



Fonctions arithmétiques et formes binaires irréductibles de degré 3

Armand Lachand

► To cite this version:

Armand Lachand. Fonctions arithmétiques et formes binaires irréductibles de degré 3. Annales de l'Institut Fourier, 2018, 68 (3), <10.5802/aif.3189>. <hal-01053649v3>

HAL Id: hal-01053649

<https://hal.science/hal-01053649v3>

Submitted on 11 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

FONCTIONS ARITHMÉTIQUES ET FORMES BINAIRES IRRÉDUCTIBLES DE DEGRÉ 3

ARMAND LACHAND

ABSTRACT. In this article, we give some estimates for the average order $\sum_{|n_1| \leq x, |n_2| \leq x} h(n_1^3 + 2n_2^3)$ when h satisfy certain conditions. We provide an asymptotic formula for the number of y -friable values of $n_1^3 + 2n_2^3$ when the variables n_1, n_2 lie in the square $[1, x]^2$ and uniformly for $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y \leq x$. Our method also applies to some oscillating multiplicative functions like the Möbius function μ : this gives another proof of the Chowla conjecture for the form $X_1^3 + 2X_2^3$ recently proved by Helfgott in the more general case of binary and irreducible cubic forms.

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous obtenons des estimations de l'ordre moyen $\sum_{|n_1| \leq x, |n_2| \leq x} h(n_1^3 + 2n_2^3)$ pour des fonctions arithmétiques h soumises à certaines conditions. On donne en particulier une formule asymptotique du nombre d'entiers y -friables de la forme $n_1^3 + 2n_2^3$ où (n_1, n_2) parcourent $[1, x]^2$, uniforme dans la région $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y \leq x$. La méthode utilisée s'applique également à des fonctions multiplicatives oscillantes comme la fonction μ de Möbius : il s'ensuit une nouvelle preuve de la conjecture de Chowla pour la forme $X_1^3 + 2X_2^3$, récemment démontrée par Helfgott dans le cas plus général des formes binaires cubiques irréductibles.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Formes cubiques et normes d'idéaux dans un corps cubique	6
2.1. Fonctions arithmétiques sur les idéaux	7
2.2. Notations et définition des idéaux admissibles	7
2.3. Transformation des sommes $M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; X_1^3 + 2X_2^3)$ en sommes sur des idéaux admissibles	8
3. Sommes de Type I et niveau de répartition	9
3.1. Niveau de répartition de \mathcal{A}	11
3.2. Niveau de répartition de \mathcal{B}	13
4. La fonction de densité σ	14
4.1. Définition et premières propriétés	14
4.2. Ordres moyens de σh	15
5. Description de la méthode	18
6. Premières applications des estimations de sommes de Type I	26
7. Estimations de sommes de Type II	34
8. Applications de la méthode	48
Références	49

1. INTRODUCTION

Soient $F(X_1, X_2) \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré 3 et h une fonction arithmétique. L'objet de ce travail est l'obtention de formules asymptotiques de

Date: 2 mars 2016.

l'ordre moyen

$$M_h(x; F) := \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq x} h(F(n_1, n_2))$$

pour diverses fonctions arithmétiques h dont l'indicatrice des entiers friables¹ et la fonction μ de Möbius.

L'intérêt de considérer de telles sommes est multiple. La quantité $M_h(x; F)$ apparaît dans de nombreux problèmes arithmétiques (conjecture de Manin dans [dlBT12] et [dlBT13], crible algébrique (NFS) exposé dans le chapitre 6 de [CP05], etc.). D'autre part, il s'agit d'un angle d'attaque efficace pour étudier l'indépendance entre une propriété arithmétique relative à h et la représentation d'un entier par la forme binaire F . Enfin, les valeurs de F forment un ensemble lacunaire d'entiers, dans la mesure où

$$\frac{\log \# \{(n_1, n_2) : |F(n_1, n_2)| \leq x\}}{\log \# \{|n| \leq x\}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3}$$

et la persistance d'un phénomène arithmétique dans un ensemble de densité asymptotique nulle est un sujet important de la théorie des nombres, à l'origine de nombreuses conjectures.

Greaves [Gre70] initie l'étude de telles sommes en considérant la fonction de compte des diviseurs $h = \tau$. À partir de la convolution $\tau = 1 * 1$, il montre ainsi que, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute forme cubique irréductible F , il existe des constantes réelles $c_0(F) > 0$ et $c_1(F)$ telles que l'on ait, uniformément en $x \geq 2$, l'estimation

$$M_\tau(x; F) = c_0(F)x^2 \log x + c_1(F)x^2 + O_{\varepsilon, F}(x^{27/14+\varepsilon}),$$

formule asymptotique précisée par Daniel [Dan99] qui améliore sensiblement le terme d'erreur précédent en le remplaçant par $x^{15/8+\varepsilon}$.

Dans cette direction, il convient de mentionner les travaux de La Bretèche et Browning [dlBB06] qui obtiennent une borne supérieure de $M_h(x; F)$ uniformes pour des fonctions h soumises à des conditions de croissance et de sous-multiplicativité, majoration dans laquelle intervient la fonction γ_F définie par la formule

$$\gamma_F(d) := \#\{1 \leq n_1, n_2 \leq d : d | F(n_1, n_2)\}.$$

Theorem A ([dlBB06], Corollary 1). *Soient $A > 0$, $B : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ une forme binaire irréductible sur \mathbf{Z} de degré $g \geq 1$ et h une fonction positive et sous-multiplicative satisfaisant $h(p) \leq A$ pour tout premier p et $h(n) \leq B(\varepsilon)n^\varepsilon$ pour tout entier n et $\varepsilon \in]0, 1]$. Uniformément en $x \geq 2$, on a l'estimation*

$$(1.1) \quad M_h(x; F) \ll_{A, B, F} x^2 \prod_{g < p \leq x} \left(1 + \frac{\gamma_F(p)}{p^2} (h(p) - 1)\right).$$

Lorsque h est l'indicatrice $1_{\mathcal{E}}$ d'un ensemble d'entiers criblés \mathcal{E} , l'estimation précédente fournit une borne supérieure non triviale. La question de la détermination d'une minoration de $M_{1_{\mathcal{E}}}(x; F)$ est en général difficile et dépend fortement de l'ensemble \mathcal{E} en question.

Dans [Gre92], Greaves considère l'ensemble \mathcal{E}_k des entiers qui ne sont divisibles par aucune puissance k -ième de nombres premiers. Il montre ainsi que, pour tout $k \geq 2$ et toute forme cubique irréductible F , on a la formule asymptotique, uniforme en $x \geq 2$,

$$(1.2) \quad M_{1_{\mathcal{E}_k}}(x; F) = x^2 \prod_p \left(1 - \frac{\gamma_F(p^k)}{p^{2k}}\right) + O_{F, k} \left(\frac{x^2}{\log x}\right).$$

1. Un entier $n \geq 1$ est dit y -friable si tous ses facteurs premiers sont inférieurs à y .

On peut également considérer l'indicatrice $1_{S(y)}$ où $S(y)$ désigne l'ensemble des entiers y -friables. On retrouve dans ce cas la fonction de comptage des valeurs friables de F , dans la mesure où

$$M_{1_{S(y)}}(x; F) = \Psi_F(x, y) := \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : P^+(F(n_1, n_2)) \leq y \right\}.$$

Au cours de leur étude du cardinal $\Psi_F(x, y)$, Balog, Blomer, Dartyge et Tenenbaum [[BBDT12], Theorem 1] ont montré entre autres que, pour toute forme binaire irréductible F de degré $g \geq 1$, on dispose de l'estimation non triviale

$$(1.3) \quad \alpha_F := \inf \left\{ \alpha : \Psi_F(x, x^\alpha) \gg_{\alpha, F} x^2 \text{ uniformément pour } x \geq x_0(\alpha, F) \right\} < g.$$

En particulier, quand F est de degré 3, il obtiennent la majoration $\alpha_F \leq e^{-1/2}$. La motivation principale du présent travail est de préciser ce résultat, dans le cas des formes cubiques irréductibles, en montrant la formule asymptotique

$$(1.4) \quad M_{1_{S(y)}}(x; F) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \rho(3u)$$

où ρ désigne la fonction de Dickman et $u := \frac{\log x}{\log y}$, uniformément dans un domaine en (x, y) à préciser.

L'ensemble des résultats cités ci-dessus ont en commun l'emploi récurrent de sommes de Type I, c'est-à-dire des estimations des cardinaux

$$A_d(x) := \# \{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : d | F(n_1, n_2) \}$$

en moyenne sur $d \leq x^{2-o(1)}$. Il est naturel d'approcher $A_d(x)$ par la quantité $\frac{\gamma_F(d)}{d^2} x^2$. En posant

$$(1.5) \quad r_d(x) := A_d(x) - \frac{\gamma_F(d)}{d^2} x^2,$$

le lemme 3.3 de [Dan99] entraîne que, dans le cas où F est une forme cubique irréductible, on dispose de l'estimation de sommes de Type I suivante

$$(1.6) \quad \sum_{d \leq D} |r_d(x)| \ll_F x \sqrt{D} (\log 2D)^{7203} + D (\log 2D)^8.$$

Lorsque $h(m)$ présente un caractère oscillant au regard du nombre de facteurs premiers de m comptés avec multiplicité, noté $\Omega(m)$, il n'est en général pas possible de déduire des résultats satisfaisants à partir des seules estimations de sommes de Type I. C'est là l'incidence du phénomène de parité, mis en lumière par Selberg [Sel52] puis Bombieri [Bom76] – on en trouvera un survol dans le chapitre 16 de [FI10]. En principe, il est possible de contourner ce problème si l'on dispose d'une estimation de sommes de Type II, c'est-à-dire d'une majoration non triviale de sommes bilinéaires de la forme

$$\sum_{U < r \leq 2U} \sum_{V < s \leq 2V} a_r b_s \# \{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : rs = F(n_1, n_2) \}$$

pour des choix convenables de U et V , où b_s satisfait une hypothèse de type Siegel-Walfisz.

Heath-Brown [HB01] estime une telle quantité pour la forme $F(X_1, X_2) = X_1^3 + 2X_2^3$ à l'aide entre autres d'une inégalité de grand crible et d'un comptage de points sur une hypersurface. Il en déduit l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $n_1^3 + 2n_2^3$ à travers la formule asymptotique

$$\# \left\{ x < n_1, n_2 \leq x (1 + (\log x)^{-c_0}) : \begin{matrix} n_1^3 + 2n_2^3 \\ \text{premier} \end{matrix} \right\} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \prod_p \left(1 - \frac{\nu_p - 1}{p} \right) \frac{x^2}{3(\log x)^{2c_0+1}}$$

pour une constante $c_0 > 0$ convenablement choisie, où ν_p désigne le nombre de racines de la congruence $X^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$. Par la suite, une généralisation de ce travail aux valeurs des polynômes de la forme $F(a_1 + X_1 q, a_2 + X_2 q)$ où F est une forme cubique

irréductible sur \mathbf{Z} à coefficients entiers et $(a_1, a_2, q) = 1$ a été effectuée par Heath-Brown et Moroz [HBM02, HBM04].

Enfin, les estimations de Type II obtenues dans [HBM02] ont été utilisées par Helfgott pour établir la validité de la conjecture de Chowla [Cho65], bien que les identités combinatoires mises en œuvre soient différentes de celles intervenant dans les travaux de Heath-Brown et Moroz². Dans le théorème principal de [Hel], il montre en particulier la formule suivante, valide pour toute forme irréductible $F \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$ de degré 3 et tout $\varepsilon > 0$, et uniforme en $x \geq 16$,

$$(1.7) \quad M_\mu(x; F) = \sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq x} \mu(F(n_1, n_2)) \ll_{F, \varepsilon} \frac{(\log \log x)^4 (\log \log \log x)^\varepsilon}{\log x} x^2.$$

Étant donné un compact $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$, une forme binaire F et une fonction arithmétique h , on définit

$$M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; F) := \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathcal{K} \cdot x \cap \mathbf{Z}^2 \\ (n_1, n_2) = 1}} h(F(n_1, n_2))$$

où $\mathcal{K} \cdot x := \{(t_1 x, t_2 x) : (t_1, t_2) \in \mathcal{K}\}$. Dans le présent travail, nous étudions la somme $M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; F)$ pour diverses fonctions multiplicatives h et pour la forme binaire $X_1^3 + 2X_2^3$. Traiter le cas d'une forme binaire cubique irréductible quelconque nécessite l'introduction de divers outils de théorie algébrique des nombres, à la manière de [HBM02] et [HBM04], que nous avons voulu éviter ici pour conserver une exposition claire. Le lecteur intéressé pourra consulter les travaux de thèse de l'auteur [Lac14], où sont obtenus des analogues des théorèmes 1.1 et 1.3 *infra*, pour les polynômes de la forme $F(a_1 + X_1 q, a_2 + X_2 q)$ où F est une forme cubique irréductible et a_1, a_2 et q sont des entiers satisfaisant $(a_1, a_2, q) = 1$.

En considérant le cas $h = 1_{S(y)}$ de l'indicatrice des friables, nous retrouvons le cardinal

$$\Psi_{X_1^3 + 2X_2^3}^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x, y) := \#\left\{(n_1, n_2) \in \mathcal{K} \cdot x \cap \mathbf{Z}^2 : (n_1, n_2) = 1 \text{ et } P^+(n_1^3 + 2n_2^3) \leq y\right\},$$

quantité qui intervient directement dans l'algorithme de factorisation du crible algébrique (voir le chapitre 6.2 de [CP05]). Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Uniformément dans le domaine*

$$(1.8) \quad x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right) \leq y,$$

on a

$$(1.9) \quad \Psi_{X_1^3 + 2X_2^3}^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x, y) = \frac{6}{\pi^2} \text{Vol}(\mathcal{K}) x^2 \rho(3u) + O\left(\frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$$

où $\text{Vol}(\mathcal{K})$ désigne l'aire de \mathcal{K} .

De plus, si (x, y) parcourt le domaine

$$(1.10) \quad x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y \leq x^{1/2-\varepsilon},$$

alors le terme d'erreur dans (1.9) peut être remplacé par $x^2 \exp\left(-(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}\right)$.

2. Helfgott utilise des itérations de l'identité de Vaughan en lieu et place de l'identité de Buchstab.

Compte tenu de l'estimation

$$\rho(u) = \exp(-u \log u(1 + o(1))) \quad (u \rightarrow +\infty),$$

on observe que le théorème 1.1 donne un équivalent de $\Psi_{X_1^3+2X_2^3}^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x, y)$ dans le domaine $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y$. En utilisant une convolution pour enlever la condition de coprimauté, on montre le corollaire suivant, qui améliore les résultats de [BBDT12] dans le cas de la forme $X_1^3 + 2X_2^3$, en établissant la validité de (1.4) et en augmentant la région dans laquelle on dispose d'une estimation de $\Psi_{X_1^3+2X_2^3}(x, y)$.

Corollaire 1.2. *Soient $\varepsilon > 0$. Uniformément en $x, y \geq 3$, on a*

$$(1.11) \quad \Psi_{X_1^3+2X_2^3}(x, y) = x^2 \rho(3u) + O\left(\frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right).$$

De plus, si (x, y) parcourt le domaine (1.10), alors le terme d'erreur dans (1.11) peut être remplacé par $x^2 \exp(-(\log \log x)^{1/2-\varepsilon})$.

Dans le domaine $y \leq \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, l'estimation (1.11) est une conséquence du corollaire 1 de [dlBB06] (voir le théorème A). On observe en effet que l'estimation

$$\Psi_F([1, x]^2, y) \ll x^2 \prod_{y < p \leq x} \left(1 - \frac{\gamma_F(p)}{p^2}\right) + x \ll \frac{x^2}{u} + x$$

valide pour toute forme cubique irréductible F implique (1.11) dès que $u \geq (\log \log x)^{1-\varepsilon}$.

Considérons également l'ensemble $\mathcal{M}(w)$ des fonctions h multiplicatives, de module borné par 1 et satisfaisant $h(p) = w$ pour tout premier p , où $w \neq 1$ est un complexe de module 1. La méthode développée dans ce travail permet d'évaluer $M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; X_1^3 + 2X_2^3)$ avec une certaine uniformité en w .

Théorème 1.3. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Uniformément en w un complexe de module 1 satisfaisant $|\operatorname{Re}(w) - 1| \geq \frac{1}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}$, $h \in \mathcal{M}(w)$ et $x \geq 3$, on a*

$$(1.12) \quad M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; X_1^3 + 2X_2^3) \ll \frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}.$$

En effectuant le choix $h(n) = \mu(n)$, ce résultat permet de retrouver, avec un terme d'erreur plus faible, la formule (1.7) due à Helfgott [Hel].

On peut en déduire aussi la majoration de la somme d'exponentielles

$$(1.13) \quad \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathcal{K} \cdot x \cap \mathbf{Z}^2 \\ (n_1, n_2) = 1}} e\left(i\theta \Omega(n_1^3 + 2n_2^3)\right) \ll \frac{x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}$$

où $e(t) := \exp(2i\pi t)$, valide uniformément pour θ satisfaisant $\|\theta - 1\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \geq \frac{1}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}$ où $\|\cdot\|_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}}$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

Reprenant les travaux de Heath-Brown et Moroz, l'étape cruciale des preuves des théorèmes 1.1 et 1.3 consiste à réduire l'estimation de $M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; X_1^3 + 2X_2^3)$ à l'étude asymptotique de sommes courtes

$$(1.14) \quad M_{\sigma^{\mathbf{Z}} h}(x) := \sum_{x \leq m \leq x + x(\log x)^{-c}} \sigma^{\mathbf{Z}}(m) h(m)$$

où $\sigma^{\mathbf{Z}}$ est une fonction de densité, multiplicative, satisfaisant $\sigma^{\mathbf{Z}}(p^k) = \nu_p + O(p^{-1})$ où ν_p désigne encore le nombre de solutions de la congruence $X^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$.

La série de Dirichlet associée $\sum_m \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(m)}{m^s}$ étant analytiquement proche de la fonction zêta de Dedekind $\zeta_{\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})}(s)$, diverses méthodes d'analyse complexe (formule de Perron, méthode de Selberg-Delange, méthode du col, etc.) permettent d'estimer l'ordre (1.14). Au paragraphe 4.2, nous utilisons ces outils pour étudier asymptotiquement la quantité $M_{\sigma^{\mathbf{Z}}h}(x)$ dans le cas où h désigne l'indicatrice des entiers friables et $h \in \mathcal{M}(w)$.

Enfin, définissons pour w un complexe de module 1, $y_1, y_2 \geq 1$ des réels ou $y_2 = +\infty$, l'ensemble $\mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ comme l'ensemble des fonctions h multiplicatives, bornées par 1 et satisfaisant les conditions suivantes :

- (1) h est à support sur les entiers m tels que $P^-(m) > y_1$ et $P^+(m) \leq y_2$,
- (2) pour tout premier p dans l'intervalle $[y_1, y_2]$, on a $h(p) = w$.

Avec ces notations, on vérifie que $1_{S(y)} \in \mathcal{M}(1; 1, y)$ et que les fonctions $h \in \mathcal{M}(w)$ considérées dans le théorème 1.3 sont des éléments de $\mathcal{M}(w; 1, +\infty)$. La méthode développée dans le présent article permet de traiter le cadre plus large des fonctions arithmétiques appartenant à $\mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ (voir la proposition 8.1 pour un énoncé général du résultat obtenu). Nous espérons que cette généralisation trouvera des applications supplémentaires dans d'autres circonstances.

Conventions. Dans la suite de cet article, on emploie les notations en usage dans les travaux de Heath-Brown et Moroz, à savoir que la lettre c désignera une constante positive pouvant varier à chaque occurrence. De même, pour tout paramètre B , la lettre $c(B)$ désignera une fonction de B , éventuellement différente à chaque apparition. Il convient de souligner que, dans [HB01], [HBM02], [HBM04], [Hel] et dans le présent travail, les constantes ne sont pas effectives, en raison de l'incidence du zéro de Siegel dans les arguments utilisés pour établir les estimations de sommes de Type II (voir le paragraphe 7).

Ce travail présente l'organisation suivante. Au paragraphe 2, nous réduisons le problème à l'étude d'une fonction arithmétique sur les idéaux de $\mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}]$ ce qui nous conduit, au paragraphe 3, à l'étude de la distribution multiplicative de certains sous-ensembles d'idéaux. Le paragraphe 4 contient la définition et les premières propriétés de la fonction de densité $\sigma^{\mathbf{Z}}$ déjà mentionnée dans cette introduction. Au paragraphe 5, nous donnons un argument combinatoire qui a pour but d'adapter les méthodes d'Heath-Brown à notre problème. Les paragraphes 6 et 7 sont essentiellement consacrés à l'estimation des termes d'erreur qui apparaissent dans la discussion du paragraphe 5. Enfin, on illustre l'utilisation de la méthode dans le paragraphe 8 en l'appliquant pour démontrer les théorèmes 1.1 et 1.3.

Remerciements. L'auteur tient à remercier très chaleureusement sa directrice de thèse Cécile Dartyge pour son accompagnement tout au long de ce travail. Il exprime aussi sa sincère reconnaissance à Régis de La Bretèche pour ses nombreuses remarques autour de la rédaction de cet article.

2. FORMES CUBIQUES ET NORMES D'IDÉAUX DANS UN CORPS CUBIQUE

Dans toute la suite, on considère le corps de nombres cubique $\mathbf{K} := \mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$. Le lien étroit entre la forme cubique $X_1^3 + 2X_2^3$ et le corps \mathbf{K} est donné par la norme à travers l'identité

$$N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(n_1 + n_2\sqrt[3]{2}) = n_1^3 + 2n_2^3.$$

On note $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} := \mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}]$ l'anneau d'entiers de $\mathbf{Q}[\sqrt[3]{2}]$, $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ le monoïde des idéaux entiers non nuls de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ et $\varepsilon_0 := 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ l'unité fondamentale de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$. La fonction

zêta de Dedekind du corps \mathbf{K} , notée $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$, a pour résidu $\lambda_{\mathbf{K}} := \frac{\pi \log \varepsilon_0}{\sqrt{27}}$ en $s = 1$. De plus, \mathfrak{p} désignera un idéal premier au dessus de p et $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{l}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ et \mathfrak{s} des idéaux entiers.

2.1. Fonctions arithmétiques sur les idéaux. Dans toute la suite, une fonction $g : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{C}$ est dite multiplicative si $g(\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2) = g(\mathfrak{j}_1)g(\mathfrak{j}_2)$ dès que $(\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2) = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$. Des exemples de fonctions multiplicatives sur les idéaux sont donnés par la fonction de Möbius $\mu_{\mathbf{K}}$ et la fonction diviseur $\tau_{\mathbf{K}}$ sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$, définies comme les fonctions multiplicatives satisfaisant, pour tout idéal premier \mathfrak{p} et $k \geq 1$, la formule

$$\mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}^k) := \begin{cases} -1 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{p}^k) := k + 1.$$

On introduit également les fonctions $\Omega_{\mathbf{K}}$ et $\omega_{\mathbf{K}}$ qui comptent le nombre de facteurs premiers avec ou sans leur ordre de multiplicité, définies par

$$\Omega_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) := \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{j}} v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j}) \quad \text{et} \quad \omega_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) := \# \{\mathfrak{p}|\mathfrak{j}\}$$

où $v_{\mathfrak{p}}$ désigne la valuation \mathfrak{p} -adique. Étant donnée une fonction arithmétique g définie sur \mathbf{Z} , on lui associe naturellement une fonction définie sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ notée encore g par la formule $g(\mathfrak{j}) := g(N(\mathfrak{j}))$. Réciproquement, on associe à une fonction g définie sur $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ la fonction $g^{\mathbf{Z}}$ définie par

$$g^{\mathbf{Z}}(n) := \sum_{N(\mathfrak{j})=n} g(\mathfrak{j}).$$

Dans la preuve de [[HB01], Lemma 4.2], Heath-Brown énonce les inégalités suivantes, conséquences de la décomposition des idéaux en idéaux premiers,

$$(2.1) \quad \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \leq \tau(N(\mathfrak{j}))^3 \quad \text{et} \quad \# \{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(\mathfrak{j}) = n\} \leq \tau(n)^2.$$

où $\tau := \tau_{\mathbf{Q}}$ désigne la fonction diviseur standard.

Le lemme 4.6 de [HB01], reformulé ci-dessous dans un cas particulier, fournit une première estimation de l'ordre moyen de $\tau_{\mathbf{K}}$ sur les entiers de la forme $n_1 + n_2 \sqrt[3]{2}$.

Lemme 2.1 ([HB01], Lemma 4.6). *Soient $x_1 \geq x_2 \geq 2$ des réels. Pour tout entier $B \geq 0$, il existe une constante $c(B) \geq 0$ telle que*

$$(2.2) \quad \sum_{\substack{|n_1| \leq x_1, |n_2| \leq x_2 \\ n_2 \neq 0}} \left| \tau_{\mathbf{K}}(n_1 + n_2 \sqrt[3]{2})^B \right| \leq x_1 x_2 (\log(2x_1))^{c(B)}.$$

2.2. Notations et définition des idéaux admissibles. Comme observé dans le paragraphe 2 de [HBM02], les nombres premiers ramifiés dans $\mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}]$, à savoir 2 et 3, présentent un comportement particulier et nécessiteront un traitement spécifique. En particulier, on a la décomposition en facteurs premiers

$$\sqrt[3]{2}^3 \mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}] = 2\mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}] \quad \text{et} \quad (\sqrt[3]{2} + 1)^3 \mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}] = 3\mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}].$$

L'unicité de la décomposition en idéaux premiers dans les anneaux de Dedekind permet de définir, pour un idéal \mathfrak{j} et un entier m , la **composante y -friable** et la **composante y -criblée** par

$$\mathfrak{j}^-(y) := \prod_{p \leq y} \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j})}, \quad \mathfrak{j}^+(y) := \prod_{p > y} \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{j})},$$

$$m^-(y) := \prod_{p \leq y} p^{v_p(m)} \quad \text{et} \quad m^+(y) := \prod_{p > y} p^{v_p(m)}$$

où v_p désigne la valuation p -adique rationnelle. On introduit enfin la **composante p -adique** d'un idéal \mathfrak{j} , notée \mathfrak{j}_p , comme l'unique diviseur de \mathfrak{j} satisfaisant $N(\mathfrak{j}_p) = p^{v_p(N(\mathfrak{j}))}$, de sorte que $\mathfrak{j} = \prod_p \mathfrak{j}_p$.

Le comportement des idéaux premiers qui interviennent dans la décomposition des idéaux $(n_1 + n_2\sqrt[3]{2})$ est décrit par le lemme suivant, inspiré de [HB01].

Lemme 2.2. *Soient n_1 et n_2 deux entiers premiers entre eux, $p \geq 5$ un nombre premier, \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 deux idéaux premiers au dessus de p tels que \mathfrak{p}_1 et \mathfrak{p}_2 divisent $n_1 + n_2\sqrt[3]{2}$. Alors $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ et $N(\mathfrak{p}_1) = p$.*

De plus, $\sqrt[3]{4} \nmid n_1 + n_2\sqrt[3]{2}$ et $(\sqrt[3]{2} + 1)^2 \nmid n_1 + n_2\sqrt[3]{2}$.

Démonstration. La première assertion fait l'objet de [[HB01], Lemma 3.1].

Le second point se démontre en étudiant les solutions modulo 2 (resp. modulo 3) de la congruence $n_1^3 + 2n_2^3 \equiv 0 \pmod{4}$ (resp. $n_1^3 + 2n_2^3 \equiv 0 \pmod{9}$) sous la contrainte $(n_1, n_2, 2) = 1$ (resp. $(n_1, n_2, 3) = 1$). \square

Au regard de ce résultat, on dira qu'un idéal \mathfrak{j} est **admissible** si

- les valuations $v_{\sqrt[3]{2}}(\mathfrak{j})$ et $v_{\sqrt[3]{2}+1}(\mathfrak{j})$ valent 0 ou 1.
- pour tout premier $p \geq 5$, il existe un idéal premier \mathfrak{p} tel que $N(\mathfrak{p}) = p$ et un entier $k \geq 0$ tel que sa composante p -adique \mathfrak{j}_p s'écrit $\mathfrak{j}_p = \mathfrak{p}^k$.

2.3. Transformation des sommes $M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; X_1^3 + 2X_2^3)$ en sommes sur des idéaux admissibles. Soit $\mathcal{K} \subset [0, 1]^2$ un compact dont le bord est paramétré par un lacet de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Recouvrons $\mathcal{K} \cdot x$ en carrés de la forme

$$C(N_1, N_2) := \{(n_1, n_2) : x\eta N_i \leq n_i < x\eta(N_i + 1) \text{ pour } i = 1, 2\}$$

où $\eta := (\log x)^{-c_0}$ pour une constante $c_0 > 0$ que l'on déterminera *a posteriori* et $0 \leq N_i \leq \eta^{-1}$ pour $i = 1, 2$. Les éléments de \mathcal{K} mis à l'écart par cette approche contribuent de manière négligeable puisque l'on a

$$(2.3) \quad \#\{0 \leq N_1, N_2 \leq \eta^{-1} : \emptyset \subsetneq C(N_1, N_2) \cap \mathcal{K} \cdot x \subsetneq C(N_1, N_2)\} \ll \eta^{-1}.$$

Définissons

$$(2.4) \quad c(N_1, N_2) := \eta^3 \left(N_1^3 + 2N_2^3 \right) \text{ et } \mathcal{N}(\eta) := \left\{ \eta^{-3/4} \leq N_1, N_2 \leq \eta^{-1} : C(N_1, N_2) \subset \mathcal{K} \cdot x \right\}$$

de sorte que $c(N_1, N_2) > \eta^{3/4}$ lorsque $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$.

Considérons l'ensemble d'idéaux

$$(2.5) \quad \mathcal{A}(N_1, N_2) := \left\{ n_1 + n_2\sqrt[3]{2} : (n_1, n_2) \in C(N_1, N_2) \text{ et } (n_1, n_2) = 1 \right\}.$$

Le lemme suivant affirme que les entiers de \mathcal{A} sont tous distincts et que $c(N_1, N_2)x^3$ est la valeur moyenne de $n_1^3 + 2n_2^3$ sur $C(N_1, N_2)$.

Lemme 2.3. *On a, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $(n_1, n_2) \in C(N_1, N_2)$, l'estimation*

$$(2.6) \quad n_1^3 + 2n_2^3 = c(N_1, N_2)x^3 \left(1 + O\left(\eta^{\frac{1}{4}}\right) \right).$$

De plus, il existe $x_0 \geq 1$ tel que la relation

$$(2.7) \quad \begin{array}{ccc} \{(n_1, n_2) \in C(N_1, N_2) : (n_1, n_2) = 1\} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (n_1, n_2) & \mapsto & n_1 + n_2\sqrt[3]{2} \end{array}$$

induit une bijection dès que $x \geq x_0$.

Démonstration. La relation (2.6) est une conséquence de la formule de Taylor et de la définition (2.4).

Le caractère bijectif de la correspondance (2.7) est une conséquence de la démonstration de [[HBM02], Lemma 2.3]. \square

Compte tenu des observations précédentes, on peut majorer trivialement la contribution des $(n_1, n_2) \in C(N_1, N_2)$ avec $(N_1, N_2) \notin \mathcal{N}(\eta)$ pour écrire, pour toute fonction arithmétique h bornée par 1, l'estimation

$$(2.8) \quad M_h^{(1)}(\mathcal{K} \cdot x; X_1^3 + 2X_2^3) = \sum_{(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)} M_h(\mathcal{A}(N_1, N_2)) + O\left(\eta^{1/4} x^2\right)$$

où

$$(2.9) \quad M_h(\mathcal{A}) := \sum_{j \in \mathcal{A}} h(j).$$

Comme souligné dans l'introduction, on verra au paragraphe 5 que la relation (2.6) permet de comparer $M_h(\mathcal{A}(N_1, N_2))$ à la quantité plus régulière $M_{\sigma h}(\mathcal{B}(N_1, N_2))$ où σ est une fonction de densité qui sera introduite au paragraphe 4,

$$(2.10) \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}(N_1, N_2) := \left\{ j \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : c(N_1, N_2)x^3 < N(j) \leq c(N_1, N_2)x^3(1 + \eta) \right\}.$$

et

$$(2.11) \quad M_{\sigma h}(\mathcal{B}) := \sum_{j \in \mathcal{B}} \sigma(j)h(j).$$

3. SOMMES DE TYPE I ET NIVEAU DE RÉPARTITION

Dans cette partie, on étudie la distribution multiplicative des éléments de \mathcal{A} et \mathcal{B} définis par (2.5) et (2.10) en adaptant essentiellement les arguments du paragraphe 5 de [HB01].

Étant donné des entiers g_1 et g_2 et un idéal admissible \mathfrak{i} , considérons la somme d'exponentielles

$$E(g_1, g_2; \mathfrak{i}) := \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq N(\mathfrak{i}) \\ \mathfrak{i} | n_1 + n_2 \sqrt[3]{2}}} e\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{N(\mathfrak{i})}\right)$$

où $e(t) := \exp(2i\pi t)$. L'estimation d'une telle quantité constitue un ingrédient de base dans de nombreux travaux relatifs aux formes cubiques (voir par exemple le paragraphe 2.4 de [Gre71] ou le paragraphe 5 de [HB01]) et intervient fréquemment dans la majoration des sommes de Type I.

Une étude de $E(g_1, g_2; \mathfrak{i})$ s'initie en observant la relation de multiplicativité

$$(3.1) \quad E(g_1, g_2; \mathfrak{i}_1 \mathfrak{i}_2) = E(g_1, g_2; \mathfrak{i}_1) E(g_1, g_2; \mathfrak{i}_2)$$

valable dès que $(N(\mathfrak{i}_1), N(\mathfrak{i}_2)) = 1$. Conséquence du théorème des restes chinois, l'identité (3.1) permet essentiellement de ramener l'étude de $E(g_1, g_2; \mathfrak{i})$ à la démonstration du lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soient \mathfrak{p} un idéal premier non ramifié tel que $N(\mathfrak{p}) = p$ et $k \geq 1$. On a*

$$E(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \begin{cases} p^k e\left(-\frac{g_1 + g_2}{p^k}\right) & \text{si } \mathfrak{p}^k | g_2 - g_1 \sqrt[3]{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette formule reste vraie si $p \in \{2, 3\}$ et $k = 1$.

En vue d'établir ce résultat, nous étudions dans un premier temps la somme d'exponentielles

$$E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) := \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq N(\mathfrak{p}^k) \\ (n_1, n_2, N(\mathfrak{p})) = 1 \\ \mathfrak{p}^k | n_1 + n_2 \sqrt[3]{2}}} e\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{N(\mathfrak{p}^k)}\right).$$

Lemme 3.2. *Soient \mathfrak{p} un idéal premier non ramifié tel que $N(\mathfrak{p}) = p$ et $k \geq 1$. Si $(g_1, g_2, p) = 1$, alors on a*

$$(3.2) \quad E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \begin{cases} (p-1)p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^k | g_2 - g_1 \sqrt[3]{2}, \\ -p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-1} \nmid g_2 - g_1 \sqrt[3]{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, si $(g_1, g_2, p^k) = p^{k_0}$ avec $k_0 < k$, alors on a

$$(3.3) \quad E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = p^{k_0} E^{(1)}\left(\frac{g_1}{p^{k_0}}, \frac{g_2}{p^{k_0}}, \mathfrak{p}^{k-k_0}\right).$$

Les formules (3.2) et (3.3) restent valables lorsque $p \in \{2, 3\}$ et $k = 1$.

Démonstration. La preuve s'articule essentiellement autour d'un argument développé par Greaves [Gre70]. On remarque tout d'abord que

$$E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \sum_{1 \leq m \leq p^k} N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, m) e\left(\frac{m}{p^k}\right)$$

où $N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, m)$ désigne le nombre de couples (n_1, n_2) modulo p^k tels que

$$(n_1, n_2, p) = 1, \quad \mathfrak{p}^k | n_1 + n_2 \sqrt[3]{2} \quad \text{et} \quad g_1 n_1 + g_2 n_2 \equiv m \pmod{p^k}.$$

Pour tout couple (m, m') satisfaisant $(m, p^k) = (m', p^k)$, il existe un entier λ premier à p tel que $m' \equiv \lambda m \pmod{p^k}$. Ainsi, la relation

$$(n_1 \pmod{p^k}, n_2 \pmod{p^k}) \rightarrow (\lambda n_1 \pmod{p^k}, \lambda n_2 \pmod{p^k})$$

définit une bijection, d'où $N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, m) = N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, m')$. Il s'ensuit que

$$(3.4) \quad \begin{aligned} E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) &= \sum_{0 \leq j \leq k} N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^j) \sum_{\substack{1 \leq \lambda \leq p^{k-j} \\ (\lambda, p^{k-j})=1}} e\left(\frac{\lambda}{p^{k-j}}\right) \\ &= N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^k) - N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^{k-1}). \end{aligned}$$

Les rôles de g_1 et g_2 étant symétriques, l'hypothèse $(g_1, g_2, p) = 1$ permet de supposer sans perte de généralité que $(g_1, p) = 1$. Il s'ensuit que $N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^k)$ est égal au cardinal

$$\#\left\{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k, (n_2, p) = 1, \mathfrak{p}^k | n_1 + n_2 \sqrt[3]{2}, n_1 \equiv -g_2 n_2 g_1^{-1} \pmod{p^k}\right\}$$

où g_1^{-1} désigne la solution modulo p^k du système $g_1 g_1^{-1} \equiv 1 \pmod{p^k}$, d'où l'on déduit que

$$(3.5) \quad N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^k) = \begin{cases} (p-1)p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^k | g_2 - g_1 \sqrt[3]{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De manière similaire, puisque p n'est pas ramifié, on a

$$(3.6) \quad \begin{aligned} N^{(1)}(\mathfrak{p}^k, p^{k-1}) &= \#\left\{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k : (n_2, p) = 1, \mathfrak{p}^k | p^{k-1} - n_2(g_2 - g_1 \sqrt[3]{2}), \right. \\ &\quad \left. n_1 \equiv (p^{k-1} - g_2 n_2) g_1^{-1} \pmod{p^k}\right\} \\ &= \begin{cases} p^{k-1} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-1} \nmid g_2 - g_1 \sqrt[3]{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

La relation (3.2) est une simple conséquence de (3.4), (3.5) et (3.6).

Supposons à présent que $(g_1, g_2, p^k) = p^{k_0}$. Sous l'hypothèse $k_0 < k$, on a

$$(3.7) \quad E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \sum_{\substack{1 \leq n'_1, n'_2 < p^{k-k_0} \\ (n'_1, n'_2, p)=1}} e\left(\frac{\frac{g_1}{p^{k_0}}n'_1 + \frac{g_2}{p^{k_0}}n'_2}{p^{k-k_0}}\right) N(n'_1, n'_2, \mathfrak{p}^k, p^{k_0})$$

où $N(n'_1, n'_2, \mathfrak{p}^k, p^{k_0})$ désigne le nombre de couples (n_1, n_2) modulo p^k tels que

$$(n_1, n_2) \equiv (n'_1, n'_2) \pmod{p^{k-k_0}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}^k | n_1 + n_2 \sqrt[3]{2}.$$

Puisque \mathfrak{p} n'est pas ramifié, on a

$$(3.8) \quad \begin{aligned} N(n'_1, n'_2, \mathfrak{p}^k, p^{k_0}) &= \#\left\{0 \leq n_1^*, n_2^* < p^{k_0}, \mathfrak{p}^k | (n'_1 + n_1^* p^{k-k_0}) + (n'_2 + n_2^* p^{k-k_0}) \sqrt[3]{2}\right\} \\ &= \begin{cases} p^{k_0} & \text{si } \mathfrak{p}^{k-k_0} | n'_1 + n'_2 \sqrt[3]{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

La relation (3.3) est donc une conséquence directe de (3.7) et (3.8). \square

Preuve du lemme 3.1. Définissons les entiers k_0 et k_1 par les relations $(g_1, g_2, p^k) = p^{k_0}$ et $\mathfrak{p}^{k_1} \parallel (g_2 - g_1 \sqrt[3]{2})$, de sorte que $k_0 \leq k_1$. Au vu des hypothèses sur \mathfrak{p} , il vient

$$(3.9) \quad \begin{aligned} E(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) &= \sum_{0 \leq j \leq k} \sum_{\substack{1 \leq n_1, n_2 \leq p^k \\ (n_1, n_2, p^k) = p^j \\ \mathfrak{p}^k | n_1 + n_2 \sqrt[3]{2}}} e\left(\frac{g_1 n_1 + g_2 n_2}{p^k}\right) \\ &= 1 + \sum_{1 \leq j \leq k} E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^j). \end{aligned}$$

Si $1 \leq j \leq k_0$, on observe que

$$(3.10) \quad \begin{aligned} E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^j) &= \#\left\{1 \leq n_1, n_2 \leq p^j, (n_1, n_2, p) = 1, \mathfrak{p}^j | n_1 + n_2 \sqrt[3]{2}\right\} \\ &= (p-1)p^{j-1}. \end{aligned}$$

Dans le cas où $k_0 < j \leq k$, on applique le lemme 3.2 pour obtenir que

$$(3.11) \quad E^{(1)}(g_1, g_2; \mathfrak{p}^j) = \begin{cases} (p-1)p^{j-1} & \text{si } j \leq k_1, \\ -p^{k_1} & \text{si } j = k_1 + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La combinaison des formules (3.9), (3.10) et (3.11) entraîne alors la relation

$$(3.12) \quad E(g_1, g_2; \mathfrak{p}^k) = \begin{cases} p^k & \text{si } k \leq k_1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \square$$

3.1. Niveau de répartition de \mathcal{A} . Dans ce paragraphe, on cherche des estimations, en moyenne sur \mathfrak{i} , du cardinal de

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{i}} := \{j \in \mathcal{A} : \mathfrak{i} | j\}.$$

Dans le lemme 3.2 de [HB01], de tels résultats sont obtenus en moyenne sur les idéaux \mathfrak{i} sans facteur carré. Nous généralisons ici (voir le lemme 3.4 *infra*) la démonstration de Heath-Brown à des idéaux quelconques en y introduisant les estimations de sommes d'exponentielles du paragraphe précédent.

Omettant dans un premier temps la condition $(n_1, n_2) = 1$, étudions, pour tous réels $t \geq 1$ et x_1, x_2 , le cardinal de l'ensemble

$$(3.13) \quad \mathcal{S}(t, x_1, x_2; \mathfrak{i}) := \left\{(n_1, n_2) : x_i \leq n_i < x_i + t \text{ pour } i = 1, 2 \text{ et } \mathfrak{i} | n_1 + n_2 \sqrt[3]{2}\right\},$$

noté encore $\mathcal{S}(\mathfrak{i})$. En effectuant une partition de $\mathcal{S}(\mathfrak{i})$ en classes de congruence modulo $N(\mathfrak{i})$, on peut écrire (voir [[HB01], formule (5.2)]), pour tout idéal admissible \mathfrak{i} ,

$$(3.14) \quad \#\mathcal{S}(\mathfrak{i}) = \frac{E(0, 0; \mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})^2} (t^2 + O(t)) + O \left(\sum_{\substack{(g_1, g_2) \neq (0, 0) \\ |g_1|, |g_2| \leq \frac{N(\mathfrak{i})}{2}}} \frac{|E(g_1, g_2; \mathfrak{i})|}{N(\mathfrak{i})^2} \min \left(t, \frac{N(\mathfrak{i})}{|g_1|} \right) \min \left(t, \frac{N(\mathfrak{i})}{|g_2|} \right) \right).$$

Le terme d'erreur, relatif aux fréquences non nulles de (3.14), est estimé dans le lemme suivant, analogue de [[HB01], Lemma 5.1].

Lemme 3.3. *Soient $B \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément en $x_1, x_2 \geq 0$, $t \geq 1$ et $D \geq 1$, on ait*

$$\Sigma_1 := \sum_{\substack{\mathfrak{i} \text{ admissible} \\ D < N(\mathfrak{i}) \leq 2D}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^B \left| \#\mathcal{S}(\mathfrak{i}) - \frac{t^2}{N(\mathfrak{i})} \right| \ll (t + D)(\log(2D))^{c(B)}$$

Démonstration. La démonstration est calquée sur celle de [[HB01], Lemma 5.1], en utilisant cette fois-ci le lemme 3.1 pour estimer la contribution de $E(g_1, g_2; \mathfrak{i})$ lorsque $(g_1, g_2) \neq (0, 0)$. □

Il est possible de relier le cardinal de $\mathcal{S}(\mathfrak{i})$ à celui de $\mathcal{A}_{\mathfrak{i}}$ par un argument de convolution, à l'image de la formule (5.3) de [HB01]. Remarquons pour cela que la formule d'inversion de Möbius permet d'écrire la relation

$$(3.15) \quad \#\mathcal{A}_{\mathfrak{i}} = \sum_d \mu(d) \mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, \frac{N_1 \eta x}{d}, \frac{N_2 \eta x}{d}; \frac{\mathfrak{i}}{(\mathfrak{i}, d)} \right)$$

où \mathcal{S} est défini par (3.13). Au vu du lemme 3.3, on peut ainsi espérer approcher, pour tout idéal admissible \mathfrak{i} , le cardinal de $\mathcal{A}_{\mathfrak{i}}$ par

$$(3.16) \quad \sum_d \mu(d) \frac{\eta^2 x^2}{d^2 N \left(\frac{\mathfrak{i}}{(\mathfrak{i}, d)} \right)} = \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \frac{\alpha(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})}$$

où α est la fonction à support sur les idéaux admissibles définie par

$$(3.17) \quad \alpha(\mathfrak{i}) := \prod_{p|N(\mathfrak{i})} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{-1}.$$

Ceci suggère d'écrire

$$(3.18) \quad \#\mathcal{A}_{\mathfrak{i}} = \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \frac{\alpha(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + r(\mathcal{A}, \mathfrak{i})$$

où

$$(3.19) \quad |r(\mathcal{A}, \mathfrak{i})| \leq \sum_d \mu^2(d) \left| \#\mathcal{S} \left(\frac{\eta x}{d}, \frac{N_1 \eta x}{d}, \frac{N_2 \eta x}{d}; \frac{\mathfrak{i}}{(\mathfrak{i}, d)} \right) - \frac{\eta^2 x^2}{d^2 N \left(\frac{\mathfrak{i}}{(\mathfrak{i}, d)} \right)} \right|.$$

Le lemme suivant, extension de [[HB01], Lemma 3.2], montre que l'on a effectivement le niveau de répartition attendu.

Lemme 3.4. *Soient $B \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $1 \leq D \leq x^2$, on ait*

$$\Sigma_2 := \sum_{D < N(\mathfrak{i}) \leq 2D} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{i})^B |r(\mathcal{A}, \mathfrak{i})| \ll (x^{3/2} + xD^{1/2}) (\log x)^{c(B)}.$$

Démonstration. Puisque α est à support sur les idéaux admissibles et compte tenu du lemme 2.2, il suffit de considérer les idéaux \mathfrak{i} admissibles. Le résultat s'obtient en reproduisant la démonstration de [[HB01], Lemma 3.2], la condition $N(\mathfrak{i})$ sans facteur carré étant remplacée par \mathfrak{i} admissible et le lemme 3.3 fournissant l'analogie de [[HB01], Lemma 5.1]. \square

Considérons enfin le cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{i},d} := \left\{ \mathfrak{j} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{i}} : d \mid N(\mathfrak{j}\mathfrak{i}^{-1}) \right\}$$

où d est sans facteur carré. Suivant l'argument développé pour obtenir la formule (5.8) de [HB01], le principe d'inclusion-exclusion permet d'écrire la formule

$$(3.20) \quad \mu(d) \sum_{\substack{\mathfrak{j}_1 \mid (\mathfrak{j}_2, d) \\ d \mid N(\mathfrak{j}_1)}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \mid N(\mathfrak{j}_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Compte tenu du lemme 3.4, la relation (3.20) suggère d'écrire, pour tout idéal admissible \mathfrak{i} ,

$$(3.21) \quad \#\mathcal{A}_{\mathfrak{i},d} = \mu(d) \sum_{\substack{\mathfrak{j} \mid d \\ d \mid N(\mathfrak{j})}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \#\mathcal{A}_{\mathfrak{i}\mathfrak{j}} = \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \frac{\alpha(\mathfrak{i})\xi(\mathfrak{i}, d)}{N(\mathfrak{i})} + r(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, d)$$

où

$$(3.22) \quad \xi(\mathfrak{i}, d) = \mu(d) \sum_{\substack{\mathfrak{j} \mid d \\ d \mid N(\mathfrak{j})}} \frac{\mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})\alpha(\mathfrak{i}\mathfrak{j})}{\alpha(\mathfrak{i})N(\mathfrak{j})}$$

et

$$(3.23) \quad |r(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, d)| \leq \sum_{\substack{\mathfrak{j} \mid d \\ d \mid N(\mathfrak{j})}} \mu^2(d) \left| \#\mathcal{A}_{\mathfrak{i}\mathfrak{j}} - \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \frac{\alpha(\mathfrak{i}\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{i}\mathfrak{j})} \right|.$$

Il s'ensuit que, si \mathfrak{i} est admissible, la fonction arithmétique $\xi(\mathfrak{i}, \cdot)$ est multiplicative et à support sur les entiers sans facteur carré. On a notamment par (3.17) que

$$(3.24) \quad \xi(\mathfrak{i}, p) = \begin{cases} \frac{\nu_p}{1+p} & \text{si } p \nmid N(\mathfrak{i}), \\ \frac{1}{p} & \text{si } p \mid N(\mathfrak{i}) \text{ et } p \geq 5, \\ 0 & \text{si } p \mid N(\mathfrak{i}) \text{ et } p \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

Dans le cas où $\mathfrak{i} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, on pose $\xi(d) := \xi(\mathcal{O}_{\mathbf{K}}, d)$ pour tout entier $d \geq 1$. Les termes de reste $r(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, d)$ sont estimés directement à l'aide du lemme 3.4 dans le lemme suivant, analogue de [[HB01], Lemma 2.1].

Lemme 3.5. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, et $1 \leq D \leq x^2$, on ait*

$$\Sigma_3 := \sum_{\substack{\mathfrak{i}, d \\ D < N(\mathfrak{i})d \leq 2D}} \mu(d)^2 \tau(N(\mathfrak{i})d)^B |r(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, d)| \ll \left(x^{3/2} + xD^{1/2} \right) (\log x)^{c(B)}.$$

3.2. Niveau de répartition de \mathcal{B} . Par analogie à $\mathcal{A}_{\mathfrak{i}}$, on considère dans ce paragraphe le cardinal de l'ensemble

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{i}} := \{ \mathfrak{j} \in \mathcal{B} : \mathfrak{i} \mid \mathfrak{j} \}.$$

L'étude de la répartition des idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ se base sur le résultat suivant, dû à Weber.

Théorème 3.6 ([Web99]). *Uniformément pour $x \geq 1$, on a*

$$\#\{j \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : N(j) \leq x\} = \lambda_{\mathbf{K}} x + O(x^{2/3})$$

où $\lambda_{\mathbf{K}} := \frac{\pi \log \varepsilon_0}{\sqrt{27}}$.

On définit

$$\mathcal{B}_{i,d} := \{j \in \mathcal{B}_i : d | N(ji^{-1})\}.$$

L'estimation de Type I suivante, relative à $\mathcal{B}_{i,d}$, est une généralisation du lemme 2.2 de [HB01] qui suggère écrire

$$(3.25) \quad \#\mathcal{B}_{i,d} = \lambda_{\mathbf{K}} \frac{c(N_1, N_2) \eta x^3}{N(i)} \beta(d) + r(\mathcal{B}, i, d)$$

où β est la fonction multiplicative à support sur les entiers sans facteur carré définie par

$$(3.26) \quad \beta(p) = 1 - \prod_{p|p} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right).$$

Lemme 3.7. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B) \geq 0$ tel que, uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $D \geq 1$ et i un idéal de $\mathcal{J}(\mathbf{K})$, on ait*

$$\sum_{D < d \leq 2D} \tau(d)^B \mu(d)^2 |r(\mathcal{B}, i, d)| \ll \frac{x^2 D^{1/3}}{N(i)^{2/3}} (\log(2D))^{c(B)}.$$

4. LA FONCTION DE DENSITÉ σ

4.1. Définition et premières propriétés. Étant donné un sous-ensemble \mathcal{C} de \mathbf{N} et un idéal i , on considère le cardinal

$$(4.1) \quad S(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}) := \#\{q : iq \in \mathcal{A} \text{ et } N(q) \in \mathcal{C}\}.$$

En général, on ne peut espérer évaluer $S(\mathcal{A}, i, \mathcal{C})$ en utilisant uniquement les majorations de sommes de Type I obtenues dans la partie précédente en raison de l'incidence du phénomène de parité, mentionné en introduction.

À la suite de Heath-Brown, on introduit le cardinal

$$(4.2) \quad S(\mathcal{B}, i, \mathcal{C}) := \#\{q : iq \in \mathcal{B} \text{ et } N(q) \in \mathcal{C}\}$$

et l'on cherche à montrer l'existence d'une constante $\sigma_0 > 0$ et d'une fonction de densité $\sigma : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{R}$ telles que l'approximation

$$(4.3) \quad S(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sigma_0 \eta}{c(N_1, N_2) x} \sigma(i) S(\mathcal{B}, i, \mathcal{C})$$

soit vraie, en moyenne sur les idéaux i et pour une certaine classe d'ensembles d'entiers \mathcal{C} inclus dans l'ensemble criblé

$$(4.4) \quad \mathcal{C}^-(x^\tau) := \{d : P^-(d) > x^\tau\}$$

où $\tau := (\log \log x)^{-\varpi_0}$ avec ϖ_0 dans $]0, 1[$ fixé.

Dans ce paragraphe, on obtient des valeurs heuristiques pour σ_0 et $\sigma(i)$ en étudiant $S(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^-(x^\tau))$ et $S(\mathcal{B}, i, \mathcal{C}^-(x^\tau))$. Au vu des estimations de sommes de Type I contenues dans les lemmes 3.5 et 3.7, l'application d'un lemme fondamental de crible - démarche effectuée en détail au paragraphe 6 - suggère que l'on a

$$(4.5) \quad S(\mathcal{A}, i, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \frac{\alpha(i)}{N(i)} \prod_{p \leq x^\tau} (1 - \xi(i, p))$$

et

$$(4.6) \quad S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_{\mathbf{K}} c(N_1, N_2) \frac{\eta x^3}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq x^\tau} (1 - \beta(p)).$$

L'étude de la singularité de $\zeta_{\mathbf{K}}(s)$ en $s = 1$ permet d'obtenir la formule (6.8) de [HB01], uniforme pour $t \geq 2$,

$$(4.7) \quad \prod_{p \leq t} (1 - \beta(p)) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \lambda_{\mathbf{K}}^{-1} \left(1 + O((\log t)^{-2})\right).$$

La formule (3.24) et le théorème des idéaux premiers impliquent de même l'estimation suivante, valide uniformément pour $t \geq 2$,

$$(4.8) \quad \prod_{p \geq t} \left(1 - \frac{\nu_p}{1+p}\right) \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \left(1 + O((\log t)^{-2})\right),$$

d'où l'on déduit la convergence du produit eulérien

$$(4.9) \quad \sigma_0 := \prod_p \left(1 - \frac{\nu_p}{1+p}\right) \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

On observe également que la formule (3.24) implique les estimations suivantes, uniformes pour $N(\mathbf{i}) \leq 3x^3$,

$$(4.10) \quad \prod_{\substack{p > x^\tau \\ p|N(\mathbf{i})}} (1 - \xi(\mathbf{i}, p)) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{\substack{p > x^\tau \\ p|N(\mathbf{i})}} (1 - \xi(p)) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right).$$

Sous réserve d'établir les formules (4.5) et (4.6), il s'ensuit alors la formule

$$(4.11) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \sim \eta^2 x^2 \sigma_0 \frac{\sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

avec

$$(4.12) \quad \sigma(\mathbf{i}) = \alpha(\mathbf{i}) \prod_{p|N(\mathbf{i})} (1 - \xi(\mathbf{i}, p)) (1 - \xi(p))^{-1}.$$

On observe en particulier, pour tout premier $p \geq 5$ et $k \geq 1$, la formule

$$(4.13) \quad \sigma^{\mathbf{Z}}(p^k) = \nu_p \left(\frac{p-1}{p+1}\right) \left(1 - \frac{\nu_p}{1+p}\right)^{-1} = \nu_p + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Finalement, au vu de la formule asymptotique (4.7), on a également

$$(4.14) \quad S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \sim c(N_1, N_2) \frac{\eta x^3}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

ce qui justifie la pertinence de (4.3) lorsque $\mathcal{C} = \mathcal{C}^-(x^\tau)$.

4.2. Ordres moyens de σh . Étudions l'ordre moyen $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$ défini par la formule (2.11) pour toute fonction arithmétique $h \in \mathcal{M}(w)$ où w est un complexe de module 1, c'est-à-dire h multiplicative, à valeur dans le disque unité et satisfaisant $h(p) = w$ pour tout premier p . D'une part, la preuve du théorème 1.3 repose en partie sur une estimation asymptotique de $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$. D'autre part, les majorations de $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$ que nous développons ici seront utilisées à de nombreuses reprises dans les parties 6 et 7 *infra*.

La formule (4.13) entraîne que, uniformément pour p premier et $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$, on a

$$(4.15) \quad \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(p)}{p^s} = \sum_{\mathfrak{p}|p} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} + O\left(\frac{1}{p^{2\operatorname{Re}(s)}}\right).$$

Il suit alors de (4.13) que la série $\mathcal{H}(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-w}$ où

$$(4.16) \quad \mathcal{H}(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(n)h(n)}{n^s}$$

est prolongeable holomorphiquement dans le domaine $\operatorname{Re}(s) > 1 - c(\log(|\operatorname{Im}(s)| + 1))^{-1}$ pour une constante $c > 0$ convenable.

La méthode de Selberg-Delange (voir [[Ten08], théorème 5.2] et [[HTW08], paragraphe 1.3]) permet d'établir le résultat central de ce paragraphe, à savoir la formule asymptotique de $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$ contenue dans la proposition suivante.

Proposition 4.1. *On a, uniformément pour w un nombre complexe de module 1, $h \in \mathcal{M}(w)$, $x \geq 2$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$,*

$$(4.17) \quad M_{\sigma h}(\mathcal{B}) = c(N_1, N_2)\eta x^3 (3 \log x)^{w-1} \left(\frac{\sigma(h)}{\Gamma(w)} + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right) \right)$$

où

$$(4.18) \quad \sigma(h) := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^w \left(1 + (1 - \xi(p))^{-1} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{h(p^k)}{p^k} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \alpha(\mathbf{i}) (1 - \xi(\mathbf{i}, p))\right)\right)$$

et $\alpha(\cdot)$ et $\xi(\cdot, \cdot)$ sont définis respectivement par (3.17) et (3.22).

On a en particulier $\sigma(\mathbf{1}) = \frac{6}{\pi^2 \sigma_0}$ et, uniformément pour $x \geq 3$,

$$(4.19) \quad \sum_{N(\mathbf{i}) \leq x} \frac{\sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} = \frac{6}{\pi^2 \sigma_0} \log x + O(\log \log x).$$

Démonstration. Au vu de ce qui précède, on peut appliquer la méthode de Selberg-Delange à $\sigma^{\mathbf{Z}}h$. Les formules (1.17) et (1.18) de [HTW08] entraînent alors que l'on a, pour tout entier $N \geq 0$ fixé et uniformément en $|w| = 1$, $h \in \mathcal{M}(w)$ et $x \geq 2$,

$$(4.20) \quad \sum_{n \leq x} \sigma^{\mathbf{Z}}(n)h(n) = x(\log x)^{w-1} \left(\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_k(h)}{\Gamma(w-k)(\log x)^k} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{N+1}}\right) \right)$$

où les $\lambda_k(h)$ sont définis à l'aide du développement de Taylor en $s = 1$

$$(4.21) \quad \frac{(s-1)^w \mathcal{H}(s)}{s} := \sum_{k \geq 0} \lambda_k(h)(s-1)^k.$$

En particulier, on a

$$(4.22) \quad \lambda_0(h) = \lambda_{\mathbf{K}}^w \mathcal{H}(s)\zeta_{\mathbf{K}}(s)^{-w}|_{s=1} = \sigma(h),$$

ce qui permet de déduire (4.17) en prenant N assez grand devant c_0 , compte tenu de l'estimation

$$\log(c(N_1, N_2)x^3) = 3 \log x \left(1 + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right)\right).$$

Avec le choix $h(n) = 1$ pour tout entier $n \geq 1$, une sommation par parties entraîne directement la formule uniforme en $x \geq 3$ suivante

$$(4.23) \quad \sum_{N(\mathbf{i}) \leq x} \frac{\sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} = \sigma(\mathbf{1}) \log x + O(\log \log x).$$

En utilisant la définition (3.22) et la formule d'inclusion-exclusion (3.20), on observe que, pour tout premier p , on a

$$(4.24) \quad \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \frac{\alpha(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} (1 - \xi(\mathbf{i}, p)) = - \sum_{k \geq 1} \sum_{N(\mathbf{i})=p^k} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{i}) \frac{\alpha(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} = \xi(p).$$

Compte tenu des définitions (4.18) et (4.9), il s'ensuit que $\sigma(\mathbf{1}) = \frac{6}{\pi^2 \sigma_0}$. □

Considérons à présent le cas $h = 1_{S(y)}$, où $S(y)$ désigne l'ensemble des entiers y -friables. Dans la proposition suivante - application de la méthode de Selberg-Delange friable développée par Hanrot, Tenenbaum et Wu [HTW08] - nous obtenons une estimation de $M_{\sigma 1_{S(y)}}(\mathcal{B})$, étape essentielle en vue de démontrer le théorème 1.1.

Proposition 4.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et uniformément pour $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $x \geq 3$ et $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right) \leq y \leq 3x^3$, on a*

$$(4.25) \quad M_{\sigma 1_{S(y)}}(\mathcal{B}) = \frac{6}{\pi^2 \sigma_0} c(N_1, N_2) \eta x^3 \rho(3u) \left(1 + O\left(\log \log x \frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right)$$

où $u := \frac{\log x}{\log y}$.

Démonstration. Observons tout d'abord que, d'après (4.15), la série de Dirichlet engendrée par $\sigma^{\mathbf{Z}}$ est de la forme

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(n)}{n^s} = \mathcal{G}(s) \zeta_{\mathbf{K}}(s)$$

où $\mathcal{G}(s) := \sum_n \frac{g(n)}{n^s}$ est développable en un produit eulérien absolument convergent pour $\operatorname{Re}(s) > 1/2$. On peut alors reproduire *mutatis mutandis* les arguments du paragraphe 2.3 de [HTW08] en remplaçant $\varrho_F(n)$ par $\sigma^{\mathbf{Z}}(n)$, pour obtenir, pour tout $\varepsilon > 0$, l'estimation

$$\sum_{P^+(n) \leq y} \frac{g(n)}{n^s} = \mathcal{G}(s) + O\left(\frac{1}{y^{1/2-\varepsilon}}\right)$$

uniformément dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geq 1/2 + \varepsilon$. La fonction arithmétique $\sigma^{\mathbf{Z}}$ satisfait donc les hypothèses (1.7) et (1.10) de [HTW08], ce qui permet d'appliquer [[HTW08], Théorèmes 1.1 et 1.2]. On en déduit, pour tout N fixé, l'existence de $C_N > 0$ tel que l'on ait, uniformément en

$$x \geq 3, \quad \exp\left((\log \log x)^{5/3+\varepsilon}\right) \leq y \leq x, \quad \left(0 < u < N+1 \Rightarrow u - [u] > C_N \frac{\log \log y}{\log y}\right),$$

la formule suivante

$$(4.26) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ P^+(n) \leq y}} \sigma^{\mathbf{Z}}(n) = x \left(\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_k(\mathbf{1}) \rho^{(k)}(u)}{(\log y)^k} + O\left(\rho(u) \left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)^{N+1}\right) \right)$$

où les $\lambda_k(\mathbf{1})$ sont définis par (4.21).

Compte tenu de l'estimation, valide pour tout $j \geq 0$ et uniforme en $0 \leq v \leq u$ suivante

$$(4.27) \quad \rho^{(j)}(u-v) \ll \log(u+1)^j \rho(u) \exp(O(v \log(u+1)))$$

établie à la suite de [[Ten08], p. 507], le théorème des accroissements finis permet de montrer l'existence de N_0 (dépendant de c_0) et $C_{N_0} > 0$ tel que l'on ait, sous les conditions précédentes et uniformément pour $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ satisfaisant

$$(4.28) \quad \left(0 < u_{N_1, N_2} < N_0 + 1 \Rightarrow u_{N_1, N_2} - [u_{N_1, N_2}] > C_{N_0} \frac{\log \log y}{\log y}\right),$$

où $u_{N_1, N_2} := \frac{\log(c(N_1, N_2)x^3)}{\log y}$, la relation

$$(4.29) \quad \begin{aligned} M_{\sigma 1_{S(y)}}(\mathcal{B}) &= \frac{6}{\pi^2 \sigma_0} c(N_1, N_2) \eta x^3 \rho(3u_{N_1, N_2}) \left(1 + O\left(\frac{\log(u_{N_1, N_2} + 1)}{\log y}\right)\right) \\ &= \frac{6}{\pi^2 \sigma_0} c(N_1, N_2) \eta x^3 \rho(3u) \left(1 + O\left(\log \log x \frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right). \end{aligned}$$

Pour conclure la preuve de la proposition, il s'agit d'évaluer $M_{\sigma_{1S(y)}}(\mathcal{B})$ pour les couples (N_1, N_2) ne vérifiant pas (4.28). Il suffit alors d'observer que

$$M_{\sigma_{1S(y_1)}}(\mathcal{B}) \leq M_{\sigma_{1S(y)}}(\mathcal{B}) \leq M_{\sigma_{1S(y_2)}}(\mathcal{B})$$

dès que $y_1 \leq y \leq y_2$ et de remarquer que (4.29) entraîne

$$M_{\sigma_{1S(y_1)}}(\mathcal{B}) = M_{\sigma_{1S(y_2)}}(\mathcal{B}) = \frac{6}{\pi^2 \sigma_0} c(N_1, N_2) \eta x^3 \rho(3u) \left(1 + O \left(\log \log x \frac{\log(u+1)}{\log y} \right) \right)$$

avec les choix $y_1 = y(\log x)^{-c_1}$ et $y_2 = y(\log x)^{c_2}$ où c_1, c_2 sont des constantes suffisamment grandes. \square

5. DESCRIPTION DE LA MÉTHODE

Rappelons le choix de paramètre $\tau := (\log \log x)^{-\varpi_0}$ avec ϖ_0 fixé dans $]0, 1[$ effectué précédemment. Dans l'article [HB01], Heath-Brown réalise le tour de force de montrer la validité de la formule (avec les notations (4.1) et (4.2))

$$(5.1) \quad S(\mathcal{A}, \mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \mathcal{C}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sigma_0 \eta}{c(N_1, N_2)x} S(\mathcal{B}, \mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \mathcal{C}),$$

pour certains ensembles \mathcal{C} inclus dans

$$(5.2) \quad \mathcal{C}(m, n) := \left\{ rs : \Omega(r) = \omega(r) = m \text{ et } \Omega(s) = \omega(s) = n, P^-(rs) > x^\tau, x^{1+\tau} \leq s \leq x^{\frac{3}{2}-\tau} \right\}.$$

En adaptant les arguments de Heath-Brown, on montrera au paragraphe 7 que la formule (5.1) se généralise sous la forme

$$(5.3) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sigma_0 \eta}{c(N_1, N_2)x} \sigma(\mathbf{i}) S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$$

uniformément pour les ensembles $E \in \mathcal{E}(m+n)$ avec la définition de $\mathcal{E}(m+n)$ suivante. Pour tout entier k , on désigne par $\mathcal{E}(k)$ l'ensemble des parties de \mathbf{N} qui s'écrivent comme intesection d'ensembles de la forme

$$(5.4) \quad E(k) = E(k; y, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \prec) := \left\{ m : \Omega(m) = \omega(m) = k, yP^{(\vec{\alpha})}(m) \prec P^{(\vec{\beta})}(m) \right\}$$

où $y > 0$, \prec désigne l'ordre $<$ ou \leq , $\vec{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_{l_1})$ avec $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_{l_1}$ et $\vec{\beta} := (\beta_1, \dots, \beta_{l_2})$ avec $1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_{l_2}$ et les termes $P^{(\vec{\alpha})}(m)$ et $P^{(\vec{\beta})}(m)$ sont les produits

$$(5.5) \quad P^{(\vec{\alpha})}(m) := P^{(\alpha_1)}(m) \dots P^{(\alpha_{l_1})}(m) \quad \text{et} \quad P^{(\vec{\beta})}(m) := P^{(\beta_1)}(m) \dots P^{(\beta_{l_2})}(m),$$

les $P^{(i)}(m)$ étant définis par la décomposition de m en facteurs premiers

$$m = P^{(1)}(m) \dots P^{(\Omega(m))}(m) \quad \text{avec} \quad P^{(i)}(m) \leq P^{(i+1)}(m)$$

avec la convention $P^{(\vec{\alpha})}(m) = 1$ (resp. $P^{(\vec{\beta})}(m) = 1$) si $l_1 = 0$ (resp. $l_2 = 0$)³. De tels ensembles apparaîtront naturellement au cours de l'argument qui conduit à la proposition 5.2 *infra*.

Soient w un complexe de module 1, y_1, y_2 deux réels tels que $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$ et $y_2 > x^\tau$. Soit h un élément de $\mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, c'est-à-dire une fonction multiplicative bornée par 1 satisfaisant les conditions suivantes :

- (1) h est à support sur les entiers m tels que $P^-(m) > y_1$ et $P^+(m) \leq y_2$,
- (2) pour tout premier p dans l'intervalle $]y_1, y_2]$, on a $h(p) = w$.

3. On peut ainsi considérer les inégalités du type $y \prec P^{(\vec{\alpha})}(m)$ et $P^{(\vec{\alpha})}(m) \prec y$.

Dans la suite de ce paragraphe, on établit un raisonnement combinatoire qui ramène le problème de l'estimation de $M_h(\mathcal{A})$ (resp. $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$) à l'estimation des cardinaux $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$ (resp. $S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$) pour des ensembles $E \in \mathcal{E}(m+n)$ en vue d'utiliser (5.3).

Soit $\varpi_1 \in]0, \varpi_0[$. On introduit un paramètre $\tau_1 \geq (\log \log x)^{-\varpi_1}$ suffisamment petit qui sera rendu explicite dans les applications du paragraphe 8, en vue de contrôler la contribution des idéaux \mathbf{j} satisfaisant $N(\mathbf{j}^+(x^\tau)) \geq x^{\tau_1}$.

Considérons, pour un idéal admissible \mathbf{j} de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ donné, la décomposition de sa partie x^τ -criblée en produits d'idéaux premiers

$$(5.6) \quad \mathbf{j}^+(x^\tau) = \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_k, \quad N(\mathbf{p}_i) \leq N(\mathbf{p}_{i+1}), \quad i \in \{1, \dots, k-1\}.$$

On effectue une partition de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ sous la forme $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$ où les $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}$ sont des ensembles d'idéaux définis par des conditions sur la norme de \mathbf{p}_k et \mathbf{p}_{k-1} , à savoir

$$\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)} := \{\mathbf{j} : x^2 < N(\mathbf{p}_k)\}, \quad \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)} := \{\mathbf{j} : x^{3/2} < N(\mathbf{p}_k) \leq x^2\},$$

$$\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)} := \{\mathbf{j} : x < N(\mathbf{p}_k) \leq x^{3/2}\}, \quad \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)} := \{\mathbf{j} : N(\mathbf{p}_k) \leq x \text{ et } x^{3/2} < N(\mathbf{p}_{k-1}\mathbf{p}_k)\}$$

$$\text{et } \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)} := \{\mathbf{j} : N(\mathbf{p}_k) \leq x \text{ et } N(\mathbf{p}_{k-1}\mathbf{p}_k) \leq x^{3/2}\}.$$

Il s'ensuit que

$$M_h(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^5 M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}) \quad \text{avec} \quad M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}) := \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}} h(\mathbf{j}).$$

Pour $i \in \{2, \dots, 5\}$, on peut remplacer le terme $M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)})$ par une formule où interviennent des cardinaux de la forme $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(m, n))$ où $\mathcal{C}^{(i)}(m, n) \subset \mathcal{C}(m, n)$.

Lemme 5.1. *Uniformément en $x \geq 2$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, on a*

$$(5.7) \quad M_h(\mathcal{A}) = M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}) + \sum_{i=2}^5 \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathbf{i}) \sum_{m,n} w^{m+n} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(m, n)) \\ + O(\Theta(\mathcal{A}; |h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|))$$

où

$$(5.8) \quad \mathcal{I} := \{m \in \mathbf{Z} : m \leq x^{\tau_1} \text{ et } P^+(m) \leq x^\tau\},$$

$$(5.9)$$

$$\mathcal{C}^{(2)}(m, n) := \begin{cases} \{rs \in \mathcal{C}(m, n) : y_1 < P^-(s), P^+(s) \leq P^-(r), P^+(r) \leq y_2\} & \text{si } m = 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(5.10)$$

$$\mathcal{C}^{(3)}(m, n) := \begin{cases} \{rs \in \mathcal{C}(m, n) : y_1 < P^-(r), P^+(r) \leq P^-(s), P^+(s) \leq y_2\} & \text{si } n = 1, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(5.11)$$

$$\mathcal{C}^{(4)}(m, n) := \begin{cases} \{rs \in \mathcal{C}(m, n) : y_1 < P^-(s), P^+(s) \leq P^-(r), \\ P^+(r) \leq \max(x^{1-\tau_1}, y_2)\} & \text{si } m = 2, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

(5.12)

$$\mathcal{C}^{(5)}(m, n) := \left\{ rs \in \mathcal{C}(m, n) : y_1 < P^-(r), P^+(r) \leq P^-(s), P^+(s) \leq \max(x^{1-\tau_1}, y_2), \frac{s}{P^-(s)} < x^{1+\tau} \right\}$$

$$\Theta(\mathcal{A}; |h|, x^\tau, x^{\tau_1}) := \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ N(j^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(j)|,$$

$$\Delta_0(\mathcal{A}; |h|) := \sum_{\substack{j \in \mathcal{A} \\ N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})}} |h(j)| \quad \text{avec} \quad \Upsilon(z) := \bigcup_p \bigcup_{\substack{k \geq 2 \\ p^k > z}} p^k \mathbf{Z}.$$

$$\Delta_1(\mathcal{A}; |h|) := \max_{Y \geq x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathfrak{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h(i)| S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-\left(\max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2-\tau_1}))\right)\right).$$

et

$$\Delta_2(\mathcal{A}; |h|) := \max_{Y \geq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{\substack{x^{1/2} \leq N(\mathfrak{p}_1) \leq N(\mathfrak{p}_2) \\ Y \leq N(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2) \leq Yx^{\tau_1}}} \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} |h(i)| S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2, \mathcal{C}^-\left(\max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2}))\right)\right).$$

Démonstration. En isolant les idéaux j de \mathcal{A} tels que $j^+(x^\tau)$ possède au moins un facteur carré, on peut écrire, pour tout $i \in \{2, \dots, 5\}$,

$$M_h\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}\right) = \sum_{P^+(N(i)) \leq x^\tau} h(i) \sum_{k \geq 0} w^k S\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(i)}, \mathfrak{i}, (*_k) \cap \mathcal{C}^-(x^\tau)\right) + O(\Delta_0(\mathcal{A}; |h|))$$

où

$$(*_k) := \left\{ m : \Omega(m) = \omega(m) = k, y_1 < P^-(m), P^+(m) \leq y_2 \right\}$$

Soit j un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}$. En utilisant la décomposition (5.6) et sous l'hypothèse supplémentaire que $N(j^-(x^\tau)) \leq x^{\tau_1}$, l'encadrement

$$x^{3/2} < N(\mathfrak{p}_k) \leq x^2$$

entraîne largement que

$$x^{1-2\tau_1} \ll N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1}) \ll x^{3/2}.$$

On peut majorer par $\Delta_1(\mathcal{A}; |h|)$ la contribution des idéaux qui vérifient $x^{3/2} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2+\tau_1}$ ou $x^{2-2\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^2$ et, en posant $r = N(\mathfrak{p}_k)$, $s = N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1})$ et $n = k-1$, il suit

$$M_h\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}\right) = \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} h(i) \sum_{n \geq 0} w^{1+n} S\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(2)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(2)}(1, n)\right) + O(\Theta(\mathcal{A}; |h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|)).$$

De même, on peut écrire, en posant maintenant $s = N(\mathfrak{p}_k)$, la formule

$$M_h\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)}\right) = \sum_{N(i) \in \mathcal{I}} h(i) \sum_{m \geq 0} w^{m+1} S\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(3)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(3)}(m, 1)\right) + O(\Theta(\mathcal{A}; |h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|))$$

où la contribution des idéaux satisfaisant $x \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{1+\tau}$ ou $x^{3/2-\tau} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2}$ est là encore majorée par $\Delta_1(\mathcal{A}; |h|)$.

D'autre part, en écrivant $s = N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-2})$, il vient

$$M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)}) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{n \geq 0} w^{2+n} S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(4)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(4)}(2, n)) \\ + O(\Theta(\mathcal{A}; |h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|))$$

où l'on a majoré la contribution des idéaux vérifiant $x^{1-\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_k) \leq x$ par $\Delta_1(\mathcal{A}; |h|)$ et celle des idéaux satisfaisant $x^{1/2} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}) < N(\mathfrak{p}_k)$ ou $x^{3/2} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \leq x^{3/2+\tau_1}$ par $\Delta_2(\mathcal{A}; |h|)$.

Considérons enfin $\mathfrak{j} \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$. Si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) \geq x^{1+\tau}$, alors on a trivialement

$$x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{3/2}$$

et l'on majore la contribution des idéaux $x^{3/2-\tau} \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{3/2}$ par $\Delta_2(\mathcal{A}; |h|)$. D'autre part, si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{1+\tau}$ et $N(\mathfrak{p}_{k-2}) \leq x^{1/2-2\tau}$, alors l'hypothèse de majoration $N(\mathfrak{j}^-(x^\tau)) \leq x^{\tau_1}$ implique l'existence d'un indice $j \geq 2$ tel que

$$N(\mathfrak{p}_{k-j+1} \cdots \mathfrak{p}_k) < x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_{k-j} \cdots \mathfrak{p}_k) < x^{3/2-\tau}.$$

Enfin, si $N(\mathfrak{p}_{k-1}\mathfrak{p}_k) < x^{1+\tau}$ et $N(\mathfrak{p}_{k-2}) > x^{1/2-2\tau}$, on a les inégalités

$$x^{1/2-2\tau} < N(\mathfrak{p}_{k-2}) \leq N(\mathfrak{p}_{k-1}) \leq N(\mathfrak{p}_k) < x^{1/2+3\tau}$$

ce qui permet de majorer la contribution de tels idéaux par $\Delta_1(\mathcal{A}; |h|)$. En posant $s = N(\mathfrak{p}_{k-j} \cdots \mathfrak{p}_k)$, on en déduit que

$$M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_{m, n \geq 0} w^{m+n} S(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(5)}(m, n)) \\ + O(\Theta(\mathcal{A}; |h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|)).$$

□

Le traitement de $M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)})$ nécessite davantage de travail pour faire apparaître des sous-ensembles de $\mathcal{C}(m, n)$. Au vu du lemme 2.3, on a

$$N(\mathfrak{p}_k) = \frac{c(N_1, N_2)x^3}{N(\mathfrak{j}^-(x^\tau)\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1})} \left(1 + O(\eta^{1/4})\right)$$

ce qui suggère de remplacer la condition $N(\mathfrak{p}_k) \leq y_2$ par l'inégalité

$$N(\mathfrak{j}^-(x^\tau)\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1}) \geq \frac{c(N_1, N_2)x^3}{y_2}.$$

Dans la mesure où les éléments de $\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}$ satisfont $N(\mathfrak{p}_k) \geq x^2$, on peut écrire, en posant $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{k-1}$,

$$M_h(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}) = \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{i}, k} \pi(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) \\ + O(\Theta(\mathcal{A}; |h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_3(\mathcal{A}; |h|))$$

où la sommation $\sum^{\mathfrak{i}, k}$ porte sur les idéaux \mathfrak{q} à $k-1$ facteurs premiers satisfaisant $\frac{c(N_1, N_2)x^3}{y_2 N(\mathfrak{i})} \leq N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1}$ et $P^-(N(\mathfrak{q})) > \max(x^\tau, y_1)$, et

$$\pi(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \# \{\mathfrak{p} \text{ premier} : \mathfrak{l}\mathfrak{p} \in \mathcal{A}\}.$$

Pour estimer $\pi(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$, on reproduit le raisonnement combinatoire à l'origine du lemme 3.4 de [HB01]. En utilisant la notation (4.4), on peut itérer l'identité de Buchstab

$$(5.13) \quad S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}, \mathcal{C}^-(z_1)) - S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}, \mathcal{C}^-(z_2)) = \sum_{z_1 < N(\mathfrak{p}) \leq z_2} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))) \\ + O\left(\sum_{z_1 < N(\mathfrak{p}) \leq z_2} \sum_{k \geq 2} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}^k, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p})))\right)$$

pour obtenir la formule suivante, analogue des formules (4.3) et (4.4) de [HBM02],

$$\pi(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) = S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}, \mathcal{C}^-(3x^{3/2})) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) + \sum_{n \geq 1} (-1)^n U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) \\ - S_1(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) - S_2(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) + O\left(\#\{j \in \mathcal{A}_\mathfrak{l} : N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})\}\right)$$

où

$$S_1(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{x^{1-\tau} \leq N(\mathfrak{p}) < x^{1+\tau}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))),$$

$$S_2(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{x^{3/2-\tau} < N(\mathfrak{p}) \leq x^{3/2+\tau}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))),$$

$$(5.14) \quad T^{(0)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := S(\mathcal{A}, \mathfrak{l}, \mathcal{C}^-(x^\tau)), \quad U^{(1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}))),$$

$$(5.15) \quad T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \dots < N(\mathfrak{p}_n) < x^{1-\tau} \\ N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n) < x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}_1 \dots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \quad \text{si } n \geq 1$$

et

$$U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \dots < N(\mathfrak{p}_n) < x^{1-\tau} \\ N(\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n) < x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{lp}_1 \dots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1))) \quad \text{si } n \geq 2.$$

Le niveau de crible x^τ impliqué dans la définition de $T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$ étant suffisamment petit, on étudiera la contribution de ces termes, en moyenne sur les idéaux \mathfrak{l} tels que $N(\mathfrak{l}) \leq x^{1-3\tau_1}$, au lemme 6.7 en utilisant le crible de Selberg.

Si $n \geq 4$, les conditions

$$x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) < \dots < N(\mathfrak{p}_n) < x^{1-\tau}$$

et

$$N(\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n) < x^{1+\tau} \leq N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)$$

entraînent que

$$N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}.$$

On peut évaluer la contribution de $U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{iq})$ lorsque $n \geq 4$ ou $n = 1$ avec $N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}$ à l'aide de (5.3) puisque l'on peut écrire, en posant $m_1 = k$, $s = N(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n)$ et $r_1 = N(\mathfrak{q})$,

$$\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} U^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{iq}) = \sum_{\mathfrak{m}} w^{m_1} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathfrak{m}, n, \mathfrak{i})) + O\left(\#\{j \in \mathcal{A}_\mathfrak{i} : N(j) \in \Upsilon(x^{2\tau})\}\right)$$

où $\mathbf{m} := (m_1, m_2)$,

$$\mathcal{C}(\mathbf{m}, n) := \left\{ r_1 r_2 s : \omega(r_i) = \Omega(r_i) = m_i \text{ pour } i = 1, 2, \omega(s) = \Omega(s) = n, \right. \\ \left. P^-(r_1 r_2 s) > x^\tau, x^{1+\tau} \leq s \leq x^{3/2-\tau} \right\},$$

$$(5.16) \quad \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, 1, \mathbf{i}) := \left\{ r_1 r_2 s \in \mathcal{C}((m_1 - 1, m_2), 1) : P^-(r_2) > s, \right. \\ \left. \frac{c(N_1, N_2)x^3}{y_2 N(\mathbf{i})} \leq r_1 \leq x^{1-4\tau_1} \text{ et } P^-(r_1) > y_1 \right\}$$

et, pour $n \geq 2$,

$$(5.17) \quad \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, n, \mathbf{i}) := \left\{ r_1 r_2 s \in \mathcal{C}((m_1 - 1, m_2), n) : P^-(r_2) > P^-(s), P^+(s) < x^{1-\tau}, \right. \\ \left. \frac{s}{P^-(s)} < x^{1+\tau}, \frac{c(N_1, N_2)x^3}{y_2 N(\mathbf{i})} \leq r_1 \leq x^{1-4\tau_1} \text{ et } P^-(r_1) > y_1 \right\},$$

où les triplets (r_1, r_2, s) sont comptés avec multiplicité.

Si $n = 2$ ou 3 , l'inégalité $N(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n) \leq x^{3/2-\tau}$ peut faire défaut. On s'inspire alors des identités (4.5) et (4.6) de [HBM02] en écrivant

$$U^{(2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := U^{(2,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) + U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) \quad \text{et} \quad U^{(3)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := U^{(3,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) + S_3(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$$

où

$$U^{(2,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}_2) < x^{1-\tau} \\ x^{1+\tau} \leq N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))),$$

$$U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}_2) < x^{1-\tau} \\ x^{\frac{3}{2}-\tau} < N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))),$$

$$U^{(3,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}_2) < N(\mathbf{p}_3) < x^{1-\tau} \\ N(\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) < x^{1+\tau} \leq N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1)))$$

et

$$S_3(\mathcal{A}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}_2) < N(\mathbf{p}_3) < x^{1-\tau} \\ N(\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) < x^{1+\tau} \\ N(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) > x^{\frac{3}{2}-\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{l} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))).$$

En remarquant que les conditions de sommation définissant $S_3(\mathcal{A}, \mathfrak{l})$ impliquent

$$x^{1/2-2\tau} < N(\mathbf{p}_1) < x^{1/2+\tau/2},$$

on a, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, l'estimation

$$\sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{\frac{c(N_1, N_2)x^3}{y_2} \leq N(\mathbf{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{q})) > \max(x^\tau, y_1)}} S_i(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{q}) \ll \Delta_1(\mathcal{A}; |h|).$$

où $\Delta_1(\mathcal{A}; |h|)$ est défini au lemme 5.1.

D'autre part, on peut observer que

$$\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} U^{(2,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{m}} w^{m_1} S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathfrak{m}, 2, \mathfrak{i})\right) + O\left(\#\left\{\mathfrak{j} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{i}} : N(\mathfrak{j}) \in \Upsilon\left(x^{2\tau}\right)\right\}\right)$$

et

$$\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} U^{(3,1)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{m}} w^{m_1} S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathfrak{m}, 3, \mathfrak{i})\right) + O\left(\#\left\{\mathfrak{j} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{i}} : N(\mathfrak{j}) \in \Upsilon\left(x^{2\tau}\right)\right\}\right)$$

où $\mathcal{C}^{(1)}(\mathfrak{m}, 2, \mathfrak{i})$ et $\mathcal{C}^{(1)}(\mathfrak{m}, 3, \mathfrak{i})$ sont définis par (5.17).

Enfin, remarquons que, si un idéal \mathfrak{j} intervient dans $U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q})$, alors \mathfrak{j} est de la forme $\mathfrak{j} = \mathfrak{i}\mathfrak{q}\mathfrak{l}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ avec

$$x^{3/2-\tau} < N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{2-2\tau} \text{ et } P^-(N(\mathfrak{l})) > N(\mathfrak{p}_1).$$

Il s'ensuit que

$$x^{1-\tau_1} \leq N(\mathfrak{q}\mathfrak{l}) \leq 3x^{3/2+\tau}$$

ce qui suggère d'écrire, en posant $r = N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)$, $s_1 = N(\mathfrak{q})$, $s_2 = N(\mathfrak{l})$ et $n_1 = k$,

$$\begin{aligned} \sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} U^{(2,2)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) &= \sum_{\mathfrak{n}} w^{n_1} S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(2, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})\right) + O\left(\#\left\{\mathfrak{j} \in \mathcal{A}_{\mathfrak{i}} : N(\mathfrak{j}) \in \Upsilon\left(x^{2\tau}\right)\right\}\right) \\ &+ O\left(\sum_{\substack{\frac{c(N_1, N_2)x^3}{y_2} \leq N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > \max(y_1, x^\tau)}} \sum_{\substack{x^{1/2} < N(\mathfrak{p}_1) < N(\mathfrak{p}_2) \\ x^{3/2-\tau} \leq N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{3/2+\tau} \\ \text{ou } x^{2-2\tau_1} \leq N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2) \leq x^{2-2\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \mathcal{C}^-(N(\mathfrak{p}_1)))\right) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(m, \mathfrak{n}) &:= \left\{ r s_1 s_2 : \omega(r) = \Omega(r) = m, \omega(s_i) = \Omega(s_i) = n_i \text{ pour } i = 1, 2, \right. \\ &\quad \left. P^-(r s_1 s_2) > x^\tau, x^{1+\tau} \leq s_1 s_2 \leq x^{3/2-\tau} \right\}. \end{aligned}$$

et

$$(5.18) \quad \mathcal{C}^{(1)}(2, \mathfrak{n}, \mathfrak{i}) := \left\{ r s_1 s_2 \in \mathcal{C}(2, (n_1 - 1, n_2)), P^+(r) < x^{1-\tau}, P^-(r) < P^-(s_2), \right. \\ \left. \frac{c(N_1, N_2)x^3}{y_2 N(\mathfrak{i})} \leq s_1 \leq x^{1-4\tau_1}, P^-(s_1) > y_1 \right\}$$

où les triplets (r, s_1, s_2) sont comptés avec multiplicité. On observe finalement que l'on peut majorer la somme sur \mathfrak{i} du terme d'erreur précédent par la quantité $\Delta_2(\mathcal{A}; |h|)$ définie au lemme 5.1.

On déduit finalement de ce qui précède la formule

$$\begin{aligned} (5.19) \quad M_h\left(\mathcal{A} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(1)}\right) &= \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} h(\mathfrak{i}) \left(\sum_k w^k \sum_{\mathfrak{q}}^{i,k} \sum_{n \geq 0} (-1)^n T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \sum_{\mathfrak{m}} w^{m_1} S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathfrak{m}, n, \mathfrak{i})\right) + \sum_{\mathfrak{n}} w^{n_1} S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(1)}(2, \mathfrak{n}, \mathfrak{i})\right) \right) \\ &\quad + O\left(\Theta(\mathcal{A}; |h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_1(\mathcal{A}; |h|) + \Delta_2(\mathcal{A}; |h|)\right). \end{aligned}$$

L'argument développé ci-dessus s'adapte *mutatis mutandis* pour réécrire $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$ à l'aide de cardinaux de la forme $S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, E \cap \mathcal{C}(m, n))$. En l'absence d'un analogue du lemme 2.2 adapté aux idéaux de \mathcal{B} , il convient toutefois de tenir compte des idéaux \mathbf{j} tels que $p^2 | N(\mathbf{j})$ avec $p > x^{\tau/3}$ en utilisant l'analogue de (5.13) pour \mathcal{B} .

Avant d'énoncer la proposition qui résume la discussion de cette partie, harmonisons les notations précédentes en introduisant, pour $\mathbf{m} := (m_1, m_2)$, $\mathbf{n} := (n_1, n_2)$, \mathbf{i} un idéal et $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} , les notations

$$(5.20) \quad \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) := \begin{cases} \left\{ (r, 1, s, 1) : rs \in \mathcal{C}^{(i)}(m_1, n_1) \right\} & \text{si } 2 \leq i \leq 5 \text{ et } m_2 = n_2 = 0, \\ \left\{ (r_1, r_2, s, 1) : r_1 r_2 s \in \mathcal{C}^{(1)}((m_1, m_2), n_1, \mathbf{i}) \right\} & \text{si } i = 1 \text{ et } n_2 = 0, \\ \left\{ (r, 1, s_1, s_2) : r s_1 s_2 \in \mathcal{C}^{(1)}(m_1, (n_1, n_2), \mathbf{i}) \right\} & \text{si } i = 1 \text{ et } m_2 = 0, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$S(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) := \# \left\{ (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) : (N(\mathbf{r}_1), N(\mathbf{r}_2), N(\mathbf{s}_1), N(\mathbf{s}_2)) \in \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) \text{ et } \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \in \mathcal{D} \right\}.$$

En vue de ce qui précède et de l'estimation

$$(5.21) \quad \sigma(\mathbf{j}) = \sigma(\mathbf{j}^-(x^\tau)) \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right) \right)$$

valide dès que $N(\mathbf{j}) \leq 3x^3$, on obtient la proposition suivante.

Proposition 5.2. *Uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, on a l'estimation*

$$M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta \sigma_0}{c(N_1, N_2)x} M_{\sigma h} S(\mathcal{B}) \left(1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right) \right) \ll T(|h|) + S(|h|) + \Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(|h|) + \Delta_1(|h|) + \Delta_2(|h|)$$

où

$$T(|h|) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{q})) > x^\tau}} \sum_{n \geq 0} \left| T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathbf{q}) - \frac{\eta \sigma_0}{c(N_1, N_2)x} \sigma(\mathbf{i}) T^{(n)}(\mathcal{B}, \mathbf{i}\mathbf{q}) \right|,$$

$T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathbf{i})$ et $T^{(n)}(\mathcal{B}, \mathbf{i})$ étant définis par (5.15),

$$(5.22) \quad S(|h|) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left| S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \frac{\eta \sigma_0}{c(N_1, N_2)x} \sigma(\mathbf{i}) S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right|,$$

les $\mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})$ étant définis par (5.9), (5.10), (5.11), (5.12), (5.16), (5.17) et (5.18),

$$(5.23) \quad \Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) := \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \\ N(\mathbf{j}^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} |h(\mathbf{j})| + \frac{\eta}{c(N_1, N_2)x} \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{B} \\ N(\mathbf{j}^-(x^\tau)) > x^{\tau_1}}} \sigma(\mathbf{j}) |h(\mathbf{j})|,$$

$$(5.24) \quad \Delta_0(|h|) := \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{A} \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon(x^{2\tau/3})}} |h(\mathbf{j})| + \frac{\eta}{c(N_1, N_2)x} \left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{B} \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon(x^{2\tau/3})}} \sigma(\mathbf{j}) |h(\mathbf{j})| \right),$$

(5.25)

$$\Delta_1(|h|) := \max_{Y \geq x^{\frac{1}{2}-\tau_1}} \sum_{Y \leq N(\mathfrak{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \left(S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{ip}, \mathcal{C}^-\left(\max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2-\tau_1}))\right)\right) \right. \\ \left. + \sigma(\mathfrak{i}) \frac{\eta}{c(N_1, N_2)x} S\left(\mathcal{B}, \mathfrak{ip}, \mathcal{C}^-\left(\max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2-\tau_1}))\right)\right) \right)$$

et

(5.26)

$$\Delta_2(|h|) := \max_{Y \geq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}} \sum_{\substack{x^{1/2} \leq N(\mathfrak{p}_1) \leq N(\mathfrak{p}_2) \\ Y \leq N(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2) \leq Yx^{\tau_1}}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \left(S\left(\mathcal{A}, \mathfrak{ip}_1 \mathfrak{p}_2, \mathcal{C}^-\left(\max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2}))\right)\right) \right. \\ \left. + \sigma(\mathfrak{i}) \frac{\eta}{c(N_1, N_2)x} S\left(\mathcal{B}, \mathfrak{ip}_1 \mathfrak{p}_2, \mathcal{C}^-\left(\max(x^\tau, \min(y_1, x^{1/2}))\right)\right) \right).$$

Au cours des paragraphes 6 et 7, on établira des bornes supérieures des différents termes d'erreur impliqués dans la proposition 5.2.

6. PREMIÈRES APPLICATIONS DES ESTIMATIONS DE SOMMES DE TYPE I

Dans cette partie, on utilise les estimations de sommes de Type I du paragraphe 3 pour établir des bornes supérieures des différents termes d'erreur impliqués dans la proposition 5.2, à l'exception de $S(|h|)$ qui fera l'objet du paragraphe 7 sur les estimations de sommes de Type II.

Le lemme ci-dessous donne une majoration de la contribution des idéaux dont la norme appartient à $\Upsilon((\log x)^c)$, c'est-à-dire est divisible par un $p^k > (\log x)^c$ avec $k \geq 2$. Il en découle une majoration du terme $\Delta_0(|h|)$ défini par (5.24).

Lemme 6.1. *Soit $B \geq 0$. Uniformément en $x \geq 2$, on a*

$$(6.1) \quad \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : (n_1, n_2) = 1, n_1^3 + 2n_2^3 \in \Upsilon((\log x)^{2B}) \right\} \ll x^2 (\log x)^{-B}$$

et

$$(6.2) \quad \sum_{\substack{N(\mathfrak{j}) \leq x \\ N(\mathfrak{j}) \in \Upsilon((\log x)^{2B+2})}} \sigma(\mathfrak{j}) \ll x (\log x)^{-B}.$$

En particulier, uniformément en $x \geq 2$, w un complexe de module 1, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$ et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, on a

$$(6.3) \quad \Delta_0(|h|) \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

Ce résultat – largement inspiré du lemme 2 de [Gre92] – peut être considéré comme une extension du lemme 5 de [Del71] aux formes binaires.

Démonstration. Pour tout nombre premier $p \geq 5^4$, posons

$$k(p) := \max \left(2, \left\lfloor \frac{2B \log \log x}{\log p} \right\rfloor + 1 \right).$$

Étant donné des entiers n_1 et n_2 tels que $(p, n_1 n_2) = 1$ et $p^{k(p)} | n_1^3 + 2n_2^3$, il existe ω modulo $p^{k(p)}$ tel que

$$\omega^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}} \quad \text{et} \quad n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^{k(p)}}.$$

4. D'après le lemme 2.2, les premiers 2 et 3 n'interviennent pas dans la définition de $\Upsilon((\log x)^c)$.

Par suite, on peut écrire à l'aide du lemme 1 de [Gre92] les inégalités

$$\begin{aligned}
 & \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : (n_1, n_2) = 1, p^{k(p)} | n_1^3 + 2n_2^3 \right\} \\
 & \leq \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ \omega^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \# \left\{ 0 \leq n_1, n_2 \leq x : n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^{k(p)}} \right\} \\
 (6.4) \quad & \leq \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ \omega^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \left(\frac{x^2}{p^{k(p)}} + O \left(\frac{x}{M_0(\omega, p^{k(p)})} \right) \right)
 \end{aligned}$$

où

$$M_0(\omega, p^k) := \min_{\substack{(n_1, n_2) \neq (0, 0) \\ n_1 \equiv \omega n_2 \pmod{p^k}}} \max(|n_1|, |n_2|).$$

Le nombre de racines ω modulo p^k du polynôme $X_1^3 + 2$ étant inférieur à 3 pour tout $p \geq 5$ premier et $k \geq 1$, il suit de (6.4) que l'on a

$$\sum_p \# \left\{ 1 \leq n_1, n_2 \leq x : (n_1, n_2) = 1, p^{k(p)} | n_1^3 + 2n_2^3 \right\} \ll \sum_{5 \leq p \leq 3x^{3/2}} \frac{x^2}{p^{k(p)}} + S_1 + S_2 + S_3$$

où

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{p \leq x^{1/2}} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ \omega^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}}}} \frac{x}{M_0(\omega, p^{k(p)})}, \\
 S_2 &= \sum_{x^{1/2} < p \leq 3x^{3/2}} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ \omega^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}} \\ M_0(\omega, p^{k(p)}) > x^{3/4}}} \frac{x}{M_0(\omega, p^{k(p)})}
 \end{aligned}$$

et

$$S_3 = \sum_{x^{1/2} < p \leq 3x^{3/2}} \sum_{\substack{1 \leq \omega \leq p^{k(p)} \\ \omega^3 + 2 \equiv 0 \pmod{p^{k(p)}} \\ M_0(\omega, p^{k(p)}) \leq x^{3/4}}} \frac{x}{M_0(\omega, p^{k(p)})}.$$

Observons que

$$\sum_p \frac{x^2}{p^{k(p)}} \ll \sum_{p \leq (\log x)^B} \frac{x^2}{(\log x)^{2B}} + \sum_{p > (\log x)^B} \frac{x^2}{p^2} \ll \frac{x^2}{(\log x)^B}.$$

L'estimation triviale $M_0(\omega, p^{k(p)}) \geq 1$ pour S_1 et l'hypothèse $p^k M_0(\omega, p^{k(p)}) > x^{3/4}$ pour S_2 entraînent les majorations

$$S_1 \ll \frac{x^{3/2}}{\log x} \quad \text{et} \quad S_2 \ll \frac{x^{7/4}}{\log x}.$$

De l'estimation

$$S_3 \ll \sum_{1 \leq n_1 \leq x^{3/4}} \frac{x}{n_1} \sum_{0 \leq n_2 \leq n_1} \sum_{\substack{x^{1/2} < p \\ p^2 | n_1^3 + 2n_2^3}} 1 \ll x^{7/4},$$

on déduit finalement la majoration (6.1).

Pour établir (6.2), on utilise la méthode de Rankin pour écrire

$$\sum_{\substack{N(\mathbf{j}) \leq x \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon((\log x)^{2B+2})}} \sigma(\mathbf{j}) \ll \sum_{p \geq 5} \sigma^{\mathbf{Z}}(p^{k(p)}) \sum_{N(\mathbf{j}) \leq x/p^{k(p)}} \sigma(\mathbf{j}) \ll x \sum_{p \geq 5} \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(p^{k(p)})}{p^{k(p)}} \sum_{N(\mathbf{j}) \leq x} \frac{\sigma(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})}.$$

Au vu de (4.19) et (4.13), il suit

$$\sum_{\substack{N(\mathbf{j}) \leq x \\ N(\mathbf{j}) \in \Upsilon((\log x)^{2B+2})}} \sigma(\mathbf{j}) \ll x \log x \sum_{p \geq 5} \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(p^{k(p)})}{p^{k(p)}} \ll x(\log x)^B.$$

□

Les estimations de Type I établies dans le paragraphe 3 permettent, au moyen d'un lemme de crible, de donner des bornes supérieures du bon ordre de grandeur des cardinaux $S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z))$ et $S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z))$ définis au paragraphe 4.1. De telles estimations seront centrales dans les majorations de $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$, $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$.

Lemme 6.2. *Soient B_1 et $B_2 \geq 0$. Il existe $c(B_1, B_2) > 0$ tel que, uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $z \geq \log x$ et \mathbf{i} admissible, on ait*

$$(6.5) \quad S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{\eta^2 x^2}{\log z} \frac{\sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z)$$

et

$$(6.6) \quad S(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{c(N_1, N_2) \eta x^3}{N(\mathbf{i}) \log z} + R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z)$$

où $R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z)$ et $R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z)$ sont définis par (6.7) infra et satisfont

$$\sum_{N(\mathbf{i}) z^2 \leq x^2 (\log x)^{-c(B_1, B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z) \ll x^2 (\log x)^{-B_2}$$

et

$$\sum_{N(\mathbf{i}) z^2 \leq x^3 (\log x)^{-c(B_1, B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} \sigma(\mathbf{i}) R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z) \ll x^3 (\log x)^{-B_2}.$$

Démonstration. Puisque la fonction de densité $\xi(\mathbf{i}, \cdot)$ définie par (3.22) vérifie (3.24), elle vérifie les hypothèses de crible (Ω_0) et (Ω_1) de [HR74]. On peut donc appliquer le théorème 4.1 de [HR74] pour obtenir l'estimation

$$S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^-(z)) \ll \eta^2 x^2 \frac{\alpha(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \prod_{p \leq z} (1 - \xi(\mathbf{i}, p)) + R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z)$$

où, pour $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} ,

$$(6.7) \quad R_{\mathcal{D}}(\mathbf{i}, z) := \sum_{d \leq z^2} \tau(d)^2 \mu(d)^2 |r(\mathcal{D}, \mathbf{i}, d)|$$

et $r(\mathcal{D}, \mathbf{i}, d)$ est défini par (3.21) et (3.25). En estimant le terme de reste à l'aide du lemme 3.5, on en déduit l'existence d'une constante $c(B_1, B_2) > 0$ pour laquelle on ait

$$(6.8) \quad \sum_{N(\mathbf{i}) z^2 \leq x^2 (\log x)^{-c(B_1, B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} R_{\mathcal{A}}(\mathbf{i}, z) \ll x^2 (\log x)^{-B_2}.$$

La formule de crible (6.5) est alors une conséquence de (4.12), compte tenu de l'hypothèse $z \geq \log x$.

Pour établir (6.6), il suffit de reproduire le même argument en utilisant le lemme 3.7 (resp. (4.7)) en lieu et place du lemme 3.5 (resp. (4.12)). D'après (4.13), il suit ainsi que, pour $c(B_2) > 0$ suffisamment grand, on a

$$\sum_{N(\mathbf{i})z^2 \leq x^3(\log x)^{-c(B_2)}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} \sigma(\mathbf{i}) R_{\mathcal{B}}(\mathbf{i}, z) \ll x^3 (\log x)^{-B_2} \sum_{N(\mathbf{i}) \leq x^3} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{i})^{B_1} \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \ll (\log x)^{c(B_1, B_2)}.$$

□

Une borne supérieure de la quantité $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$ définie par (5.23) peut être obtenue en s'inspirant de travaux antérieurs concernant les ordres moyens de fonctions arithmétiques sur les valeurs polynomiales. Par exemple, Tenenbaum [[Ten90], Lemme 3.7] montre que, pour tout polynôme $F \in \mathbf{Z}[X]$, il existe $c(F) > 0$ tel que, uniformément en $z \geq y \geq 2$ et $x \geq 2$, on ait

$$\# \left\{ n \leq x : \prod_{\substack{p \leq y \\ p^\nu \parallel F(n)}} p^\nu > z \right\} \ll x \exp \left(-c(F) \frac{\log z}{\log y} \right).$$

En vue d'obtenir un analogue de ce résultat pour la forme binaire $X_1^3 + 2X_2^3$, on peut adapter la preuve du théorème 1 de [Shi80], démarche à l'origine du résultat suivant.

Lemme 6.3. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $c > 0$ telle que, uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, et $z \geq y \geq \exp \left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}} \right)$, on ait*

$$(6.9) \quad \# \{ \mathbf{j} \in \mathcal{A} : N(\mathbf{j}^-(y)) > z \} \ll \eta^2 x^2 \exp \left(-c \frac{\log z}{\log y} \log \left(\frac{\log z}{\log y} \right) \right)$$

et

$$(6.10) \quad \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{B} \\ N(\mathbf{j}^-(y)) > z}} \sigma(\mathbf{j}) \ll c(N_1, N_2) \eta x^3 \exp \left(-c \frac{\log z}{\log y} \log \left(\frac{\log z}{\log y} \right) \right).$$

En particulier, on a, sous les conditions précédentes et uniformément en w un complexe de module 1, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$ et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$,

$$\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) \ll \eta^2 x^2 \exp \left(-c_1 \frac{\tau_1}{\tau} \log \left(\frac{\tau_1}{\tau} \right) \right).$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on a $y \leq z^{1/2} \leq x^{1/4}$, le résultat étant trivial autrement. Étant donné un idéal \mathbf{j} et la décomposition de la norme de sa partie y -friable

$$N(\mathbf{j}^-(y)) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad p_i < p_{i+1},$$

considérons $j \geq 0$ le plus grand entier tel que

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j} \leq z$$

et définissons les diviseurs \mathbf{j}_1 et \mathbf{j}_2 de $\mathbf{j}^-(y)$ par les conditions

$$N(\mathbf{j}_1) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j} \quad \text{et} \quad N(\mathbf{j}_2) = p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

On scinde l'ensemble des idéaux \mathbf{j} tels que $N(\mathbf{j}^-(y)) > z$ en trois classes :

- classe I : $N(\mathbf{j}_1) \leq z^{1/2}$,
- classe II : $p_j \leq \log x \log \log x$ et $N(\mathbf{j}_1) > z^{1/2}$,
- classe III : $\log x \log \log x < p_j \leq y$ et $N(\mathbf{j}_1) > z^{1/2}$,

et on estime la contribution de chacune de ces classes séparément.

Contribution de la classe I. Sous l'hypothèse $y \leq z^{1/2}$, on observe que $p_{j+1}^{\alpha_{j+1}} > z^{1/2}$ avec $\alpha_{j+1} \geq 2$, ce qui signifie que les idéaux considérés ont leur norme dans $\Upsilon(z^{1/2})$. Le lemme 6.1 entraîne que l'on a, pour tout $B > 0$,

$$\#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe II}\} \ll x^2(\log x)^{-B} \text{ et } \sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ j \text{ dans la classe II}}} \sigma(j) \ll x^3(\log x)^{-B}.$$

Contribution de la classe II. En utilisant le lemme 3.4 et l'estimation $\alpha^{\mathbf{Z}}(m) \ll m^{1/2}$, on obtient par la méthode de Rankin l'estimation

$$\begin{aligned} & \#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe II}\} \\ & \ll x^2 \sum_{\substack{z^{1/2} < N(j_1) \leq z \\ P^+(N(j_1)) \leq \log x \log \log x}} \frac{\alpha(j_1)}{N(j_1)} + x^{3/2}(\log x)^c \\ & \ll x^2 \sum_{\substack{m \leq z \\ P^+(m) \leq \log x \log \log x}} \frac{1}{m^{1/2}} \left(\frac{m}{z^{1/2}} \right)^{1/2} + x^{3/2}(\log x)^c \\ & \ll x^2 z^{-1/4} \Psi(z, \log x \log \log x) + x^{3/2}(\log x)^c. \end{aligned}$$

L'estimation de $\Psi(x, t)$ due à de Bruijn [[dB66], Theorem 1] et uniforme en $x \geq t > 2$, à savoir

$$\begin{aligned} \log \Psi(x, t) &= \left(\frac{\log x}{\log t} \log \left(1 + \frac{t}{\log x} \right) + \frac{t}{\log t} \log \left(1 + \frac{\log x}{t} \right) \right) \\ & \quad \times \left(1 + O \left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log \log(x+2)} \right) \right), \end{aligned}$$

entraîne la majoration $\Psi(x, \log x \log \log x) \ll \exp \left(O \left(\frac{\log x \log \log \log x}{\log \log x} \right) \right)$. Par suite, il suit de l'hypothèse $z \geq \exp \left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}} \right)$, que l'on a, pour tout $B > 0$,

$$\#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe II}\} \ll x^2(\log x)^{-B}.$$

De façon similaire, le théorème 3.6 et la formule (4.13) impliquent

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ J \text{ dans la classe II}}} \sigma(j) \ll x^3(\log x)^{-B}.$$

Contribution de la classe III. Commençons par découper l'ensemble des p_j en sous-intervalles du type $]z^{1/(s+1)}, z^{1/s}]$ avec $s_1 \leq s \leq s_2$ où

$$s_1 := \left\lfloor \frac{\log z}{\log y} \right\rfloor \text{ et } s_2 := \left\lfloor \frac{\log z}{\log(\log x \log \log x)} \right\rfloor.$$

On observe alors que

$$\begin{aligned} & \#\{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe III}\} \\ & \ll \sum_{s_1 \leq s \leq s_2} \sum_{\substack{z^{1/2} \leq N(j_1) < z \\ P^+(N(j_1)) \leq z^{1/s}}} S(\mathcal{A}, j_1, \mathcal{C}^-(z^{1/(s+1)})). \end{aligned}$$

La formule (6.5) du lemme 6.2 permet de majorer, pour tout $B > 0$, la contribution des idéaux de la classe III par

$$\ll \frac{\eta^2 x^2}{\log z} \sum_{s_1 \leq s \leq s_2} (s+1) \sum_{\substack{z^{1/2} \leq m < z \\ P^+(m) \leq z^{1/s}}} \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(m)}{m} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

Dans la mesure où la fonction $\sigma^{\mathbf{Z}}$ satisfait les hypothèses du lemme 4 de [Shi80], on obtient l'estimation de la somme intérieure, uniforme en $s \leq \log z / \log \log z$, suivante

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{z^{1/2} \leq m \\ P^+(m) \leq z^{1/s}}} \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(m)}{m} &\ll \exp \left(\sum_{p \leq z} \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(p)}{p} - \frac{1}{10} s \log(s) \right) \\ &\ll \log z \exp \left(-\frac{1}{10} s \log(s) \right) \end{aligned}$$

Ceci implique alors l'estimation

$$\# \{j \in \mathcal{A} : j \text{ est dans la classe III}\} \ll \eta^2 x^2 \exp \left(-c_1 \frac{\log z}{\log y} \log \left(\frac{\log z}{\log y} \right) \right) + x^2 (\log x)^{-B}$$

et, en utilisant (6.6) au lieu de (6.5),

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{B} \\ J \text{ dans la classe III}}} \sigma(j) \ll c(N_1, N_2) \eta x^3 \exp \left(-c_1 \frac{\log z}{\log y} \log \left(\frac{\log z}{\log y} \right) \right) + x^2 (\log x)^{-B}.$$

Au vu de l'hypothèse $y \geq \exp \left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}} \right)$ et de ce qui précède, on en déduit que (6.9) et (6.10). \square

À partir de maintenant, nous n'emploierons le lemme 6.2 qu'avec un niveau de crible $z \geq x^\tau$. Le lemme suivant, analogue de [[HB01], Lemma 7.1] précise la borne supérieure disponible dans un tel cadre.

Lemme 6.4. *Soit $B \geq 0$. Il existe $c(B)$ tel que, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $z \geq x^\tau$ et $\mathcal{C} \subset (\mathcal{C}^-(x^\tau))^2$ où $\mathcal{C}^-(\cdot)$ est défini par (4.4), et pour tout idéal \mathfrak{i} tel que $N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}$, on ait*

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ (N(\mathfrak{q}_1), N(\mathfrak{q}_2)) \in \mathcal{C} \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)z^2 \leq x^2 (\log x)^{-c_2(B)}}} S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, \mathcal{C}^-(z)) \\ (6.11) \quad &\ll \frac{\eta^2 x^2}{\log z} \frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \sum_{(d_1, d_2) \in \mathcal{C}} \mu^2(d_1 d_2) \frac{\nu_{d_1 d_2}}{d_1 d_2} + R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i}). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ (N(\mathfrak{q}_1), N(\mathfrak{q}_2)) \in \mathcal{C} \\ N(\mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)z^2 \leq x^3 (\log x)^{-c_2(B)}}} S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, \mathcal{C}^-(z)) \\ (6.12) \quad &\ll \frac{c(N_1, N_2) \eta x^3}{N(\mathfrak{i}) \log z} \sum_{(d_1, d_2) \in \mathcal{C}} \mu^2(d_1 d_2) \frac{\nu_{d_1 d_2}}{d_1 d_2} + R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i}) \end{aligned}$$

où ν_d est le nombre d'idéaux j tels que $N(j) = d$ et

$$\sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |R_{\mathcal{A}}(\mathfrak{i})| \ll x^2 (\log x)^{-B} \quad \text{et} \quad \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \sigma(\mathfrak{i}) |R_{\mathcal{B}}(\mathfrak{i})| \ll x^3 (\log x)^{-B}.$$

Démonstration. Une application directe du lemme 6.2 et de (5.21) donne

$$S(\mathcal{A}, \mathbf{iq}_1 \mathbf{q}_2, \mathcal{C}^-(z)) \ll \frac{\eta^2 x^2 \sigma_0}{\log z} \frac{\sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{iq}_1 \mathbf{q}_2)} + R_{\mathcal{A}}(\mathbf{iq}_1 \mathbf{q}_2, z)$$

avec

$$\sum_{\substack{\mathbf{i}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ N(\mathbf{iq}_1 \mathbf{q}_2) z^2 \leq x^2 (\log x)^{-c_2(B)}}} R_{\mathcal{A}}(\mathbf{iq}_1 \mathbf{q}_2, z) \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

On peut alors majorer la contribution des $\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2$ avec facteur carré à l'aide de l'estimation

$$(6.13) \quad \sum_{\substack{P^-(N(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)) \geq x^\tau \\ \mu(N(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)) = 0 \\ N(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) \leq x^2}} \frac{1}{N(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2)} \ll \sum_{N(\mathbf{j}) \leq x^2} \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} \left(\sum_{p > x^{\tau/2}} \frac{1}{p^2} + \sum_{p > x^{\tau/3}} \frac{1}{p^3} \right) \ll x^{-\tau/2} (\log x)^c,$$

ce qui achève la preuve de (6.11), compte tenu de (6.8). Un raisonnement similaire permet d'établir (6.12). \square

Le lemme suivant, qui rappelle les estimations (7.1) et (7.2) de [HB01], sera utilisé pour estimer les membres de droite de (6.11) et (6.12).

Lemme 6.5. *On a, uniformément en $t \geq z \geq 2$*

$$(6.14) \quad \sum_{t \leq p \leq tz} \frac{\nu_p}{p} \ll \frac{\log z}{\log t}$$

et

$$\sum_{z \leq p_1 < \dots < p_k \leq t} \frac{\nu_{p_1 \dots p_k}}{p_1 \dots p_k} \ll \frac{\left(\log \left(\frac{\log t}{\log z} \right) + O(1) \right)^k}{k!}.$$

Démonstration. La première majoration est une conséquence du théorème des idéaux premiers. Au vu de la multiplicativité de ν_d , la seconde estimation provient de l'inégalité

$$\sum_{z \leq p_1 < \dots < p_k \leq t} \frac{\nu_{p_1}}{p_1} \dots \frac{\nu_{p_k}}{p_k} \leq \frac{1}{k!} \left(\sum_{z \leq p \leq t} \frac{\nu_p}{p} \right)^k \ll \frac{\left(\log \left(\frac{\log t}{\log z} \right) + O(1) \right)^k}{k!}.$$

\square

On établit dans le lemme suivant, analogue de [[HB01], Lemma 3.6], des estimations de $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$ définies par les formules (5.25) et (5.26).

Lemme 6.6. *Uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, w un complexe de module 1, $y_2 > x^\tau$ et $h \in \mathcal{M}(w; 1, y_2)$, on a*

$$(6.15) \quad \Delta_1(|h|), \Delta_2(|h|) \ll \tau_1 \eta^2 x^2.$$

D'autre part, uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, on a

$$(6.16) \quad \Delta_1(|h|), \Delta_2(|h|) \ll \eta^2 x^2 \frac{\tau_1 \log x}{(\log y_1)^2}.$$

Démonstration. Pour majorer $\Delta_1(|h|)$, on peut faire appel aux lemmes 6.4 et 6.5. Dans l'intervalle $x^{1/2-\tau_1} \leq Y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}$, on a la majoration suivante, valide pour tout $B > 0$,

$$\begin{aligned} & \sum_{Y \leq N(\mathfrak{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) + \frac{\eta}{c(N_1, N_2)x} \sigma(\mathfrak{i}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{p}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \right) \\ & \ll \frac{\eta^2 x^2}{\tau \log x} \sum_{Y \leq p \leq Yx^{\tau_1}} \frac{\nu_p}{p} \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} + x^2 (\log x)^{-B} \\ & \ll \tau_1 \eta^2 x^2, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la majoration

$$(6.17) \quad \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} \frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \leq \prod_{p \leq x^\tau} \sum_k \frac{\sigma^{\mathbf{Z}}(p^k)}{p^k} \ll \tau \log x.$$

En utilisant (4.19), on peut considérer le cas $Y > x^{\frac{3}{2}-\tau_1}$ en écrivant les idéaux sous la forme $\mathfrak{j}\mathfrak{p}$ avec $N(\mathfrak{j}) = \frac{c(N_1, N_2)x^{3+O(\tau_1)}}{Y}$ pour obtenir la majoration

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathfrak{j}) = \frac{c(N_1, N_2)x^{3+O(\tau_1)}}{Y}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{j}, \mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})) + \frac{\eta}{c(N_1, N_2)x} \sigma(\mathfrak{j}) S(\mathcal{B}, \mathfrak{j}, \mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})) \right) \\ & \ll \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathfrak{j}) = \frac{c(N_1, N_2)x^{3+O(\tau_1)}}{Y}} \frac{\sigma(\mathfrak{j})}{N(\mathfrak{j})} + x^2 (\log x)^{-B} \\ & \ll \tau_1 \eta^2 x^2 \end{aligned}$$

Supposons désormais que h est à support sur les entiers y_1 -criblés où $y_1 \leq x^{1/2-\tau_1}$ sans perte de généralité. En procédant comme précédemment, on peut majorer la contribution de l'intervalle $x^{1/2-\tau_1} \leq Y \leq x^{\frac{3}{2}-\tau_1}$ en observant que

$$\sum_{Y \leq N(\mathfrak{p}) \leq Yx^{\tau_1}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{p}, \mathcal{C}^-(y_1)) \frac{\eta}{c(N_1, N_2)x} S(\mathcal{B}, \mathfrak{p}, \mathcal{C}^-(y_1)) \right) \ll \tau_1 \frac{\eta^2 x^2}{\log y_1}.$$

Lorsque $y > x^{3/2-\tau_1}$, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathfrak{j}) = \frac{c(N_1, N_2)x^{3+O(\tau_1)}}{Y}} \left(S(\mathcal{A}, \mathfrak{j}, \mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})) + \frac{\eta}{c(N_1, N_2)x} S(\mathcal{B}, \mathfrak{j}, \mathcal{C}^-(x^{3/2-\tau_1})) \right) \\ & \ll \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_k \sum_{y_1 < p_2 < \dots < p_k \leq 3x^{3/2+\tau_1}} \frac{\nu_{p_2 \dots p_k}}{p_2 \dots p_k} \max_{y_1 < Y} \sum_{Y \leq p_1 \leq Yx^{\tau_1}} \frac{\nu_{p_1}}{p_1} + x^2 (\log x)^{-B} \\ & \ll \frac{\tau_1 \log x}{\log y} \frac{\eta^2 x^2}{\log y_1}. \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue permet d'obtenir les estimations de $\Delta_2(|h|)$. \square

Avec le choix de paramètre de crible $z = x^\tau$, on peut reproduire l'argument du paragraphe 6 de [HB01], basé sur le crible de Selberg, pour obtenir un équivalent asymptotique de $S(\mathcal{D}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^-(x^\tau))$, conduisant ainsi à une borne supérieure de

$$T(|h|) := \sum_{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathfrak{i})| \sum_{\substack{N(\mathfrak{q}) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathfrak{q})) > x^\tau}} \sum_{n \geq 0} \left| T^{(n)}(\mathcal{A}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) - \frac{\eta \sigma_0}{c(N_1, N_2)x} \sigma(\mathfrak{i}) T^{(n)}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}\mathfrak{q}) \right|$$

où $T^{(n)}(\mathcal{A}, \cdot)$ et $T^{(n)}(\mathcal{B}, \cdot)$ sont définis par (5.15).

Lemme 6.7. *Soit $B > 0$. Uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1 et $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$, on a*

$$T(|h|) \ll \frac{\eta^2 x^2}{\tau^3 \log x} \exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right) \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

Démonstration. À la suite de [HB01], on applique le théorème 7.1 de [HR74] et (5.21) pour en déduire les formules

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau)) &= \eta^2 x^2 \sigma_0 \frac{\sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i} \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n)} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\right)\right) \\ &\quad + O\left(\sum_{d \leq x^{2\tau_1}} \mu(d)^2 \tau(d)^2 |r(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, d)|\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S(\mathcal{B}, \mathbf{i} \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau)) &= \frac{c(N_1, N_2) \eta x^3}{N(\mathbf{i} \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n)} \prod_{p \leq x^\tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right)\right)\right) \\ &\quad + O\left(\sum_{d \leq x^{2\tau_1}} \mu(d)^2 \tau(d)^2 |r(\mathcal{B}, \mathbf{i} \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, d)|\right). \end{aligned}$$

En estimant la contribution des idéaux $\mathfrak{q} \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ dont la norme possède des facteurs carrés par (6.13), on observe qu'on peut se restreindre aux idéaux admissibles. Par suite, dans la mesure où $N(\mathbf{i} \mathfrak{q} \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq x^{2-3\tau_1+\tau}$, la contribution des termes de restes $|r(\mathcal{D}, \mathbf{i} \mathfrak{q} \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n, d)|$ pour $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} est négligeable au vu des lemmes 3.5 et 3.7. On en déduit alors, pour tout $B > 0$, l'estimation

$$T(|h|) \ll \frac{\eta^2 x^2}{\tau \log x} \exp\left(-\frac{\tau_1}{\tau}\right) \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} \sum_{\substack{N(\mathbf{j}) \leq x^2 \\ P^-(N(\mathbf{j})) > x^\tau}} \mu^2(N(\mathbf{j})) \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

On utilise alors le lemme 6.5 pour estimer la somme en \mathbf{j}

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N(\mathbf{j}) \leq x^2 \\ P^-(N(\mathbf{j})) > x^\tau}} \mu^2(N(\mathbf{j})) \frac{\tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} &\ll \sum_n 2^n \sum_{x^\tau < p_1 < \cdots < p_n \ll x^2} \frac{\nu_{p_1 \cdots p_n}}{p_1 \cdots p_n} \\ (6.18) \qquad \qquad \qquad &\ll \sum_n \frac{2^n}{n!} (-\log \tau + O(1))^n \ll \tau^{-2}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du lemme. \square

7. ESTIMATIONS DE SOMMES DE TYPE II

Dans cette partie, on établit (cf. proposition 7.7 *infra*) une majoration de

$$\begin{aligned} S(|h|) &:= \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left| S\left(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta \sigma_0}{c(N_1, N_2) x} \sigma(\mathbf{i}) S\left(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})\right) \right| \end{aligned}$$

où les $\mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})$ sont définis par (5.20) et (5.9), (5.10), (5.11), (5.12) (5.16), (5.17) et (5.18), ce qui permet de valider la formule heuristique (5.3). On étend pour ce faire l'approche développée dans les travaux de Heath-Brown [HB01], à travers l'introduction de sommes de Type II adéquates.

Réécrivons les différents ensembles $\mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})$ sous la forme

$$\mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) = \bigcup_{(s_1, s_2) \in \mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i})} \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}) \times \{(s_1, s_2)\}$$

avec

$$\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}) := \left\{ (s_1, s_2) : \Omega(s_i) = \omega(s_i) = n_i, (s_1, s_2) \text{ satisfait } \left(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}) \right) \text{ pour } j \ll 1 \right\}$$

où $\left(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}) \right)$ désigne une inégalité du type

$$YN(\mathbf{i})^\varepsilon \prec P(\vec{\alpha}^{(1)})(s_1)P(\vec{\alpha}^{(2)})(s_2)$$

avec $Y > 0$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, \prec désigne l'ordre \leq , $<$, \geq ou $>$ et les $P(\vec{\alpha})$ sont définis dans (5.5), et

$$\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}) := \left\{ (r_1, r_2) : \Omega(r_i) = \omega(r_i) = m_i, \right. \\ \left. (r_1, r_2) \text{ satisfait } \left(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}) \right) \text{ pour } j \ll 1 \right\}$$

où $\left(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}) \right)$ désigne une inégalité du type

$$YN(\mathbf{i})^\varepsilon P(\vec{\beta}^{(1)})(r_1)P(\vec{\beta}^{(2)})(r_2) \prec P(\vec{\gamma}^{(1)})(s_1)P(\vec{\gamma}^{(2)})(s_2).$$

Les inégalités $\left(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}) \right)$ et $\left(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}) \right)$ introduits ci-dessus correspondent non seulement aux hypothèses sur le support de h mais aussi aux contraintes relatives à la définition des $\mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})$, en particulier aux conditions $x^{1+\tau} \leq s_1 s_2 \leq x^{3/2-\tau}$ et $P^-(s_1 s_2) > x^\tau$.

À la suite de Heath-Brown, on introduit un paramètre $\xi = o(\tau)$ que l'on explicitera dans les applications du paragraphe 8⁵. Une étape importante dans l'estimation de $S(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ consiste à trier les facteurs de $s_1 s_2$ dans des intervalles du type $[x^{v\xi}, x^{(v+1)\xi}]$ puis à remplacer les occurrences de ces facteurs par $x^{v\xi}$ dans les inégalités $\left(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}) \right)$ et $\left(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}) \right)$, procédure que l'on détaille ci-dessous. Posant $v_0 := \left\lfloor \frac{\log N(\mathbf{i})}{\xi \log x} \right\rfloor$, introduisons les ensembles d'exposants

$$(7.1) \quad \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0)) := \left\{ \vec{v} \in \mathbf{Z}^{n_1} \times \mathbf{Z}^{n_2} : \vec{v} \text{ satisfait } \left(\widehat{E}_j^{(i)}(\mathbf{n}, v_0) \right) \text{ pour } j \ll 1 \right. \\ \left. \text{et } v_k \neq v_l \text{ si } k \neq l \right\}$$

où $\vec{v} := (\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)})$ et $\left(\widehat{E}_j^{(i)}(\mathbf{n}, v_0) \right)$ désigne l'inégalité associée à $\left(E_j^{(i)}(\mathbf{n}, \mathbf{i}) \right)$ définie par

$$\frac{\log Y}{\xi \log x} + (\varepsilon v_0 + 1) < \sum_{k=1}^{k_1} v_{\alpha_k^{(1)}}^{(1)} + \sum_{k=1}^{k_2} v_{\alpha_k^{(2)}}^{(2)}$$

si \prec désigne $<$ ou \leq et

$$\frac{\log Y}{\xi \log x} + \varepsilon v_0 > \sum_{k=1}^{k_1} \left(v_{\alpha_k^{(1)}}^{(1)} + 1 \right) + \sum_{k=1}^{k_2} \left(v_{\alpha_k^{(2)}}^{(2)} + 1 \right)$$

5. Dans ses travaux, Heath-Brown effectue le choix $\xi = (\log \log x)^{-\varpi_2}$ où $\varpi_0 < \varpi_2 < 1$. À la lecture de [HB01], il apparaît en fait que les arguments demeurent valables pour des ξ satisfaisant $(\log x)^{-\varpi_2} \leq \xi$ où $0 < \varpi_2 < 1$, hypothèse que l'on supposera dans la suite.

sinon, ainsi que

$$\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0) := \left\{ (r_1, r_2) : \Omega(r_i) = \omega(r_i) = m_i, \right. \\ \left. (r_1, r_2) \text{ satisfait } \left(\widehat{F}_j^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0) \right) \text{ pour } j \ll 1 \right\}$$

où $\left(\widehat{F}_j^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0) \right)$ désigne l'inégalité associée à $\left(F_j^{(i)}(\mathbf{m}, (s_1, s_2), \mathbf{i}) \right)$ définie par

$$\frac{\log \left(YP^{(\vec{\beta}^{(1)})}(r_1) P^{(\vec{\beta}^{(2)})}(r_2) \right)}{\xi \log x} + (\varepsilon v_0 + 1) < \sum_{l=1}^{l_1} v_{\gamma_l^{(1)}}^{(1)} + \sum_{l=1}^{l_2} v_{\gamma_l^{(2)}}^{(2)}.$$

si \prec désigne \leq ou $<$ et

$$\frac{\log \left(YP^{(\vec{\beta}^{(1)})}(r_1) P^{(\vec{\beta}^{(2)})}(r_2) \right)}{\xi \log x} + \varepsilon v_0 > \sum_{l=1}^{l_1} \left(v_{\gamma_l^{(1)}}^{(1)} + 1 \right) + \sum_{l=1}^{l_2} \left(v_{\gamma_l^{(2)}}^{(2)} + 1 \right).$$

sinon.

Dans ce qui suit, nous adaptons la méthode détaillée au paragraphe 3 de [HB01]. Introduisons, pour $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbf{N}^{n_1} \times \mathbf{N}^{n_2}$, le poids $d_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}, \vec{\mathbf{v}})$ en posant

$$(7.2) \quad d_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}, \vec{\mathbf{v}}) = \frac{\log N(\mathbf{p}_1^{(1)}) \cdots \log N(\mathbf{p}_{n_1}^{(1)}) \log N(\mathbf{p}_1^{(2)}) \cdots \log N(\mathbf{p}_{n_2}^{(2)})}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}}$$

si $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2$ où $\Omega(N(\mathbf{s}_i)) = \Omega_{\mathbf{K}}(\mathbf{s}_i) = n_i$, $\mathbf{s}_i = \mathbf{p}_1^{(i)} \cdots \mathbf{p}_{n_i}^{(i)}$ avec $x^{v_k^{(i)} \xi} \leq N(\mathbf{p}_k^{(i)}) < x^{(v_k^{(i)}+1)\xi}$ pour $1 \leq k \leq n_i$ et $i \in \{1, 2\}$, et $d_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}, \vec{\mathbf{v}}) = 0$ sinon. Posons également, pour tout sous-ensemble \mathcal{R} de \mathbf{N}^2 et toute paire d'idéaux $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ la quantité,

$$(7.3) \quad b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (N(\mathbf{r}_1), N(\mathbf{r}_2)) \in \mathcal{R}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans l'esprit du lemme 3.7 de [HB01], il est naturel d'approcher $S(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ par la quantité

$$\widehat{S}(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) := \sum_{\vec{\mathbf{v}} \in \iota(S^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \widehat{S}(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0))$$

où

$$(7.4) \quad \widehat{S}(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0)) := \sum_{\substack{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{s} \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{s} \in \mathcal{D}}} b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathbf{v}}, v_0)) d_{\mathbf{n}}(\mathbf{s}, \vec{\mathbf{v}}).$$

Il en résulte l'apparition de termes d'erreur

$$(7.5) \quad R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) := \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \left(R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right. \\ \left. + \frac{\eta}{c(N_1, N_2)x} \sigma(\mathbf{i}) R(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right)$$

où, pour $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ ou \mathcal{B} ,

$$R(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) = \left| S(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \widehat{S}(\mathcal{D}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right|.$$

On peut obtenir une borne supérieure de telles quantités en reproduisant les différentes étapes de la démonstration du lemme 3.7 de [HB01].

Lemme 7.1. *Soit $B > 0$. Uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, $y_2 > x^\tau$, w un complexe de module 1, $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ et $\xi \leq \tau^2$, on a pour tout $i \in \{1, \dots, 5\}$,*

$$(7.6) \quad \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \ll \xi \tau^{-6} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sigma(\mathbf{i}) \frac{|h(\mathbf{i})|}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}.$$

Démonstration. On ne décrit ci-dessous que la contribution des termes $R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$, le traitement de $R(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ étant en tout point similaire. Soient \mathbf{i} un idéal tel que $N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}$ et $v_0 = \left\lfloor \frac{\log N(\mathbf{i})}{\xi \log x} \right\rfloor$. Observons l'inégalité triviale

$$R(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \leq R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) + R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) + R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$$

où le terme $R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ est défini comme la différence

$$\left| S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \sum_{\substack{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \\ \mathfrak{ir}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A} \\ d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v}) \neq 0}} b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i})) \right|$$

et résulte de l'introduction de $\iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))$, le terme $R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ provient du remplacement de 1 par $d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v})$, à savoir

$$\sum_{\vec{v} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \sum_{\substack{\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \\ \mathfrak{ir}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2 \in \mathcal{A} \\ d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v}) \neq 0}} |1 - d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2, \vec{v})| b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i}))$$

et le terme $R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ apparaît en remplaçant le terme $\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, (N(\mathfrak{s}_1), N(\mathfrak{s}_2)), \mathbf{i})$ par $\mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0)$ dans $b(\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2, \dots)$.

Dans la mesure où

$$(7.7) \quad d_{\mathbf{n}}(\mathfrak{p}_1^{(1)} \dots \mathfrak{p}_{n_1}^{(1)} \mathfrak{p}_1^{(2)} \dots \mathfrak{p}_{n_2}^{(2)}, \vec{v}) = 1 + O(\xi \tau^{-2})$$

dès que $x^{v_k^{(i)} \xi} \leq N(\mathfrak{p}_k^{(i)}) < x^{(v_k^{(i)} + 1) \xi}$ (cf [[HB01] p.44]), il vient l'inégalité

$$(7.8) \quad R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \ll \xi \tau^{-2} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})).$$

On sépare la suite de la démonstration en deux parties selon que $i = 1$ ou non.

Cas $i \in \{2, \dots, 5\}$. Au vu des définitions (5.9), (5.10), (5.11) et (5.12) de $\mathcal{C}^{(i)}(m, n)$, il existe au plus un couple (m, n) tel que $N(\mathfrak{rs})$ appartienne à $\mathcal{C}^{(i)}(m, n)$. Par suite, on peut observer, en suivant l'argument de la preuve du lemme 3.7 de [HB01] que l'on a, pour tout $N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}$, l'estimation

$$\sum_{\mathbf{m}} R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i})) \ll \sum_{j \ll \tau^{-1}} \sum_{(N(\mathfrak{p}_1), \dots, N(\mathfrak{p}_n)) \in \Delta_j^{(i)}(n)} S(\mathcal{A}, \mathfrak{ip}_1 \dots \mathfrak{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau))$$

où

$$\Delta_j^{(i)}(n) := \{(p_1, \dots, p_n) : x^\tau < p_1 \leq \dots \leq p_n, \\ x^{1+\tau} < p_1 \dots p_n \leq x^{3/2-\tau}, (p_1, \dots, p_n) \text{ satisfait } (E_j^{(i)}(n))\}$$

et $(E_j^{(i)}(n))$ désigne une inégalité de la forme

$$y_1 \leq p_1 \leq y_1 x^\xi, \quad y_2 x^{-\xi} \leq p_n \leq y_2, \quad x^{1-\tau_1-\xi} \leq p_n \leq x^{1-\tau_1}, \quad p_2 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})}$$

$$p_1 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})}, \quad p_1 \cdots p_n = x^{3/2-\tau+O(\xi\tau^{-1})} \text{ ou } p_j \leq p_{j+1} \leq x^\xi p_j.$$

En utilisant les lemmes 6.4 et 6.5, il suit ainsi, pour tout $B \geq 0$, l'estimation

$$\sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \ll \xi \tau^{-4} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}$$

Compte tenu de la borne triviale $\sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})) \leq S(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^-(x^\tau))$, la majoration

$$\sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \ll \xi \tau^{-3} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}$$

est aussi une conséquence immédiate du lemme 6.4 combiné à (7.8).

Considérons à présent $R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$. On remarque que les termes d'erreur qui apparaissent proviennent des idéaux $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ qui satisfont les conditions

$$P^-(N(\mathfrak{s}))x^{-\xi} \leq P^+(N(\mathfrak{r})) \leq P^-(N(\mathfrak{s})) \text{ ou } P^+(N(\mathfrak{s})) \leq P^-(N(\mathfrak{r})) \leq P^+(N(\mathfrak{s}))x^\xi.$$

Lorsque $i \in \{4, 5\}$, on a alors, d'après les lemmes 6.4 et 6.5, l'estimation suivante, valide pour tout $B > 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) &\ll \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathfrak{p}_1) \leq x^{1-\tau_1} \\ N(\mathfrak{p}_2) = x^{O(\xi)} N(\mathfrak{p}_1)}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, C^-(x^\tau)) \\ &\ll \xi \tau^{-3} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

D'autre part, si $i \in \{2, 3\}$, les lemmes 6.4 et 6.5 permettent d'obtenir, en posant $\mathbf{j} = \mathbf{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{l}$, la majoration

$$\begin{aligned} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, C^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) &\ll \sum_{\substack{x^{1+\tau} < N(\mathfrak{p}_1) \\ N(\mathfrak{p}_2) = x^{O(\xi)} N(\mathfrak{p}_1)}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, C^-(x^\tau)) \\ &\ll \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{x^{1+\tau} < N(\mathfrak{p}_1) \\ N(\mathfrak{p}_1\mathfrak{l}) \leq x^{2-\tau} \\ N(\mathfrak{p}_1) = \frac{x^{3+O(\xi)}}{N(\mathfrak{il})} \\ P^-(N(\mathfrak{l})) > x^\tau}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i}\mathfrak{p}_1\mathfrak{l}, C^-(x^\tau)) \\ &\ll \xi \tau^{-2} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B} \end{aligned}$$

valide pour tout $B > 0$. Ceci achève l'estimation de $R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ lorsque $i \in \{2, \dots, 5\}$.

Cas $i = 1$. Dans un premier temps, considérons la contribution issue des ensembles $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (1, 0), \mathbf{i})$ et $\mathcal{C}^{(1)}((2, 0), \mathbf{n}, \mathbf{i})$. En observant que le nombre de couples (\mathbf{m}, \mathbf{n}) dans lequel intervient chaque idéal $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2$ est borné si $N(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2) \leq 3x^3$, les arguments précédents s'adaptent sans difficulté nouvelle, conduisant aux bornes supérieures

$$\sum_{\mathbf{m}} R^{(1)}(\mathbf{m}, (1, 0)) \ll \xi \tau^{-3} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}$$

et

$$\sum_{\mathbf{n}} R^{(1)}((2, 0), \mathbf{n}) \ll \xi \tau^{-4} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}$$

pour tout $B > 0$.

Considérons à présent les ensembles $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i})$ lorsque $n \geq 2$, définis par (5.17). On a la majoration

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{m}} R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i})) \\ & \ll \sum_{j \ll \tau^{-1}} \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_n)) \in \Delta_j^{(1)}(n)} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_j^{(1)}(n) := & \left\{ (p_1, \dots, p_n) : x^\tau < p_1 \leq \dots \leq p_n < x^{1-\tau}, \right. \\ & \left. p_2 \cdots p_n \leq x^{1+\tau} < p_1 \cdots p_n \leq x^{3/2-\tau}, (p_1, \dots, p_n) \text{ satisfait } \left(E_j^{(1)}(n) \right) \right\} \end{aligned}$$

et $\left(E_j^{(1)}(n) \right)$ désigne une inégalité de la forme :

$$x^\tau \leq p_1 \leq x^{\tau+\xi}, \quad p_2 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})}, \quad p_1 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})},$$

$$p_1 \cdots p_n = x^{3/2-\tau+O(\xi\tau^{-1})} \quad \text{ou} \quad p_j \leq p_{j+1} \leq x^\xi p_j.$$

On traite la contribution des inégalités

$$p_1 \cdots p_n = x^{1+\tau+O(\xi\tau^{-1})} \quad \text{et} \quad p_1 \cdots p_n = x^{3/2-\tau+O(\xi\tau^{-1})}$$

en utilisant les lemmes 6.4 et 6.5. En estimant la contribution des idéaux \mathbf{i} , \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 satisfaisant $N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = Y x^{O(\xi\tau^{-1})}$, avec $Y = x^{3/2+\tau}$ ou $x^{2-\tau}$, on observe en effet que

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{P^-(N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)) > x^\tau \\ N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = Y x^{O(\xi\tau^{-1})}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-5} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Supposons $n \geq 3$. Pour les ensembles $\Delta_j^{(1)}(n)$ restants, au moins l'un des p_i n'apparaît pas dans la définition de $E_j(n)$, disons p_n . Observant que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_n)) \in \Delta_j^{(1)}(n)} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}_1))) \\ & \ll \tau^{-1} \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_{n-1}) \\ (N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_{n-1}), 1) \text{ satisfait } \left(E_j^{(1)}(n) \right) \\ N(\mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n-1}) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1 \cdots \mathbf{p}_{n-1}, \mathcal{C}^-(x^\tau)), \end{aligned}$$

on déduit, en utilisant les lemmes 6.4 et 6.5, l'estimation

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\mathbf{m}} \sum_{n \geq 3} R_1(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i})) \\ & \ll \xi \tau^{-6} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Si $n = 2$, l'argument précédent échoue uniquement pour l'inégalité $p_1 < p_2 \leq p_1 x^\xi$. Le cas échéant, il apparaît que $x^{1/2} < p_1 < x^{3/4-\tau/2}$ ce qui permet de majorer cette contribution par

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{x^{1/2} < N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}_2) \leq N(\mathbf{p}_1) x^\xi \leq x^{\frac{3}{4}}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-1} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Par des arguments similaires, les estimations (7.7) et (7.8) permettent de majorer la contribution des termes $R_2(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i}))$ par

$$\begin{aligned} & \ll \xi \tau^{-3} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{n \geq 2 \\ x^\tau < N(\mathbf{p}_2) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_n)}} \sum_{\substack{N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1) x^\xi \\ N(\mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-6} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sigma(\mathbf{i}) \frac{|h(\mathbf{i})|}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Achevons la démonstration du lemme en étudiant la contribution $R_3(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{m}, (n, 0), \mathbf{i}))$ issue de l'inégalité

$$P^-(s) \leq P^-(r_2) \leq P^-(s) x^\xi.$$

Si $n \geq 3$, on majore ce terme d'erreur par

$$\begin{aligned} & \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_n) \\ N(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_{n-1}) \leq x^{1+\tau}}} \sum_{\substack{N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1) x^\xi}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}))) \\ & \ll \tau^{-2} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq \dots \leq N(\mathbf{p}_{n-2}) \\ N(\mathbf{p}_1) < N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1) x^\xi \\ N(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_{n-2}) \leq x^{1+\tau}}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_{n-2}, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-6} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

Lorsque $n = 2$, on a $P^-(s) \leq x^{3/4}$ et la contribution de tels idéaux est inférieure à

$$\begin{aligned} & \ll \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{N(\mathbf{r}_1) \leq x^{1-4\tau_1} \\ P^-(N(\mathbf{r}_1)) > x^\tau}} \sum_{\substack{x^\tau < N(\mathbf{p}_1) \leq x^{1/2}}} \sum_{\substack{N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1) x^\xi}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{p}_1, \mathcal{C}^-(N(\mathbf{p}))) \\ & + \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} |h(\mathbf{i})| \sum_{\substack{x^{1/2} < N(\mathbf{p}_1) \leq x^{3/4}}} \sum_{\substack{N(\mathbf{p}_1) \leq N(\mathbf{p}) \leq N(\mathbf{p}_1) x^\xi}} S(\mathcal{A}, \mathbf{i} \mathbf{p}_1, \mathcal{C}^-(x^\tau)) \\ & \ll \xi \tau^{-4} \frac{\eta^2 x^2}{\log x} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \frac{|h(\mathbf{i})| \sigma(\mathbf{i})}{N(\mathbf{i})} + x^2 (\log x)^{-B}. \end{aligned}$$

□

Au vu du lemme précédent, il convient de montrer que la quantité $\frac{\eta \sigma_0}{c(N_1, N_2) x^3} \sigma(\mathbf{i}) \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ constitue une bonne approximation de $\widehat{S}(\mathcal{A}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$. Estimer $\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$ se ramène à étudier les idéaux $\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_{n_1+n_2}$ tels que le n_1+n_2 -uplet $(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_{n_1+n_2}))$

appartienne à l'ensemble

$$G(\vec{v}, t) := \left\{ \vec{x} \in \mathbf{R}^{n_1+n_2} : x_i \in [x^{v_i\xi}, x^{(v_i+1)\xi}] \text{ pour } 1 \leq i \leq n_1 + n_2 \text{ et } \prod_{i=1}^{n_1+n_2} x_i \leq t \right\}$$

Pour considérer de tels idéaux, Heath-Brown obtient dans [HB01] la généralisation suivante du théorème des idéaux premiers.

Lemme 7.2 ([HB01], Lemma 4.10). *Il existe $c > 0$ tel que, uniformément en $t \geq 1$, $x \geq 2$, $1 \leq n \ll \tau^{-1}$ et $\vec{v} \in \mathbf{N}^n$ satisfaisant $\tau \leq v_j \xi$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on ait*

$$(7.9) \quad \sum_{(N(\mathbf{p}_1), \dots, N(\mathbf{p}_n)) \in G(\vec{v}, t)} \prod_{i=1}^n \log N(\mathbf{p}_i) = w(t) + O\left(t \exp\left(-c\sqrt{\log x^\tau}\right)\right)$$

où $w(t) = w(\vec{v}, t)$ désigne la mesure de $G(\vec{v}, t)$.

Le comportement analytique de la fonction w définie dans le lemme 7.2 a été étudié dans le paragraphe 8 de [HB01].

Lemme 7.3 (Formules (8.3) et (8.4) de [HB01]). *Pour $t > 0$, $h \geq 0$ et $n \geq 2$, on a*

$$|w'(t+h) - w'(t)| \leq \frac{h}{t} (\xi \log x)^{n-2}$$

et

$$0 \leq w'(t) \leq (\xi \log x)^{n-1}.$$

De plus, si $n = 1$, alors la dérivée à droite $w'(v_1, t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[x^{v_1\xi}, x^{(v_1+1)\xi}]$.

En reproduisant l'argument développé dans le paragraphe 10 de [HB01], on peut utiliser le lemme 7.2 pour obtenir une estimation de $\hat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}))$.

Lemme 7.4. *Soit $i \in \{1, \dots, 5\}$. Uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$ et $v_0 \geq 0$, on a l'estimation*

$$(7.10) \quad \left| \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left| \hat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) - \frac{c(N_1, N_2)\eta x^3}{N(\mathbf{i})} \sum_{\vec{v} \in \iota(S^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0), \vec{v}) \right| \right| \ll \frac{\eta^2 c(N_1, N_2) x^3}{\xi^2 N(\mathbf{i})}$$

où, pour tout sous-ensemble $\mathcal{R} \subset \mathbf{N}^2$,

$$(7.11) \quad \Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}, \vec{v}) := \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R})}{v_1^{(1)} \dots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \dots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2} N(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} w' \left(\frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right).$$

Démonstration. Compte tenu des définitions (7.1), (7.3) et (7.4), il suffit de montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\vec{v} \in \mathbf{N}^n$ tel que $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$ et tout ensemble $\mathcal{R}(\mathbf{m})$ tel que

$$\mathcal{R}(\mathbf{m}) \subset \{(r_1, r_2) : \Omega(r_1) = \omega(r_1) = m_1, \Omega(r_2) = \omega(r_2) = m_2 \text{ et } P^-(r_1 r_2) > x^\tau\},$$

on a

$$(7.12) \quad \sum_{\mathbf{m}} \left| \hat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) - c(N_1, N_2) x^3 \eta \frac{\Sigma(\mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v})}{N(\mathbf{i})} \right| \ll \frac{\eta^2 c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathbf{i}) v_1 \dots v_n}$$

où

$$\hat{S}(\mathcal{B}, \mathbf{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) := \sum_{\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{s} \in \mathcal{B}} b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m})) d_n(\mathbf{s}, \vec{v}),$$

$$d_n(\mathfrak{s}, \vec{v}) = \begin{cases} \frac{\log N(\mathfrak{p}_1) \cdots \log N(\mathfrak{p}_n)}{v_1 \cdots v_n (\xi \log x)^n} & \text{si } \mathfrak{s} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \text{ avec } N(\mathfrak{p}_i) \in [x^{v_i \xi}, x^{(v_i+1)\xi}], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\Sigma(\mathfrak{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) = \sum_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2} \frac{b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{v_1 \cdots v_n (\xi \log x)^n N(\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} w' \left(\frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} \right).$$

Une fois cette estimation établie, la majoration (7.10) se déduira directement de l'inégalité

$$(7.13) \quad \sum_n \sum_{\vec{v} \in \mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0)} \frac{1}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)}} \leq \left(\sum_n \frac{1}{n!} \left(\sum_{v \leq \xi^{-1}} \frac{1}{v} \right)^n \right)^2 \ll \xi^{-2}.$$

À la suite de [[HB01], Section 10], observons tout d'abord que

$$(7.14) \quad \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}(\mathbf{m}), \vec{v}) = \sum_{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2} \frac{b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{v_1 \cdots v_n (\xi \log x)^n} \sum_{\substack{x^{v_1 \xi} \leq N(\mathfrak{p}_1) < x^{(v_1+1)\xi} \\ \vdots \\ x^{v_n \xi} \leq N(\mathfrak{p}_n) < x^{(v_n+1)\xi} \\ \frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} < N(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n) \leq \frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} (1+\eta)}} \prod_{i=1}^n \log N(\mathfrak{p}_i).$$

Le lemme 7.2 permet d'estimer la somme intérieure, ainsi égale à

$$(7.15) \quad w \left(\frac{c(N_1, N_2) x^3 (1+\eta)}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} \right) - w \left(\frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} \right) + O \left(\frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} \exp(-c\sqrt{\log x^\tau}) \right).$$

Supposons que $n \neq 1$. Le théorème des accroissements formules et le lemme 7.3 entraînent

$$(7.16) \quad w \left(\frac{c(N_1, N_2) x^3 (1+\eta)}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} \right) - w \left(\frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} \right) = \frac{c(N_1, N_2) \eta X^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} \left(w' \left(\frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} \right) + O \left(\eta (\xi \log x)^{n-2} \right) \right)$$

ce qui implique (7.12).

Dans le cas $n = 1$, la dérivée à droite w' étant la fonction caractéristique de $[x^{v_1 \xi}, x^{(v_1+1)\xi}]$, il s'ensuit que l'estimation (7.16) est valide sauf éventuellement lorsque $\frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} \leq x^{v \xi} \leq \frac{c(N_1, N_2) x^3 (1+\eta)}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)}$ avec $v = v_1$ ou $v_1 + 1$. Pour estimer la contribution de ces derniers idéaux, il suffit d'observer que, d'après le théorème 3.6, on a

$$\sum_{N(\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2) = \frac{c(N_1, N_2) x^{3-v\xi}}{N(\mathfrak{i})} (1+O(\eta))} \frac{b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}(\mathbf{m}))}{N(\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)} \ll \sum_{N(\mathfrak{j}) = \frac{c(N_1, N_2) x^{3-v\xi}}{N(\mathfrak{i})} (1+O(\eta))} \frac{e^{c\tau^{-1}}}{N(\mathfrak{j})} \ll \eta e^{c\tau^{-1}}.$$

□

En raison du phénomène de parité, l'argument de la preuve précédente ne permet pas d'estimer l'analogue de (7.14) avec \mathcal{A} , à savoir

$$\sum_{\substack{x^{v_1\xi} \leq N(\mathfrak{p}_1) < x^{(v_1+1)\xi} \\ \vdots \\ x^{v_n\xi} \leq N(\mathfrak{p}_n) < x^{(v_n+1)\xi} \\ \mathfrak{i}\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{A}}} \prod_{i=1}^n \log N(\mathfrak{p}_i).$$

En vue de lever cette obstruction et de contourner partiellement la dépendance en \mathbf{n} dans la somme précédente, introduisons, en nous inspirant des notations (5.10), (5.11) et (5.12) de [HBM02], les quantités

$$\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i})) := \sum_{\vec{\mathfrak{v}} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathfrak{v}}, v_0))$$

où

$$\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathfrak{v}}, v_0)) := \sum_{\mathfrak{i}\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s} \in \mathcal{A}} b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathfrak{v}}, v_0)) e_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})$$

avec

$$(7.17) \quad e_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) := \frac{w'(N(\mathfrak{s}))}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}} \sum_{\substack{\mathfrak{j}|\mathfrak{s} \\ N(\mathfrak{j}) < x^{\tau/2}}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathfrak{j})} \right).$$

Compte tenu de la définition de w et du lemme 7.3, on peut observer que $e_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})$ et $d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})$ sont

$$(7.18) \quad \begin{cases} \ll \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{s}) \log x & \text{si } 0 \leq \frac{\log N(\mathfrak{s})}{\xi \log x} - (v_1^{(1)} + \cdots + v_{n_1}^{(1)} + v_1^{(2)} + \cdots + v_{n_2}^{(2)}) \leq n_1 + n_2, \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le lemme suivant, nous estimons asymptotiquement la quantité $\widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i}))$. Les estimations de Type I combinées à la formule de Perron permettent de la relier à $\widehat{S}(\mathcal{B}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i}))$ en suivant l'argument développé au paragraphe 10 de [HB01].

Lemme 7.5. *Soit $i \in \{1, \dots, 5\}$. Uniformément pour $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et $v_0 \geq 1$, on a l'estimation*

$$\sum_{\substack{N(\mathfrak{i}) \in \mathcal{I} \\ x^{v_0} \leq N(\mathfrak{i}) < x^{(v_0+1)\xi}}} \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left| \widehat{S}_e(\mathcal{A}, \mathfrak{i}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathfrak{i})) - \sigma_0 \eta^2 x^2 \frac{\sigma(\mathfrak{i})}{N(\mathfrak{i})} \sum_{\vec{\mathfrak{v}} \in \iota(\mathcal{S}^{(i)}(\mathbf{n}, v_0))} \Sigma(\mathfrak{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{\mathfrak{v}}, v_0), \vec{\mathfrak{v}}) \right| \ll \eta^{\frac{11}{5}} x^2 (\log x)^c$$

où $\Sigma(\mathfrak{i}, \mathcal{R}, \vec{\mathfrak{v}})$ est défini par (7.11).

Démonstration. Dans l'esprit de la preuve du lemme 3.9 de [HB01] et compte tenu du lemme 2.3, commençons par remplacer $w'(N(\mathfrak{s}_1 \mathfrak{s}_2))$ par $w'(\frac{c(N_1, N_2) x^3}{N(\mathfrak{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2)})$. Si $n_1 + n_2 \geq 2$,

on utilise successivement le lemme 7.3, l'inégalité de Hölder et le lemme 2.1 de sorte que

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\mathbf{i}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \in \mathcal{A}}} \frac{b(\cdots)}{(\xi \log x)^{n_1+n_2}} \left| w'(N(\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2)) - w' \left(\frac{c(N_1, N_2)x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right) \right| \left| \sum_{\substack{\mathbf{j} | \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \\ N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right) \right| \\
& \ll \frac{\eta^{\frac{1}{4}}}{\xi^2 \log x} \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{A}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{j})^5 \\
& \ll \frac{\eta^{\frac{1}{4}}}{\xi^2 \log x} \# \mathcal{A}^{39/40} \left(\sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq 2x} \tau_{\mathbf{K}}(n_1 + n_2 \sqrt[3]{2})^{200} \right)^{1/40} \\
& \ll \eta^{\frac{11}{5}} x^2 (\log x)^c.
\end{aligned}$$

Considérons à présent le cas $n_1 + n_2 = 1$. La formule $w'(N(\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2)) = w' \left(\frac{c(N_1, N_2)x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right)$ est vraie excepté pour les idéaux qui satisfont $N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = c(N_1, N_2)x^{3-v\xi}(1 + O(\eta^{\frac{1}{4}}))$ pour $v = v_1$ ou $v_1 + 1$. Par suite, en utilisant le lemme 3.4, on peut majorer le terme d'erreur ainsi engendré par

$$\begin{aligned}
& \ll \xi^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{i}, \mathbf{s} \\ N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{s}) \sum_{\substack{N(\mathbf{i} \mathbf{r}) = c(N_1, N_2)x^{3-v\xi}(1+O(\eta^{\frac{1}{4}})) \\ \mathbf{i} \mathbf{r} \mathbf{s} \in \mathcal{A}}} \tau_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) \\
& \ll \xi^{-1} \left(\sum_{\substack{N(\mathbf{j}) \ll x^{2-\tau/2} \\ N(\mathbf{j}) = c(N_1, N_2)x^{3-v\xi}(1+O(\eta^{\frac{1}{4}}))}} \# \mathcal{A}_{\mathbf{j}} \right)^{44/45} \left(\sum_{1 \leq n_1, n_2 \leq x} \tau_{\mathbf{K}}(n_1 + n_2 \sqrt[3]{2})^{135} \right)^{1/45} \\
& \ll \eta^{\frac{11}{5}} x^2 (\log x)^c.
\end{aligned}$$

Définissons

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 \left(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0) \right) &:= \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \frac{b(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0))}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)} (\xi \log x)^{n_1+n_2}} w' \left(\frac{c(N_1, N_2)x^3}{N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} \right) \\
&\quad \times \sum_{N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \# \mathcal{A}_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{j}} \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right).
\end{aligned}$$

Dans la mesure où $N(\mathbf{i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{j}) \ll x^{2-\tau/2}$, le lemme 3.4 combiné à l'estimation $\alpha(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) = 1 + O\left(\frac{1}{\tau x^\tau}\right)$ entraînent, pour tout $B > 0$, l'inégalité

$$\begin{aligned}
& \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \sum_{\mathbf{m}} \left| \Sigma_1 \left(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0) \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \Sigma \left(\mathbf{i}, \mathcal{R}^{(i)}(\mathbf{m}, \vec{v}, v_0), \vec{v} \right) \sum_{N(\mathbf{j}) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha(\mathbf{j})}{N(\mathbf{j})} \mu_{\mathbf{K}}(\mathbf{j}) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(\mathbf{j})} \right) \right| \\
(7.19) \quad & \ll \frac{x^2}{v_1^{(1)} \cdots v_{n_1}^{(1)} v_1^{(2)} \cdots v_{n_2}^{(2)}} (\log x)^{-B}.
\end{aligned}$$

Il s'agit à présent d'étudier la somme sur j . Écrivons

$$(7.20) \quad \sum_{N(j) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha(j)}{N(j)} \mu_{\mathbf{K}}(j) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(j)} \right) = \alpha(\mathbf{i}) \sum_{m < x^{\tau/2}} \frac{\widehat{\xi}(\mathbf{i}, m)}{m} \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{m} \right)$$

où $\widehat{\xi}(\mathbf{i}, \cdot)$ est la fonction multiplicative définie par

$$(7.21) \quad \widehat{\xi}(\mathbf{i}, p^k) := \sum_{N(j)=p^k} \mu_{\mathbf{K}}(j) \frac{\alpha(j)}{\alpha(\mathbf{i})}$$

lorsque $\alpha(\mathbf{i}) \neq 0$.

En reprenant un à un les arguments de Heath-Brown conduisant à [[HB01], (10.4)], on observe, en appliquant la formule de Perron à la série de Dirichlet $\zeta_{\widehat{\xi}(\mathbf{i}, \cdot)}(s)$ engendrée par $\widehat{\xi}(\mathbf{i}, \cdot)$, que l'on a

$$\sum_{N(j) < x^{\tau/2}} \frac{\alpha(j)}{N(j)} \mu_{\mathbf{K}}(j) \log \left(\frac{x^{\tau/2}}{N(j)} \right) = \frac{\pi^2 \sigma_0 \sigma(\mathbf{i})}{6} + O \left(\exp \left(-c \sqrt{\log x^{\tau/2}} \right) \right).$$

□

L'estimation du terme d'erreur qui apparaît avec le remplacement de $d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})$ par $e_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})$ a constitué le tour de force majeur des travaux de Heath-Brown (voir à ce sujet les paragraphes 8, 9 et 11 à 13 de [HB01]). De telles estimations de sommes, dites de Type II, se révèlent être l'ingrédient nécessaire pour s'affranchir du phénomène de parité.

Lemme 7.6. *Soit $B \geq 0$. Uniformément pour $h : \mathcal{J}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{C}$ bornée par 1 et $b : \mathcal{J}(\mathbf{K})^2 \rightarrow [-1, 1]$, $x \geq 2$, $x^{1+\tau} \leq V \leq x^{\frac{3}{2}-\tau}$ et $\xi \leq \tau$, on a*

$$S_V := \sum_{\substack{\mathbf{i}, \mathfrak{s}, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) \\ \mathbf{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s} \in \mathcal{A} \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V}} h(\mathbf{i}) b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) (d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) - e_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})) \ll x^2 (\log x)^{-B}$$

où la constante implicite dépend du zéro de Siegel.

Démonstration. La preuve étant calquée sur les arguments développés dans [HB01] et [HBM04], nous nous contentons ici de souligner les différences. Introduisons l'ensemble des idéaux primitifs, à savoir

$$\mathcal{P} := \{j \in \mathcal{J}(\mathbf{K}) : p \mathcal{O}_{\mathbf{K}} \nmid j \text{ pour tout premier } p\}$$

et observons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$.

En vue de s'affranchir de la condition de coprimauté dans la définition de \mathcal{A} , écrivons, à l'aide du principe d'inclusion-exclusion, la relation

$$S_V = \sum_{m \geq 1} \mu(m) S_V(m)$$

où

$$S_V(m) := \sum_{\mathbf{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{P}} h(\mathbf{i}) b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ \mathbf{i} \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)}} d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) - e_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})$$

et

$$\mathcal{A}(m) = \left\{ n_1 + n_2 \sqrt[3]{2} : (n_1, n_2) \in C(N_1, N_2), m \mid (n_1, n_2) \right\}.$$

Soit $M \geq 1$ un paramètre qui sera explicité plus tard. Au vu de (7.18), du lemme 2.1 et de la borne sur b et h , on estime la contribution des entiers $m > M$ en s'inspirant de la majoration (11.2) de [HB01] par

$$(7.22) \quad \sum_{m > M} \left| \sum_{\mathfrak{ir}_1 \mathfrak{r}_2 \in \mathcal{P}} h(\mathfrak{i}) b(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{P} \\ V < N(\mathfrak{s}) \leq 2V \\ \mathfrak{ir}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s} \in \mathcal{A}(m)}} d_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}}) \right| \leq \log x \sum_{m > M} \sum_{\mathfrak{j} \in \mathcal{A}(m)} \tau_{\mathbf{K}}(\mathfrak{j})^4 \ll \frac{x^2}{M} (\log x)^c.$$

Une estimation similaire est valide pour la contribution des $e_n(\mathfrak{s}, \vec{\mathfrak{v}})$.

Pour traiter les entiers $m \leq M$, on suit essentiellement la démarche développée dans la preuve du lemme 3.10 de [HB01]. Soit $Y \ll x^{7/3}$ un paramètre qui sera explicité en fin de preuve. À la suite de Heath-Brown, on introduit un système de générateurs d'idéaux primitifs à travers la condition

$$N(\beta)^{1/3} \varepsilon_0^{-1/2} < \beta \leq N(\beta)^{1/3} \varepsilon_0^{1/2}$$

et on note $\hat{\beta}$ les coordonnées de β dans la base $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$. En reprenant les arguments des chapitres 11 et 12 de [HB01], on obtient l'existence de $Vx^{-1}Y^{-1} < \Delta \ll Vx^{-1}$, $Y^2 < Z \leq 2Y^2$ et d'un cube $\mathfrak{C} := \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ tels que l'on ait la majoration suivante, analogue de [[HB01], Lemma 12.2],

$$(7.23) \quad S_V(m) \ll x^2 Y^{-1/2} (\log x)^c + x^{3/2} V^{-1/2} Y^7 S_V^{(1)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C})^{1/2} (\log x)^c$$

$$S_V^{(1)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}) := \sum_{D \in \left[\frac{Z-1}{Y^2} \Delta, \frac{Z}{Y^2} \Delta \right]} \left| \sum_{dD \leq d_0} \mu(d) S^{(2)}(m, d, D, \mathfrak{C}) \right|$$

avec

$$S^{(2)}(m, d, D, \mathfrak{C}) := \sum_{\substack{(\beta_1), (\beta_2) \in \mathcal{P} \\ \hat{\beta}_1 \in \mathfrak{C}_1, \hat{\beta}_2 \in \mathfrak{C}_2 \\ dD | \hat{\beta}_1 \wedge \hat{\beta}_2}} f_n(\beta_1, \vec{\mathfrak{v}}) f_n(\beta_2, \vec{\mathfrak{v}}) \epsilon_{m,D}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2),$$

où

$$f_n(\beta, \vec{\mathfrak{v}}) = d_n(\beta \mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \vec{\mathfrak{v}}) - e_n(\beta \mathcal{O}_{\mathbf{K}}, \vec{\mathfrak{v}}),$$

$$\epsilon_{m,D}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) := \begin{cases} 1 & \text{si } mD | p_1(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2), p_2(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2), q_1(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2), q_2(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

les formes cubiques p_1, p_2, q_1, q_2 étant définies dans le chapitre 12 de [HB01]. En reprenant *mutatis mutandis* les arguments de [[HBM04], Section 5] basés sur l'introduction de caractères additifs, on peut réécrire $S^{(2)}(m, d, D, \mathfrak{C})$ sous la forme

$$S^{(2)}(m, d, D, \mathfrak{C}) = \frac{1}{(mdD)^6} \sum_{\substack{\lambda \in (\mathbf{Z}/(dD)\mathbf{Z})^* \\ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in (\mathbf{Z}/(mdD)\mathbf{Z})^3}} T(\lambda, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) S(mdD, \mathbf{b}_1, \mathfrak{C}_1) S(mdD, \mathbf{b}_2, \mathfrak{C}_2)$$

avec

$$S(l, \mathbf{b}_i, \mathfrak{C}_i) = \sum_{\substack{\hat{\beta} \in \mathfrak{C}_i \cap \mathbf{Z}^3 \\ (\beta) \in \mathcal{P}}} e\left(\frac{\mathbf{b}_i \cdot \hat{\beta}}{l}\right) f_n(\beta, \vec{\mathfrak{v}}).$$

et

$$T(\lambda, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) := \sum_{\eta_3, \eta_4, \eta_5} e\left(-\frac{(\mathbf{b}_1 + \lambda \mathbf{b}_2) \cdot \eta_5}{dD}\right) e\left(-\frac{(\mathbf{b}_1 + \lambda \mathbf{b}_2) \cdot \eta_4 + dD \mathbf{b}_2 \cdot \eta_3}{mdD}\right)$$

où la sommation porte sur les $\eta_3, \eta_4 \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ et $\eta_5 \in \mathbf{Z}/(dD)\mathbf{Z}$ satisfaisant

$$H_{ij}(\eta_4, \lambda\eta_4 + dD\eta_3) \equiv 0 \pmod{mD}.$$

La propriété d'orthogonalité des caractères additifs et la majoration triviale entraînent que

$$|T(\lambda, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)| \leq \begin{cases} (dD)^3 m^6 & \text{si } \mathbf{b}_1 + \lambda \mathbf{b}_2 \equiv 0 \pmod{dD}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, si $T(\lambda, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) \neq 0$, alors \mathbf{b}_2 est déterminé de manière unique modulo dD par la donnée de λ et de \mathbf{b}_1 . L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne alors l'estimation

$$S^{(2)}(m, d, D, \mathfrak{C}) \ll \frac{m^3}{(dD)^2} \max_{i=1,2} \sum_{\mathbf{b} \pmod{mdD}} |S(mdD, \mathbf{b}, \mathfrak{C}_i)|^2.$$

Afin d'appliquer une inégalité de grand crible, on réduit les phases $\mathbf{b}(mdD)^{-1}$ à des phases irréductibles $\mathbf{b}l^{-1}$, c'est-à-dire telles que $(l, b_1, b_2, b_3) = 1$, en suivant [[HB01], p. 78]. On remarque pour cela qu'une phase $\mathbf{b}l^{-1}$ apparaît avec un poids qui peut être majoré uniformément en m par

$$\sum_{D \geq Vx^{-1}Y^{-1}} \sum_{\substack{d \\ l \mid mdD}} \frac{m^3}{(dD)^2} \ll m^5 \sum_{\substack{v \geq Vx^{-1}Y^{-1} \\ l \mid v}} \frac{\tau(v)}{v^2} \ll m^5 \frac{\tau(l)}{l} xY \frac{\log V}{V}.$$

Au vu de la condition $dD \leq d_0$, on en déduit que

$$(7.24) \quad S_V^{(1)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}) \ll \frac{m^5 xY (\log x)^c}{V} \max_{i=1,2} \sum_{l \leq md_0} \frac{\tau(l)}{l} \sum_{\mathbf{b} \pmod{l}}^{(l)} |S(l, \mathbf{b}, \mathfrak{C}_i)|^2$$

où la sommation $\sum^{(l)}$ porte sur les vecteurs $\mathbf{b} \pmod{l}$ tels que $(l, b_1, b_2, b_3) = 1$. On peut alors reproduire étape par étape les arguments du paragraphe 13 de [HB01] pour majorer la somme du membre de droite de (7.24). Il s'ensuit la majoration

$$(7.25) \quad S_V^{(1)}(m, Z, \Delta, \mathfrak{C}) \ll m^8 xV \left(YQ_1^{-1/4} + Y^{46} x^{-\tau/2} \right) (\log x)^c$$

où $Q_1 := (\log x)^{c(B)}$ avec $c(B) > 0$ une constante qui peut-être choisie arbitrairement grande.

En combinant les estimations (7.22), (7.23) et (7.25) avec les choix $Y = M^4$ et $M = Q_1^{1/288}$, on obtient finalement

$$S_V \ll x^2 (\log x)^{-B}.$$

L'uniformité du résultat en $(\log x)^{-\varpi_2} \leq \xi \leq \tau$ ainsi que la non-effectivité de la constante implicite sont des conséquences directes de la preuve du lemme 3.8 de [HB01]. \square

En conclusion de cette partie, on peut énoncer une borne supérieure du terme d'erreur $S(|h|)$ défini par (5.22).

Proposition 7.7. *Soit $B > 0$. Il existe une constante $c(B) > 0$ telle que, pour tout $c_0 > c(B)$ et uniformément en $x \geq 2$, $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, $y_2 > x^\tau$, $y_1 = 1$ ou $y_1 > x^\tau$, w un complexe de module 1, $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ et $(\log x)^{-\tau} \leq \xi \leq \tau^2$, on ait*

$$S(|h|) \ll \eta^2 x^2 (\log x)^{-B} + \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$$

pour le choix $\eta := (\log x)^{-c_0}$, où les $R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ sont définis par (7.5).

Démonstration. Soit $c_1 > 0$. Puisqu'il y a au plus $O(\xi^{-1})$ choix possibles pour chaque v_i et compte tenu de l'hypothèse $(\log x)^{-\tau} \leq \xi$, les lemmes 7.4, 7.5 et 7.6 entraînent l'existence d'une constante $c_2 > 0$ indépendante de c_1 et η telle que, pour $i \in \{1, \dots, 5\}$,

$$\sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \left| \widehat{S}(\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) - \frac{\eta \sigma_0}{c(N_1, N_2)x} \sigma(\mathbf{i}) \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right| \\ \ll x^2 \left(\eta^{\frac{11}{5}} + (\log x)^{-c_1} \right) (\log x)^{c_2}.$$

En choisissant $c(B) = 5(c_2 + B)$ et $c_1 = 2c_0 + c_2 + B$ et en utilisant la formule

$$S(|h|) \leq \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \sum_{N(\mathbf{i}) \in \mathcal{I}} \left| \widehat{S}(\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i}) - \frac{\eta \sigma_0}{c(N_1, N_2)x} \sigma(\mathbf{i}) \widehat{S}(\mathcal{B}, \mathcal{C}^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{i})) \right| \\ + \sum_{i=1}^5 \sum_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} R^{(i)}(\mathbf{m}, \mathbf{n}),$$

on en déduit le résultat. \square

8. APPLICATIONS DE LA MÉTHODE

Compte tenu des résultats des paragraphes précédents, il est possible d'estimer les différentes quantités intervenant dans la proposition 5.2, ce qui conduit au résultat suivant.

Proposition 8.1. *Soit $\varepsilon > 0$. Uniformément en $x \geq 2$, $y_2 > \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, w un complexe de module 1, $h \in \mathcal{M}(w; 1, y_2)$ et $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$, on a*

$$(8.1) \quad M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta \sigma_0}{c(N_1, N_2)x} M_{\sigma h}(\mathcal{B}) \ll \frac{\eta^2 x^2}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}.$$

D'autre part, si $h \in \mathcal{M}(w; y_1, y_2)$ où $y_1 > \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right)$, alors on a

$$(8.2) \quad M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta \sigma_0}{c(N_1, N_2)x} M_{\sigma h}(\mathcal{B}) \ll \frac{\eta^2 x^2}{\log y_1 \log y_1 (\log \log x)^{1-\varepsilon}} \log x.$$

Si, de plus, $\exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}}\right) \leq y_1 \leq y_2 \leq x^{1/2-\varepsilon}$, alors on peut remplacer dans (8.1) et (8.2) le terme $1/(\log \log x)^{1-\varepsilon}$ par $\exp\left(-(\log \log x)^{1/2-\varepsilon}\right)$.

Démonstration. Soient $\tau := (\log \log x)^{\varepsilon/2-1}$ et $\tau_1 := (\log \log x)^{\varepsilon-1}$. Les lemmes 6.1, 6.3 et 6.7 fournissent une borne supérieure des quantités $\Delta_0(|h|)$, $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1})$ et $T(|h|)$ qui est négligeable, compte tenu des choix de τ et τ_1 . En utilisant la proposition 7.7 avec le choix $\xi := \tau^7$, le lemme 7.1, ainsi que la majoration (6.17), on obtient d'autre part l'estimation

$$S(|h|) \ll \tau \eta^2 x^2.$$

Enfin, le lemme 6.6 permet d'estimer $\Delta_1(|h|)$ et $\Delta_2(|h|)$, ce qui conduit à (8.1).

L'estimation (8.2) s'obtient en utilisant (6.16) en lieu et place de (6.15) et en notant que $\Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) = 0$.

Supposons à présent que $y_2 \leq x^{1/2-\varepsilon}$ et posons $\tau := (\log \log x)^{\varepsilon/2-1/2}$ et $\tau_1 := \varepsilon/2$. Sous ces conditions, on observe que seuls interviennent les éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}^{(5)}$ dans la discussion du paragraphe 5. On a alors

$$M_h(\mathcal{A}) - \frac{\eta \sigma_0}{c(N_1, N_2)x} M_{\sigma h}(\mathcal{B}) \ll S(|h|) + \Theta(|h|, x^\tau, x^{\tau_1}) + \Delta_0(|h|).$$

On en déduit le résultat en utilisant là encore les lemmes 6.1 et 6.3, la proposition 7.7 avec le choix $\xi := (\log x)^{-\tau}$ ainsi que le lemme 7.1. \square

En combinant le résultat précédent avec les ordres moyens établis dans le paragraphe 4.2, on peut en déduire les théorèmes 1.1 et 1.3 et le corollaire 1.2.

Preuve du théorème 1.1 et du corollaire 1.2. La proposition 4.2 entraîne que, uniformément en $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ et dans le domaine (1.8) défini par

$$x \geq 3, \quad \exp\left(\frac{\log x}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}\right) \leq y \leq 3x^3,$$

on a

$$\frac{\eta\sigma_0}{c(N_1, N_2)x} M_{\sigma_{1S(y)}}(\mathcal{B}) = \frac{6\eta^2 x^2}{\pi^2} \rho(3u) \left(1 + O\left(\log \log x \frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right).$$

En sommant sur les différents $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}(\eta)$ (voir la formule (2.8)), le théorème 1.1 découle de la proposition 8.1.

Pour démontrer le corollaire 1.2, on peut se restreindre au domaine (1.8), le résultat étant une conséquence de [dlBB06], Corollary 1] lorsque $u \geq (\log \log x)^{1-\varepsilon}$ (voir la remarque qui suit le corollaire 1.2). Considérons la convolution

$$\Psi(\mathcal{K} \cdot x, y) = \sum_{m \leq \log x} \Psi^{(1)}\left(\mathcal{K} \cdot \frac{x}{m}, y\right) + O\left(\sum_{m > \log x} \frac{x^2}{m^2}\right).$$

Le corollaire s'obtient comme conséquence du théorème 1.1, puisque l'on a, d'après (4.27), la suite d'estimations

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq (\log x)^B} \frac{\rho\left(3u - \frac{\log m}{\log y}\right)}{m^2} &= \rho(3u) \sum_{m \leq (\log x)^B} \frac{1}{m^2} \left(1 + O\left(\frac{\log m \log(u+1)}{\log y}\right)\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6} \rho(3u) \left(1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right). \end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 1.3. Soit $h \in \mathcal{M}(w)$. La proposition 4.1 permet d'évaluer $M_{\sigma h}(\mathcal{B})$:

$$M_{\sigma h}(\mathcal{B}) = c(N_1, N_2) \eta x^3 (3 \log x)^{w-1} \left(\frac{\sigma(h)}{\Gamma(w)} + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right)\right)$$

Le théorème 1.3 apparaît alors comme une conséquence directe de la proposition 8.1 et de (2.8), dans la mesure où l'hypothèse $|w-1| \geq \frac{1}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}$ implique l'estimation $(\log x)^{w-1} \ll \frac{1}{(\log \log x)^{1-\varepsilon}}$. □

RÉFÉRENCES

- [BBDT12] A. Balog, V. Blomer, C. Dartyge, and G. Tenenbaum, *Friable values of binary forms*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no. 3, 639–667.
- [Bom76] E. Bombieri, *The asymptotic sieve*, Rend. Accad. Naz. XL (5) **1/2** (1975/76), 243–269 (1977).
- [Cho65] S. Chowla, *The Riemann hypothesis and Hilbert's tenth problem*, Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim) **38** (1965), 62–64.
- [CP05] R. Crandall and C. Pomerance, *Prime numbers, a computational perspective*, second ed., Springer, New York, 2005.
- [Dan99] S. Daniel, *On the divisor-sum problem for binary forms*, J. Reine Angew. Math. **507** (1999), 107–129.
- [dB66] N. G. de Bruijn, *On the number of positive integers $\leq x$ and free prime factors $> y$. II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 69=Indag. Math. **28** (1966), 239–247.
- [Del71] F. Delmer, *Sur la somme de diviseurs $\sum_{k \leq x} \{d[f(k)]\}^s$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **272** (1971), A849–A852.
- [dlBB06] R. de la Bretèche and T. D. Browning, *Sums of arithmetic functions over values of binary forms*, Acta Arith. **125** (2006), no. 3, 291–304.

- [dlBT12] R. de la Bretèche and G. Tenenbaum, *Moyennes de fonctions arithmétiques de formes binaires*, *Mathematika* **58** (2012), no. 2, 290–304.
- [dlBT13] ———, *Sur la conjecture de Manin pour certaines surfaces de Châtelet*, *J. Inst. Math. Jussieu* **12** (2013), no. 4, 759–819.
- [FI10] J. Friedlander and H. Iwaniec, *Opera de cribro*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 57, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [Gre70] G. Greaves, *On the divisor-sum problem for binary cubic forms*, *Acta Arith.* **17** (1970), 1–28.
- [Gre71] ———, *Large prime factors of binary forms*, *J. Number Theory* **3** (1971), 35–59.
- [Gre92] ———, *Power-free values of binary forms*, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **43** (1992), no. 169, 45–65.
- [HB01] D. R. Heath-Brown, *Primes represented by $x^3 + 2y^3$* , *Acta Math.* **186** (2001), no. 1, 1–84.
- [HBM02] D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz, *Primes represented by binary cubic forms*, *Proc. London Math. Soc. (3)* **84** (2002), no. 2, 257–288.
- [HBM04] ———, *On the representation of primes by cubic polynomials in two variables*, *Proc. London Math. Soc. (3)* **88** (2004), no. 2, 289–312.
- [Hel] H. A. Helfgott, *The parity problem for irreducible cubic forms*, <http://arxiv.org/abs/math/0501177>.
- [HR74] H. Halberstam and H.-E. Richert, *Sieve methods*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1974, London Mathematical Society Monographs, No. 4.
- [HTW08] G. Hanrot, G. Tenenbaum, and J. Wu, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. II*, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **96** (2008), no. 1, 107–135.
- [Lac14] A. Lachand, *Entiers friables et formes binaires*, Thèse, Université de Lorraine, 2014.
- [Sel52] A. Selberg, *On elementary methods in primenumber-theory and their limitations*, Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim, 1949, Johan Grundt Tanums Forlag, Oslo, 1952, pp. 13–22.
- [Shi80] P. Shiu, *A Brun-Titchmarsh theorem for multiplicative functions*, *J. Reine Angew. Math.* **313** (1980), 161–170.
- [Ten90] G. Tenenbaum, *Sur une question d’Erdős et Schinzel*, A tribute to Paul Erdős, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, pp. 405–443.
- [Ten08] ———, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3ième édition ed., Échelles, Belin, 2008.
- [Web99] H. Weber, *Lehrbuch der algebra*, vol. 2, F. Vieweg & Sohn, 1899.

A. LACHAND : INSTITUT ÉLIE CARTAN, UNIVERSITÉ DE LORRAINE 1, B.P. 70239,
 54506 VANDEUVRE-LÈS-NANCY CEDEX, FRANCE
E-mail address: armand.lachand@univ-lorraine.fr