\mathcal{B}) = \frac{\eta^2 x^2}{\zeta_q(2)} \rho(3u) \left(1 + O\left(\log \log x \frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right).$$

En sommant sur les différents $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ (voir la formule (2.11)), le théorème 1.2 découle de la proposition 8.1.

Pour démontrer le corollaire 1.3, on peut se restreindre au domaine (1.8), le résultat étant une conséquence du corollaire 1 de [dlBB06] lorsque $u \geq (\log \log x)^{1-\varepsilon}$ (voir la remarque qui suit le corollaire 1.3). Considérons la convolution

$$\begin{aligned} \Psi_F(\mathcal{K} \cdot x, y) &= \sum_{m \leq (\log x)^B} \Psi_F^{(1)}\left(\mathcal{K} \cdot \frac{x}{m}, y; 0, 0, 1\right) \\ &\quad + O\left(\#\left\{1 \leq n_1, n_2 \leq x : F(n_1, n_2) \in \Upsilon\left((\log x)^B\right)\right\}\right). \end{aligned}$$

Quitte à choisir B suffisamment grand, le terme de reste est borné par $x^2(\log x)^{-1}$ d'après le lemme 6.1. Le corollaire s'obtient comme conséquence du théorème 1.2, puisque l'on a, d'après (4.29), la suite d'estimations

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq (\log x)^B} \frac{\rho\left(3u - \frac{\log m}{\log y}\right)}{m^2} &= \rho(3u) \sum_{m \leq (\log x)^B} \frac{1}{m^2} \left(1 + O\left(\frac{\log m \log(u+1)}{\log y}\right)\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6} \rho(3u) \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right). \end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 1.4. Soit $h \in \mathcal{M}(w)$. La proposition 4.1 permet d'évaluer $M_{\sigma_q h}(\mathcal{B})$:

$$M_{\sigma_q h}(\mathcal{B}) = c_q(N_1, N_2) \eta x^3 (3 \log x)^{w-1} \left(\frac{\sigma_q(F, h)}{\Gamma(w)} + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right) \right)$$

Le théorème 1.4 apparaît alors comme une conséquence directe de la proposition 8.1 et de (2.11), dans la mesure où l'hypothèse $|w-1| \geq \frac{1}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}$ implique l'estimation $(\log x)^{w-1} \ll \frac{1}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}$. □

REFERENCES

- [BBDT12] A. Balog, V. Blomer, C. Dartyge, and G. Tenenbaum, *Friable values of binary forms*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no. 3, 639–667.
- [Bom76] E. Bombieri, *The asymptotic sieve*, Rend. Accad. Naz. XL (5) **1/2** (1975/76), 243–269 (1977).
- [Cho65] S. Chowla, *The Riemann hypothesis and Hilbert's tenth problem*, Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **38** (1965), 62–64.
- [CP05] R. Crandall and C. Pomerance, *Prime numbers, a computational perspective*, second ed., Springer, New York, 2005.
- [Dan99] S. Daniel, *On the divisor-sum problem for binary forms*, J. Reine Angew. Math. **507** (1999), 107–129.
- [dB66] N. G. de Bruijn, *On the number of positive integers $\leq x$ and free prime factors $> y$. II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 69=Indag. Math. **28** (1966), 239–247.
- [Del71] F. Delmer, *Sur la somme de diviseurs $\sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **272** (1971), A849–A852.
- [dlBB06] R. de la Bretèche and T. D. Browning, *Sums of arithmetic functions over values of binary forms*, Acta Arith. **125** (2006), no. 3, 291–304.
- [dlBT12] R. de la Bretèche and G. Tenenbaum, *Moyennes de fonctions arithmétiques de formes binaires*, Mathematika **58** (2012), no. 2, 290–304.
- [dlBT13] ———, *Sur la conjecture de Manin pour certaines surfaces de Châtelet*, J. Inst. Math. Jussieu **12** (2013), no. 4, 759–819.
- [FI10] J. Friedlander and H. Iwaniec, *Opera de cribro*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 57, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [Gre70] G. Greaves, *On the divisor-sum problem for binary cubic forms*, Acta Arith. **17** (1970), 1–28.
- [Gre71] ———, *Large prime factors of binary forms*, J. Number Theory **3** (1971), 35–59.
- [Gre92] ———, *Power-free values of binary forms*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **43** (1992), no. 169, 45–65.

- [HB01] D. R. Heath-Brown, *Primes represented by $x^3 + 2y^3$* , Acta Math. **186** (2001), no. 1, 1–84.
- [HBM02] D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz, *Primes represented by binary cubic forms*, Proc. London Math. Soc. (3) **84** (2002), no. 2, 257–288.
- [HBM04] ———, *On the representation of primes by cubic polynomials in two variables*, Proc. London Math. Soc. (3) **88** (2004), no. 2, 289–312.
- [Hel] H. A. Helfgott, *The parity problem for irreducible cubic forms*, <http://arxiv.org/abs/math/0501177>.
- [HR74] H. Halberstam and H.-E. Richert, *Sieve methods*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1974, London Mathematical Society Monographs, No. 4.
- [HTW08] G. Hanrot, G. Tenenbaum, and J. Wu, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. II*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), no. 1, 107–135.
- [Lac14] A. Lachand, *Friable integers and binary forms*, Thèse, Université de Lorraine, 2014.
- [Nar04] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, third ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Sel52] A. Selberg, *On elementary methods in primenumber-theory and their limitations*, Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim, 1949, Johan Grundt Tanums Forlag, Oslo, 1952, pp. 13–22.
- [Shi80] P. Shiu, *A Brun-Titchmarsh theorem for multiplicative functions*, J. Reine Angew. Math. **313** (1980), 161–170.
- [Ten90] G. Tenenbaum, *Sur une question d’Erdős et Schinzel*, A tribute to Paul Erdős, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, pp. 405–443.
- [Ten08] ———, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3ième édition ed., Échelles, Belin, 2008.
- [Web99] H. Weber, *Lehrbuch der algebra*, vol. 2, F. Vieweg & Sohn, 1899.

A. LACHAND: INSTITUT ÉLIE CARTAN, UNIVERSITÉ DE LORRAINE 1, B.P. 70239,
 54506 VANDŒUVRE-LÈS-NANCY CEDEX, FRANCE
E-mail address: `armand.lachand@univ-lorraine.fr`