



HAL
open science

Linéarisation d'une itération bornée dans \mathbb{R}^d par des fonctions de Weierstrass-Mandelbrot

Guy Cirier

► **To cite this version:**

Guy Cirier. Linéarisation d'une itération bornée dans \mathbb{R}^d par des fonctions de Weierstrass-Mandelbrot. 2014. hal-01053416v4

HAL Id: hal-01053416

<https://hal.science/hal-01053416v4>

Preprint submitted on 20 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Linéarisation d'une itération inversible bornée dans \mathbb{R}^d par des fonctions de Weierstrass-Mandelbrot

G. Cirier

LSTA. Université Paris VI, France

Email: guy.cirier@gmail.com

Résumé

Soit une itération de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d définie par un difféomorphisme polynomial borné. On montre que les courbes invariantes tendent vers des courbes paramétrées par des fonctions de Weierstrass-Mandelbrot. Cela justifie les calculs d'échelle d'autosimilarité et de dimension fractale comme le pratiquent des praticiens sur des itérations chaotiques. On applique ces résultats au calcul différentiel.

Abstract

In this paper, we study an iteration in \mathbb{R}^d defined by a diffeomorphism polynomial bounded. Invariant curves tend to curves with parametric Weierstrass-Mandelbrot's functions. So, self-similarity and fractal dimension calculus are justified. We apply these results to partial differential calculus.

Mots clefs : Itération bornée, courbes invariantes, fonctions de Weierstrass-Mandelbrot, Hénon, EDP, Navier-Stokes.

Key words: Bounded iterations, invariant curves, Weierstrass-Mandelbrot functions, Hénon, DPE, Navier-Stokes.

I - Introduction

Soit f une application de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d . On appelle itération la même application f si elle est itérée indéfiniment : $f \circ f \circ \dots \circ f = f^{(p)}$. L'équation de Perron Frobenius qui caractérise les mesures invariantes sous l'itération f , a été le point de départ de deux articles précédents : le comportement déterministe de f prévaut dans [5]; mais, dans [6], le point de vue probabiliste diffère. On approfondit ici l'approche déterministe en la situant dans un ensemble borné $C \subset \mathbb{R}^d$ tel que $f(C) \subset C$. Les résultats obtenus ici justifient certaines méthodes utilisées par les praticiens.

Remarque

Les points fixes $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et les v.p. associées vont jouer un rôle essentiel dans ce qui suit. Malheureusement, l'itération de f crée de nouveaux points invariants sous $f^{(p)}$. Ces points forment des cycles tels que $f^{(p)}(\alpha) = \alpha$ avec $f(\alpha) \neq \alpha$. Soit $Fix(f^{(p)})$ cet ensemble. Soit f_\bullet la collection des itérations $f_\bullet = (f, f^{(2)}, \dots, f^{(p)} \dots)$ où $f^{(p)} = f \circ f^{(p-1)}$. Tout ce qui se dira dans la suite pour le point fixe $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ sera valable encore pour toute la collection des $Fix(f_\bullet) = \cup_p Fix(f^{(p)})$.

1- Hypothèse H0

Les itérations f et f^{-1} sont polynomiales bornées dans C . En $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, les valeurs propres λ de $f'(\mathbf{0})$ sont non résonantes : $1 \neq \lambda^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$. Les v.p. $\lambda > 1$ appartiennent à $\mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+$.

Si les v.p. réelles $|\lambda| > 1$ sont négatives, quitte à itérer 2 fois f , $a(\lambda^2 t) = f \circ f(a(t))$, on travaillera donc toujours avec $\lambda > 1 \in \mathbb{R}^{+q}$.

2- Résultats connus et admis lorsque f est un C^k - difféomorphisme dans \mathbb{R}^d , $k \geq 1$

Sous ces conditions, même si f est seulement un C^k - difféomorphisme avec $k \geq 1$, Steinberg [10] a construit, d fonctions de linéarisation C^k : $\varphi_\ell \circ f(\mathbf{a}) = \lambda_\ell \varphi_\ell(\mathbf{a})$, $\ell = 1, \dots, d$ au voisinage de $\mathbf{0}$.

Sous les mêmes conditions, on peut écrire l'équation fonctionnelle $\mathbf{a}(\lambda \mathbf{t}) = f(\mathbf{a}(\mathbf{t}))$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ et l'on obtient d fonctions invariantes $\mathbf{a}(\mathbf{t})$: $a_\ell(\lambda \mathbf{t}) = f_\ell(\mathbf{a}(\mathbf{t}))$ $\ell = 1, \dots, d$, souvent appelées *séparatrices*. Dans les deux cas, les applications φ et \mathbf{a} sont construites localement avec des séries. En outre, on a l'unicité de φ et de \mathbf{a} pour une matrice jacobienne unité en $\mathbf{0}$.

On construit d'abord $\mathbf{a}(\mathbf{t})$ avec les séries de Steinberg définies au voisinage du point fixe $\mathbf{0}$. Soit $\rho > 0$ le rayon de convergence de $\mathbf{a}(\mathbf{t})$. Puis, en choisissant $\mathbf{t} : |\mathbf{t}| \leq \rho_0 < \rho$, on prolonge $\mathbf{a}(\lambda^p \mathbf{t}) \in C$ pour $\forall p \in \mathbb{Z}$ par itérations successives, donc pour $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. Cette solution unique sera très utile ici sous réserve de d paramètres fixés.

Comme les coordonnées de \mathbf{t} de $f^{(p)}$ relatives aux $|\lambda| < 1$ tendent vers 0 quand $p \rightarrow \infty$, on ne s'intéresse ici qu'aux q v.p. $\lambda \in \mathbb{R}^{+q} \parallel \lambda > 1$. On leur associe $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$.

Soit E l'équation $\mathbf{a}(\lambda \mathbf{t}) = f(\mathbf{a}(\mathbf{t})) \parallel \lambda > 1, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$.

3- Remarques

Notons que, si l'on part d'un point arbitraire $\mathbf{a}_0 \in C$, et que l'on itère indéfiniment ce point, l'ensemble ainsi obtenu, appelé parfois orbite, ne vérifiera pas forcément E sauf si $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}(\mathbf{t}_0, \mathbf{t}'_0)$. En ce cas, l'itération vérifie asymptotiquement par continuité l'équation E. Mais on peut avoir pour chaque cycle de $Fix(f_\bullet)$, des courbes et même des mesures invariantes: on a un « millefeuille » de solutions dont la complexité est bien connue. Enfin, si l'unicité du point fixe $\mathbf{0}$ dans C n'est pas acquise, et en particulier s'il n'est pas bien isolé, on peut encore rencontrer des difficultés qui ne sont pas étudiées ici. Les solutions trouvées sont locales.

4- Le problème étudié

On cherche ici la représentation de l'unique solution de E (les courbes invariantes correspondant à $\lambda > 1$) dans l'espace des fonctions auto similaires presque périodiques (A.S.P.P.).

II- Fonctions de Bohr presque périodiques dans un Banach [1] et application aux itérations

Soit P.P. l'ensemble des fonctions presque périodiques bornées dans \mathbb{R}^d . Soit $\mathbf{a}(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q, q \leq d$.

1- Définition de Bochner (rappel [4],[3])

Une fonction $\mathbf{a}(\mathbf{t}) \in P.P.$ au sens de Bohr si et seulement si l'ensemble des fonctions translatées par tout $\mathbf{c} \{ \mathbf{a}(\mathbf{t} + \mathbf{c}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q \}$ est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme.

On dispose alors d'un arsenal de résultats proches de ceux des séries de Fourier [1]. Le théorème 1 est démontré dans des espaces de Banach. Il est utilisé ici dans \mathbb{R}^d . On gardera la notation complexe $e^{i\mu_k t}$, alors que l'on sous-entend la partie réelle $\text{Re}(e^{i\mu_k t})$. **Ne pas s'étonner de $P_n(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{c}_k e^{i\mu_k t} \in \mathbb{R}^d$**

2- Théorème 1 (rappel de l'approximation de Bohr [1])

Soit un polynôme trigonométrique : $P_n(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{c}_k e^{i\mu_k t} \in \mathbb{R}^d$ où $(\mathbf{c}_k \in \mathbb{R}^d, \mu_k \in \mathbb{R}^q)$ et $\mu_k \mathbf{t}$ le produit scalaire. Si $\mathbf{a}(\mathbf{t}) \in P.P.$, il existe une suite de $P_n(\mathbf{t})$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$: $\sup_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q} \|\mathbf{a}(\mathbf{t}) - P_n(\mathbf{t})\| < \varepsilon$.

Si $c(\mu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(2T)^q} \int_{-T}^T \mathbf{a}(\mathbf{t}) e^{-i\mu t} dt$ est vecteur coefficient de Fourier-Bohr, alors

$\Lambda(\mathbf{a}) = \{ \mu \in \mathbb{R}, c(\mu) \neq 0 \}$ est au plus dénombrable. $\mathbf{a}(\mathbf{t})$ est uniformément continue et développable en série de Fourier : $\mathbf{a}(\mathbf{t}) \sim \sum_{\mu \in \Lambda} c(\mu) e^{i\mu t}$. Cette représentation est unique.

La convergence a lieu en moyenne quadratique et l'on a l'égalité de Perceval.

Il revient au même d'étudier la relative compacité soit avec $(\mathbf{t} + \mathbf{c}), \mathbf{t}$, soit $(\mathbf{t}\mathbf{c}), \mathbf{t}$ avec dans \mathbb{R}^q .

3-Théorème 2

Sous H0, $\{\mathbf{a}(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathbb{R}^q\}$ et $\mathbf{a}(\mathbf{c}\mathbf{t})$ pour tout \mathbf{c} sont relativement compacts et $\mathbf{a}(\mathbf{t}) \in P.P.$

Soit $A_N = \{(\mathbf{a}(\lambda^p \mathbf{t}); \|\mathbf{t}\| \leq \rho_0, p \leq N)\}$. Son adhérence \hat{A} est fermée et contenue dans C borné, donc compacte. Donc l'image de $\mathbf{a}(\mathbf{t})$ est relativement compacte. « Translatons » \mathbf{t} par \mathbf{c} : $\mathbf{c}\mathbf{t}$ de sorte que $\mathbf{a}(\mathbf{c}\mathbf{t}) \in C$. Soit n assez grand pour que $\mathbf{c} = \alpha \lambda^n$ avec $\|\alpha\| < 1$ et $\|\alpha \mathbf{t}\| < \|\mathbf{t}\| < \rho_0$, $\mathbf{c}\mathbf{t} = \alpha \mathbf{t} \lambda^n$. Comme f est inversible, $f^{-(n)} \mathbf{a}(\mathbf{c}\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\alpha \mathbf{t})$ avec $\|\alpha \mathbf{t}\| \leq \rho_0$ qui redonne A_N d'adhérence \hat{A} . Donc $\mathbf{a}(\mathbf{t}) \in P.P.$.

4- Corollaire 1

Sous H0, les coordonnées du graphe de $\mathbf{a}(\mathbf{t})$ dans \mathbb{R}^d sont approximées uniformément par un paramétrage presque périodique en $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$.

II- Représentation de la solution de l'équation E : $\mathbf{a}(\lambda \mathbf{t}) = f(\mathbf{a}(\mathbf{t}))$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$ dans A.S.P.P.

Définition de l'auto similarité

Soit A.S.P.P. l'ensemble des fonctions auto similaires presque périodiques bornées dans $C \subset \mathbb{R}^d$: $w(\lambda \mathbf{t}) = r^{-1} w(\mathbf{t})$ où $r < 1$ pour les p.p. λ et $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^q$.

Cet ensemble contient les fonctions de Weierstrass-Mandelbrot (WM) [9] $w(\mathbf{t}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^k (1 - e^{i\lambda^k \mathbf{t}})$,

1- Lemme de linéarisation 1

Sous H0, les presque périodes (p.p.) $\mu \in \Lambda$ solutions possibles de l'équation E sont de la forme $m\mu\lambda^k \mid k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$.

Si l'on suppose de plus que la solution appartient à A.S.P.P. : $\mathbf{a}(\lambda \mathbf{t}) = r^{-1} \mathbf{a}(\mathbf{t})$, alors la solution est une série de fonctions WM q- dimensionnelles :

$$\mathbf{a}(\mathbf{t}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{c}(m) w(m\mathbf{t})$$

Quand on itère indéfiniment f , si $\mathbf{a}_p(\mathbf{t}) = f^{(p)}(\mathbf{a}(\mathbf{t}))$, $\mathbf{a}_\infty(\mathbf{t}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{a}_p(\mathbf{t}) \in A.S.$ est vecteur propre de $f'(\mathbf{0})$ au point fixe $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{a}_\infty(\lambda \mathbf{t}) = f'(\mathbf{0})(\mathbf{a}_\infty(\mathbf{t}))$$

mais, il faut noter que $\mathbf{a}_\infty(\mathbf{t})$ n'est pas solution de E.

- La formule de Taylor en dimension d pour f est: $f(\mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{n_0} f^n(\mathbf{0}) \mathbf{a}^n / n!$.

En remplaçant dans les monômes \mathbf{a} par $\mathbf{a}(\mathbf{t}) \in P.P.$, l'équation E implique sur les p.p. μ l'égalité $\sum_j m_j \mu^j - \lambda \mu = 0$ où les m_j sont des entiers plus petits que le degré n_0 de f . Comme f est inversible, les p.p sont $\mu^j = \mu_0 \lambda^k \mid k \in \mathbb{Z}$ ou des multiples entiers de μ_0 . Par ailleurs, puisque f est polynomiale de degré n_0 au plus, l'égalité sur les p.p. ne contient que $n_0 + 1$ termes et s'écrit $\sum_j m_j \lambda^j - m \lambda^k = 0$. Si λ est irrationnel, cela est en général impossible avec des m_j tous entiers positifs, sauf si l'exposant $j = k$ et si $\sum m_j = m$. Donc, la solution p.p. $\mathbf{a}(\mathbf{t})$ de E s'écrit

$\mathbf{a}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}_0 + \sum_{m \in \mathbb{N}} (\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}(m\lambda^k) e^{im\lambda^k \mathbf{t}})$, où $m\lambda^k \mathbf{t} = \sum_{\ell=1}^{\ell=q} m_\ell \lambda_\ell^k \mathbf{t}_\ell$. En raison de la continuité à l'origine avec $\mathbf{a}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, on obtient $\mathbf{a}(\mathbf{t}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}(m\lambda^k) (1 - e^{im\lambda^k \mathbf{t}}))$.

Supposons de plus $\mathbf{a}(t)$ auto similaire : $\mathbf{a}(\lambda t) = r^{-1}\mathbf{a}(t)$.. Autrement dit :

$$\mathbf{a}(\lambda t) = \sum_{m \in \mathbb{N}} (\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}(m\lambda^k)(1 - e^{im\lambda^k t})) = r^{-1} \sum_{m \in \mathbb{N}} (\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}(m\lambda^k)(1 - e^{im\lambda^k t}))$$

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} (\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}((m/\lambda)\lambda^{k+1})(1 - e^{im\lambda^{k+1} t})) = r^{-1} \sum_{m \in \mathbb{N}} (\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}(m\lambda^k)(1 - e^{im\lambda^k t}))$$

L'uniforme convergence permet d'écrire: $\mathbf{c}(m\lambda^{k-1}) = r^{-1}\mathbf{c}(m\lambda^k)$ dont la solution est : $\mathbf{c}(m\lambda^k) = \mathbf{c}(m)r^k$. D'où, le développement de $\mathbf{a}(t)$ en séries de fonctions WM.

- Maintenant, on ne cherche pas le comportement de $\mathbf{a}(t)$, mais celui asymptotique quand $p \rightarrow \infty$ de $\mathbf{a}_p(t) = f^{(p)}(\mathbf{a}(t))$: $\mathbf{a}_\infty(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{a}_p(t)$. Ici, $\mathbf{a}(t)$ est seulement auto similaire. On n'utilise pas le fait que $\mathbf{a}(t)$ est presque périodique. E s'écrit : $\mathbf{a}(\lambda t) = r^{-1}\mathbf{a}(t) = f(\mathbf{a}(t))$, $t \in \mathbb{R}^q$.

Si $\mathbf{a}_p(t) = f^{(p)}(\mathbf{a}(t)) = \mathbf{a}(t) / r^p$, on a : $\mathbf{a}(\lambda t) = \mathbf{a}(t) / r = r^{p-1}\mathbf{a}_p(t) = f(r^p \mathbf{a}_p(t))$. Par continuité, quand $p \rightarrow \infty$, $r^p \rightarrow 0$ et l'on a : $\mathbf{0} = f(\mathbf{0})$. Le développement d'ordre 1 de f donne ensuite $f(\mathbf{a}) \sim f'(\mathbf{0})\mathbf{a}$. Il vient $r^{p-1}\mathbf{a}_p(t) \sim f'(\mathbf{0})r^p \mathbf{a}_p(t)$ Quand $p \rightarrow \infty$, $r^p \rightarrow 0$. Comme $\mathbf{a}_p(t)$ reste borné : $\mathbf{a}_p(\lambda t) \sim f'(\mathbf{0})\mathbf{a}_p(t)$.

2- Remarques:

- Lorsque l'on remplace $\mathbf{a}(t)$ par $\mathbf{a}_\infty(t)$ dans E, on constate qu'il y a un reste qu'il va falloir éliminer.
- Lorsque il y a plusieurs v.p. λ supérieures à l'unité, donc plusieurs $r < 1$, il faut prendre $r_0 = \min r_\ell$, exprimer les $r_\ell = r_0^\alpha$ | $\alpha < 1$, puis remplacer chaque coordonnée de $\mathbf{a}_{\infty_\ell}(\lambda^{-p}t)$ par $\mathbf{a}_{\infty_\ell}(\lambda^{-p}t) = r_\ell^p \mathbf{a}_{\infty_\ell}(t) = r_0^{p\alpha_\ell} \mathbf{a}_{\infty_\ell}(t)$, ce qui complique le procédé d'identification sans pour autant modifier la méthode.
- On présente donc la construction comme s'il n'y avait qu'une seule v.p $\lambda > 1$, donc, un seul $r < 1$.
- On va tirer parti de la fonction $\mathbf{a}_\infty(t)$, en observant que les fonctions invariantes sont asymptotiquement tangentes aux vecteurs propres en $\mathbf{0}$ et que $\mathbf{a}_\infty(t)$ représente ces asymptotes.

Supposons que l'on ait trouvé une solution $\mathbf{a}_\infty(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{a}_p(t) \in A.S.P.P.$.. Comment construire la solution générale $\mathbf{a}(t) \in A.S.P.P.$ vérifiant E.

Si $\varepsilon = r^p$, on pose a priori $\mathbf{a}_k(\lambda^{-p}t) = r^{pk} \mathbf{a}_k(t) = \varepsilon^k \mathbf{a}_k(t)$ avec $\mathbf{a}_1(t) = \mathbf{a}_\infty(t)$ et $\mathbf{a}(\lambda^{-p}t) = \sum \varepsilon^k \mathbf{a}_k(t)$. On procédera de proche en proche. Si ce processus d'identification converge, le reste est asymptotiquement nul.

3- Lemme de récurrence

Sous H0, la solution de E : $\mathbf{a}(t) = \sum \mathbf{a}_k(t) \in A.S.P.P.$ est obtenue avec une suite finie de relations de récurrences linéaires de la forme :

$$(r^{-1} - f'(\mathbf{0}))\mathbf{a}_k(t) = g_k(f, \mathbf{A}(t)) + f^k(\mathbf{0})\mathbf{a}_1(t)^k / k! \text{ si } 2 \leq k \leq n_0,$$

$$(r^{-1} - f'(\mathbf{0}))\mathbf{a}_k(t) = g_k(f, \mathbf{A}(t)) \text{ si } n_0 + 1 \leq k \leq n_0^2,$$

où $g_k(f, \mathbf{A}(t)) = \sum_{n=2}^{n=k-1} f^n(\mathbf{0})\mathbf{A}_{n,k}(t)$ et où $\mathbf{A}_{n,k}(t)$ est un polynôme en $(\mathbf{a}_1(t)\mathbf{a}_2(t)\dots\mathbf{a}_{k-1}(t))$ tel que $\mathbf{A}_{n,k}(\lambda t) = \varepsilon^k \mathbf{A}_{n,k}(t)$

Avec $\varepsilon = r^p$, l'équation E s'écrit $\mathbf{a}(\lambda^{-p+1}t) = f(\mathbf{a}(\lambda^{-p}t)) = r^{-1}(\sum_{k=1}^{k=N} \varepsilon^k \mathbf{a}_k(t)) = f(\sum_{k=1}^{k=N} \varepsilon^k \mathbf{a}_k(t))$.

Ordonnons $f(\sum \varepsilon^k \mathbf{a}_k(t))$ selon les puissances de ε : $f(\sum_{k=1}^{k=N} \varepsilon^k \mathbf{a}_k(t)) = \sum_{k=1}^{k=Nn_0} \varepsilon^k g_k(\mathbf{a}(t))$ avec N fini puisque f est un polynôme. On identifie terme à terme les coefficients de E: La récurrence commence avec $(r^{-1} - f'(\mathbf{0}))\mathbf{a}_1(t) = 0$ où $\mathbf{a}_\infty(t) = \mathbf{a}_1(t)$ appartenant à A.S.P.P. On obtient aisément

$(r^{-1} - f'(0))\mathbf{a}_2(t) = f''(0)\mathbf{a}_1(t)^2 / 2!$ qui vérifie la récurrence. Et ainsi de suite. On observe que les g_k sont des polynômes en $(\mathbf{a}_1(t)\mathbf{a}_2(t)..\mathbf{a}_{k-1}(t))$ tels que $\mathbf{A}_{n,k}(\lambda t) = \varepsilon^k \mathbf{A}_{n,k}(t)$. Le degré de f étant n_0 , le processus d'identification s'arrête pour $N = n_0$.

Ainsi, la connaissance de $\mathbf{a}_1(t) = \mathbf{a}_\infty(t)$ correspondant à $\lambda > 1$ détermine complètement de $\mathbf{a}(t)$.

Il suffit de chercher maintenant $\mathbf{a}_\infty(t) \in A.S.P.P.C$ 'est l'objet du théorème suivant.

Notations

Soit $\mathbf{c}(\mu)$ le coefficient de Fourier de $\mathbf{a}_\infty(t)$: $\mathbf{c}(\mu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(2T)^q} \int_{-T}^T \mathbf{a}_\infty(t) e^{-i\mu t} dt$

4 - Théorème de linéarisation 3

Sous H_0 , pour appartenir à $A.S.P.P.$, $\mathbf{a}_\infty(t)$ doit vérifier $\mathbf{a}_\infty(t) = \sum_{\ell=1}^q w_\ell(t_\ell) \mathbf{c}_\ell$ où :

- \mathbf{c}_ℓ est vecteur propre de $f'(0)\mathbf{c} = \lambda \mathbf{c}$ pour la valeur propre $\lambda_\ell > 1$,
- $w_\ell(t)$, est la fonction de WM unidimensionnelle: $w_\ell(t) = \sum_k r_\ell^k (1 - e^{i\lambda_\ell^k t_\ell})$ où $r_\ell^{-1} = \lambda_\ell^2$.
- Si $g = f^{(p)}$ et si g a pour v.p. $\lambda_\ell > 1$, alors $r_\ell^{-p} = \lambda_\ell^{1+1/p}$.

Soit $\mathbf{a}(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{c}(m) w(mt)$ au voisinage de l'origine. $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_\infty(t)$ est asymptotiquement vecteur propre de $f'(0)$ pour la v.p. $\lambda > 1$ et vérifie $\sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{c}(m) w(m\lambda t) = f'(0)(\sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{c}(m) w(mt))$. Donc,

$\sum_{m \in \mathbb{N}} \{w(m\lambda t) - f'(0)w(mt)\} \mathbf{c}(m) = 0$. Il faut trouver une solution : $w(m\lambda t) \mathbf{c} = f'(0)w(mt) \mathbf{c}$

Par transformation de Fourier \mathbf{F}_μ , les coefficients vérifient a priori pour chaque fonction trigonométrique $e^{i\sum_{i=1}^q \lambda_i^k t_i}$: $\mathbf{c}(\mu / \lambda) / |\lambda| = f'(0)\mathbf{c}(\mu)$ et en posant $\mathbf{c}(\mu) = \mathbf{c} r^k$, on a : $f'(0)\mathbf{c} = \lambda \mathbf{c}$ et $r^{-1} = \lambda |\lambda|$ où $|\lambda| = \prod_{\ell=1}^q \lambda_\ell$.

On a : $\mathbf{a}_\infty(t) = \sum_{\ell=1}^q w_\ell(t_\ell) \mathbf{c}_\ell$. Donc pour chaque \mathbf{c}_ℓ : $\mathbf{a}_{\infty\ell}(t) = \mathbf{c}_\ell w_\ell(t_\ell) = \mathbf{c}_\ell \sum_k r_\ell^k (1 - e^{i\lambda_\ell^k t_\ell})$. La continuité uniforme quand $t_\ell \rightarrow 0$, est vérifiée $\mathbf{a}_{\infty\ell} \rightarrow 0$, pour $\forall t_i = 0 \mid i \neq \ell$.

Soit une autre coordonnée t_l de $\mathbf{a}_{\infty\ell}(t)$ qui devient $\lambda_l^p t_l$, les autres $t_j = 0 \mid j \neq l, \ell$. $\mathbf{a}_{\infty\ell}(t)$ s'écrit :

$$\mathbf{a}_{\infty\ell}(t_\ell, \lambda_l^p t_l) = \mathbf{c}_\ell (\sum_k r_\ell^k (1 - e^{i\lambda_\ell^k t_\ell}) e^{i\lambda_\ell^{k+p} t_l}) = \mathbf{c}_\ell r_\ell^{-p} (\sum_k r_\ell^{k+p} (1 - e^{i\lambda_\ell^{k+p} t_\ell / \lambda_l^p}) e^{i\lambda_\ell^{k+p} t_l}) = r_\ell^{-p} \mathbf{a}_{\infty\ell}(t_\ell / \lambda_l^p, t_l) = \mathbf{a}_{\infty\ell}(t_\ell, t_l)$$

Donc $\mathbf{a}_{\infty\ell}(t_\ell, t_l)$ est invariant par rapport à t_l pour $\forall l \neq \ell$. Donc la transformation de Fourier ne peut être que relative à la seule coordonnée t_ℓ : $w_\ell(t_\ell)$ et $r_\ell^{-1} = \lambda_\ell^2$.

Si $g = f^{(p)}$ et si g a pour v.p. $\lambda_\ell > 1$, f a pour v.p. $\lambda_\ell^{1/p}$, donc la p.p. de f est $\lambda_\ell^{1/p}$. Si r_ℓ est relatif à f , r_ℓ^p est relatif à g . La récurrence $\mathbf{c}(\mu \lambda_\ell^{1/p}) / \lambda_\ell^{1/p} = \lambda_\ell \mathbf{c}(\mu)$ de g implique $r_\ell^{-p} \lambda_\ell^{-1/p} = \lambda_\ell$.

Il s'agit maintenant de calculer la dimension D de chaque coordonnée de la solution asymptotique. La formule de la dimension (par la méthode des boîtes) pour WM ($D = 2 + \log|r_0| / \log|\lambda|$), donne :

5- Corollaire 2

Sous les hypothèses précédentes, si $\lambda > 1$, $D = 0$ et si $\lambda < -1$, $D = 1,25$. Si $g = f^{(p)}$ et si $\lambda(g) > 1$, $D = 2 - 1/p - 1/p^2$.

Si $\lambda > 1$, alors $r^{-1} = \lambda^2$ et $D = 0$, on ne peut avoir que des points. Si $\lambda < 0$, en itérant 2 fois f , on considère $g = f \circ f$. Si g a pour v.p. $\lambda > 1$, alors $r^{-2} = \lambda \sqrt{\lambda} = \lambda^{3/2}$. Donc $D = 2 + \log \lambda^{-3/4} / \log \lambda = 2 - 0,75$ et $D = 1,25$.

6- Remarques

- Si $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\theta = 2k\pi / p$, en itérant $f^{(p)}$, $\lambda^p = \rho^p > 1$, on retrouve les conditions de la démonstration et la dimension est $D = 2 - (p+1)/p^2$. Ce faisant, on a une situation semblable à celle des cycles d'ordre p . En ce cas, $g = f^{(p)}$ laisse fixe chaque point du cycle. On peut attacher à chaque point du cycle des courbes invariantes comme précédemment. La solution trouvée est cyclique.
- Plus généralement, si les v.p. sont complexes, $\lambda = \rho e^{i\theta}$, on approxime θ avec Dirichlet par $\theta \sim 2k\pi / p$.
- On peut remplacer les fonctions polynomiales f par des fonctions analytiques (Favard [7]) sans changer les résultats: si l'application est un difféomorphisme C^∞ , à l'intérieur d'un disque de convergence $\|a\| < \rho_1$, f est approximée uniformément par un polynôme. Par suite, le rayon de convergence de la série $a(t)$ de Steinberg étant ρ , il suffit de prendre t suffisamment petit pour que $\|a(t)\| < \rho_1$ et $\|t\| < \rho$ pour conserver l'ensemble des résultats sous réserve de la convergence des identifications.

7- Conséquences

On a une justification mathématique des constats et des méthodes utilisées par les praticiens :

- Comme la fonction p.p. tend asymptotiquement vers une fonction de WM, le constat de l'auto similarité est justifié, avec les méthodes de dimension fractales. L'auto corrélation s'applique aussi.
- La sensibilité aux conditions initiales ne joue pas sur la forme de la courbe. Il semble les chercheurs aient été perturbés par la « périodicité multiplicative » et ont attribué un peu rapidement ce désordre apparent aux conditions initiales. Le « vrai » désordre est dû aux fonctions de WM.
- En fait, on peut approximer comme l'on veut la forme générale de la courbe par des techniques mathématiques usuelles sans pouvoir situer exactement un point à un moment donné sur sa trajectoire. Ainsi, la dimension fractale est liée à l'invariance d'échelle r . Il convient d'approfondir le cas où $\lambda > 1$ n'est pas unique. Quelle est alors la dimension fractale du paramétrage?

8 – Exemple : cas de Hénon borné

L'itération est définie par $(a_1, b_1) = (\gamma a + b + h(a), \beta a)$ où $\gamma = \lambda + \lambda'$ et $\beta = -\lambda\lambda'$ avec $|\lambda| > 1$ et $|\lambda'| < 1$. Sa courbe invariante se paramètre avec $a(t) = (a(\lambda t), a(t))$ vérifiant: $a(\lambda t) = \gamma a(t) + \beta a(t/\lambda) + h(a(t))$. Si λ est négatif, en 2 itérations, on se retrouve dans le cas positif. Mais, la récurrence à étudier est alors celle de l'itération répétée deux fois et l'on a des cycles d'ordre 2 au lieu de points fixes et l'on est dans la situation fractale. On a :

$$(a_2, b_2) = (\gamma(\gamma a + b + h(a)) + \beta(\gamma a + b + h(a)) + h(\gamma a + b + h(a)), \beta(\gamma a + b + h(a)))$$

La v.p. plus grande que 1 est alors λ^2 . Mais on peut avoir des racines complexes ou des cas de résonance. Notons que si on $\lambda > 1$, on a une distribution ponctuelle.

Nota : Dans de l'itération classique d'Hénon, on a $h(a) = -\sigma a^2$ avec $\sigma = 1,4$ et $\beta = 0,3$ avec $\gamma = -2\sigma * 0,6313 = -1,7678$. Les v.p. réelles au point fixe 0 sont $\lambda \approx -1,9237$ et $\lambda' \approx 0,1559$.

La courbe $(a, b) = (a(t\lambda), a(t))$ définie par le paramétrage $a(\lambda^2 t) = a(t) / r = w_r(t) / r$ connu est: soit $(1 - r\beta)a(t\lambda) = \gamma a(t) + h(a(t))$, soit $(1 - r\beta)a(t) / r = \gamma a(t\lambda) + h(a(t\lambda))$. Cette dernière formule génère une infinité de branches dont on peut en contrôler les approximations.

III- Application aux équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles

On considère les équations de la forme $\partial a / \partial x = F(a)$. Les inconnues forment un vecteur $a \in \mathbb{R}^d$. Le vecteur $x = (p, t) \in \mathbb{R}^k$ est la variable et s'interprète comme la position $p = (p_1, \dots, p_{k-q}) \in \mathbb{R}^{k-q+}$ et le temps $t \in \mathbb{R}^{q+}$. $F(a)$ est une matrice (k, d) de polynômes en $a \in \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}^d .

Si $1 < k < d$, plusieurs coordonnées de a sont fonction des mêmes variables. Le cas $k = 1$ est celui d'une EDO avec pour la variable $t \in \mathbb{R}^+$. La référence sur la question reste Arnold [2]. On

privilégie ici $k = d$. On traduit d'abord cette équation différentielle en termes d'itération.

1-Définition et notations

On prend ici $k = d$. On appelle itération différentielle l'application $f(\mathbf{a}, \delta)$ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d , définie par $\mathbf{a}_1 = f(\mathbf{a}, \delta) = \mathbf{a} + \delta F(\mathbf{a})$, $\delta \in \Delta = \mathbb{R}^{d+} \cap \{\delta_0 \geq \delta \geq 0\}$.

On relie δ à \mathbf{x} par la relation $\delta = \mathbf{x} / n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. On posera $\mathbf{x}F = x_i F_i; i = 1, \dots, d$.

2- Lemme sur les points fixes et quasi cycles de $f(\mathbf{a}, \delta)$

Si $F(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}$ est point fixe de $f(\mathbf{a}, \delta)$ et ne dépend pas de $\delta \in \Delta$. Tous les $\boldsymbol{\alpha}$ distincts sont potentiellement cycliques pour $f(\mathbf{a}, \delta)$.

Cherchons les cycles d'ordre 2 de $f(\mathbf{a}, \delta)$: $\boldsymbol{\alpha}_2 = f(\boldsymbol{\alpha}_1, \delta)$ et $\boldsymbol{\alpha}_1 = f(\boldsymbol{\alpha}_2, \delta)$. Donc: $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \delta F(\boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\alpha}_1 + \delta F(\boldsymbol{\alpha}_1) + \delta F(\boldsymbol{\alpha}_2)$. Ce qui donne: $\mathbf{0} = F(\boldsymbol{\alpha}_1) + F(\boldsymbol{\alpha}_2)$. De même, un cycle d'ordre k vérifie: $\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{j=k} F(\boldsymbol{\alpha}_j)$. Encore faut-il pouvoir construire une itération qui ne se réduise pas à l'identité.

On écrit l'itération dans la base des vecteurs propres de $F'(\mathbf{0})$ au point fixe $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, de sorte que si ρ_i est valeur propre de $F'(\mathbf{0})$, on a: $\lambda_\ell = 1 + \delta_\ell \rho_\ell = 1 + x_\ell \rho_\ell / n$ et $F'(\mathbf{0})$ est diagonale. De manière explicite, l'itération s'écrit: $a_{1\ell} = (1 + x_\ell \rho_\ell / n) a_{1\ell} + (x_\ell / n) \sum_{m=2}^{m=p} F_\ell^{(m)}(\mathbf{0}) a^m / m!$

3- Hypothèse1

Sous H0, pour tout $\delta = \mathbf{x} / n \leq \delta_0$, $f(\mathbf{a}, \delta)$ applique un ensemble borné C de \mathbb{R}^d dans lui-même. On a $q < d$ v.p. $\rho > 0$ qui rend $\lambda > 1$, toutes les $d - q$ autres ρ_i sont négatives.

On choisit n assez grand pour que $\sup |\delta_0 \rho_i| < \varepsilon$.

Au voisinage d'un point fixe $\mathbf{0}$, pour tout $\delta \leq \delta_0$ suffisamment petit, $f(\mathbf{a}, \delta)$ est inversible, donc un C^∞ difféomorphisme. On peut appliquer la théorie précédente pour tout $0 < \delta \leq \delta_0$, autour de $\mathbf{0}$.

4- Proposition 1

Sous H1, l'itération différentielle admet une solution asymptotique presque périodique quand $n \rightarrow \infty$. Pour \mathbf{x} fixé et les q v.p. $\lambda = 1 + \mathbf{x}\rho / n > 1$, la solution asymptotique s'écrit

$\mathbf{a}_\infty(\mathbf{u}) = \sum_{\ell=1}^{\ell=q} \mathbf{a}_\ell(u_\ell)$ avec:

$$\mathbf{a}_\ell(u_\ell) \rightarrow (2\rho_\ell x_\ell)^{-1} (1 - e^{-2\rho_\ell x_\ell}) w_\ell(u_\ell) \mathbf{c}_\ell$$

- où \mathbf{c}_ℓ est vecteur propre de $\mathbf{x}F'(\mathbf{0})$ pour la v.p. $\rho_\ell x_\ell$. Donc, pour $\ell = 1, \dots, q$:

- où $w_\ell(u_\ell) = \sum_k e^{-kx_\ell \rho_\ell} (1 - \exp(ie^{kx_\ell \rho_\ell} u_\ell))$ est la fonction de WM.

Remarque

Le lemme de récurrence permet alors de reconstruire la solution locale. La dimension fractale du paramétrage provient des points fixes qui créent des cycles ou de v.p. complexes.

On construit au voisinage d'un point fixe $\mathbf{0} \in C$ l'équation des fonctions invariantes:

$$\mathbf{a}(\lambda \mathbf{u}) = f(\mathbf{a}(\mathbf{u}), \delta) = \mathbf{a}(\mathbf{u}) + \delta F(\mathbf{a}(\mathbf{u})).$$

On a q v.p. plus grandes que 1: $\lambda_\ell = 1 + \rho_\ell x_\ell / n > 1$, toutes les autres $\lambda_i < 1$. Quand $p \rightarrow \infty$, toutes les coordonnées de \mathbf{u} tendent vers 0 sauf celles relatives aux $\lambda > 1$ que l'on notera encore \mathbf{u} .

On a alors une représentation de $f(\mathbf{a}(\mathbf{u}), \delta)$ par des fonctions de A.S.P.P. On ne s'intéresse ici qu'à la solution du théorème 3, donc aux coefficients $\mathbf{c}(\mu)$ en posant $\lambda_\ell = 1 + \rho_\ell x_\ell / n$ avec $\lambda_\ell > 1$:

$$\mathbf{c}(\lambda^{k-1}) / \lambda = \mathbf{c}(\lambda^k) + (\mathbf{x} / n) F'(\mathbf{0}) \mathbf{c}(\lambda^k)$$

On pose : $\mathbf{c}(\mu) = (r)^\mu \mathbf{c}$ et $1/\lambda r - 1 = \rho x/n$, c'est à dire $1/r_\ell = \lambda_\ell^2$. On obtient \mathbf{c} est vecteur propre de $\mathbf{x}F'(\mathbf{0})$ pour la v.p. ρx .

$\mathbf{a}(u)$ s'écrit alors avec les mêmes arguments de continuité: $\mathbf{a}(u) = \mathbf{c} \alpha \sum_k r^k (1 - \exp(i\lambda^k u))$. Posons $k = k'n + s$, $s = 1, \dots, n-1$, $k' \in \mathbb{Z}$, avec $\alpha = 1/n$ et $v = s/n$. Si $n \rightarrow \infty$, on a pour chaque $\mathbf{a}_\ell(u)$ correspondant à chaque vecteur propre :

$$\lambda^k \rightarrow \exp(\rho x(k'+v)) \text{ et } r^k \rightarrow \exp(-2\rho x(k'+v))$$

$$\sum_k \mathbf{c}(\mu) (1 - e^{i\mu u}) = \sum_{k'} (1/n) \mathbf{c} \sum_{s=1}^{n-1} e^{-2\rho x(k'+v)} (1 - \exp(i e^{\rho x(k'+v)} u)) \rightarrow \mathbf{c} \sum_{k'} \int_0^1 e^{-2\rho x(k'+v)} (1 - \exp(i e^{\rho x(k'+v)} u)) dv$$

Itérons la relation différentielle $n p_0$ fois, u devient $(1 + \rho x/n)^{n p_0} u \rightarrow u e^{p_0 \rho x}$, donc, $\exp(i e^{\rho x(k'+v)} u)$ devient $\exp(i e^{\rho x(k'+v+p_0)} u)$ où p_0 est arbitrairement grand et v devient négligeable devant p_0 ($p_0 + v \in (p_0, p_0 + 1)$):

$$\int_0^1 e^{-2\rho x(k'+v)} \exp(i e^{\rho x(k'+v+p_0)} u) dv \rightarrow (2\rho x)^{-1} (1 - e^{-2\rho x}) e^{-2\rho x k'} \exp(i e^{\rho x(k'+p_0)} u).$$

On peut alors identifier $k'+p_0$ à k .

5- Solution asymptotique quand $t \rightarrow \infty$

Il est naturel de chercher la solution asymptotique de ces équations quand $t \rightarrow \infty$ alors que les variables de position \mathbf{q} restent bornées. Notons toutefois que l'on peut faire tendre $t \rightarrow \infty$ de différentes manières avec n , de sorte que l'on peut avoir différents résultats non étudiés ici.

Comme on fait jouer un rôle dissymétrique à t et à \mathbf{q} , on note alors $\mathbf{a}_t = \mathbf{a} + (t/n)F_t(\mathbf{a})$ et $\mathbf{a}_q = \mathbf{a} + (\mathbf{q}/n)F_q(\mathbf{a})$. Les coefficients de Fourier-Bohr $\mathbf{c}(\mu) = (r)^\mu \mathbf{c}$ relatifs à la p.p. $\mu = \lambda^k$ s'écrivent en projection sur l'axe des t :

$$\rho_t t \mathbf{c}_t = t F_t'(\mathbf{0}) \mathbf{c}_t.$$

Pour cette v.p., si $\mathbf{q}/t \rightarrow 0$, en posant $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_t, \mathbf{c}_q)$, \mathbf{c}_t est arbitraire et $\mathbf{c}_q = \mathbf{0}$.

Cherchons un vecteur propre \mathbf{b} à distance finie $\mathbf{c} + \mathbf{b}$ pour une v.p. ϖ avec $b_t = 0$. On va avoir :

$$\varpi(\mathbf{c} + \mathbf{b}) = \mathbf{x}F'(\mathbf{0})(\mathbf{c} + \mathbf{b})$$

Projetons ensuite l'équation sur le sous-espace des \mathbf{q} :

$$\varpi \mathbf{b}_q = \mathbf{q} \partial F_q(\mathbf{0}_t) / \partial \mathbf{a}_t \mathbf{c}_t + \mathbf{q} \partial F_q(\mathbf{0}_t) / \partial \mathbf{a}_q \mathbf{b}_q$$

Si $\mathbf{b}(t)$ est une solution particulière de $\varpi \mathbf{b}_q = \mathbf{q} \partial F_q(\mathbf{0}_t) / \partial \mathbf{a}_t \mathbf{c}_t + \mathbf{q} \partial F_q(\mathbf{0}_t) / \partial \mathbf{a}_q \mathbf{b}_q$, et si $\mathbf{b}(\mathbf{q})$ est vecteur propre de $\mathbf{q} \partial F_q / \partial \mathbf{a}_q$ pour la v.p. ϖ : $\varpi \mathbf{b}_q = \mathbf{q} \partial F_q(\mathbf{0}_t) / \partial \mathbf{a}_q \mathbf{b}_q$ indépendante de t , alors

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{q}) + \mathbf{b}(t)$$

6- Remarques

- Si on a une seule variable, on a une EDO. Les résultats restent globalement les mêmes.

- Il semble que la solution trouvée soit locale. En particulier, si l'on a plusieurs points fixes dans C , on a observé par des méthodes probabilistes, des passages d'un bassin de domination à l'autre. Reste à étudier le délicat problème des quasi cycles dans ces équations.

- L'équation de Navier Stokes se met facilement sous la forme $\partial \mathbf{a} / \partial t = F(\mathbf{a})$ [6]. On a initialement $n+1$ inconnues (u, p) avec autant de variables (x, t) que d'équations différentielles. Notons $\partial u_i / \partial x = \mathbf{b}_i$, $i = 1, \dots, n$ $\Delta u_i = \sum_{j=1}^n \partial^2 u_i / \partial x_j^2 = \sum_{j=1}^n \partial \mathbf{b}_i / \partial x_j$, $\mathbf{c} = (x, t)$ $d_i = \partial p / \partial x_i$. On rajoute ainsi autant d'équations que de variables, :

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{b}_{ij} = \nu \sum_{j=1}^n \partial \mathbf{b}_i / \partial x_j - d_i + f_i(\mathbf{c})$$

$$\sum_{j=1}^n \partial u_j / \partial x_j = 0, \quad \partial u_i / \partial x = \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mathbf{c} = (x, t)$$

Si les forces extérieures f_i sont C^∞ (sans doute, peut-on améliorer nos hypothèses) et si l'itération différentielle est bornée dans l'espace, alors la solution sera presque périodique comme le veut la

proposition précédente. S'il est difficile de trouver des solutions périodiques, comme dans le problème [8], en revanche, les fonctions presque périodiques résolvent la question. L'attracteur de Lorenz en est la preuve évidente. Les f_i méritent d'être précisés dans l'énoncé du problème.

- On peut traiter les itérations avec décalage : $u_1(x + \log \lambda) = F(u(x + T))$: en posant $T = \log(\tau)$, $x = \log(t / \tau)$ et $a(t) = u \circ \log(t)$, on a $a_1(\lambda t / \tau) = F(a(t))$ et l'on remplace la v.p. λ par $(\lambda \tau)$. On peut traiter ainsi les EDO et EDP avec décalage sans plus de difficulté.

IV. Références

- [1] Amerio, Prouse, 1971. *Almost Periodic Functions and Functional Equations*, Van Nostrand.
- [2] Arnold V., *Chapitres supplémentaires de la théorie des EDO*. Mir, Moscou 1980.
- [3] Bochner S., 1925. *Sur les fonction presque périodiques de Bohr*, CR, t 177, p737.
- [4] Bohr H., 1923. *Sur les fonctions presque périodiques*, CR, t 180, p1156.
- [5] Cirier G., 2005. *Solution stationnaire de l'équation associée à un opérateur de Perron- Frobenius dans le cas de difféomorphisme à points fixe*, Ann. ISUP, Vol. XLIX, Fasc 1, p35.
- [6] Cirier G., 2012. *Probabilistic and asymptotic methods*. hal-00691097, v. 3.
- [7] Favard J., 1927. *Sur les fonctions harmoniques presque périodiques*. Thèse. Numdam.org
- [8] Fefferman C. L., http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/navierstokes.pdf
- [9] B.B. Mandelbrot, *Fractals: Forms, Chance and Dimension*, Freeman, 1977.
- [10] Steinberg S., 1958. *On the structure of local homeomorphisms of Euclidian n-space*. A.J.M. 80.3.

En guise de conclusion

Il s'agit ici d'une analyse rapide des itérations inversibles qui s'avère être un domaine délicat. Après vérification par des spécialistes, elle peut ouvrir aux théoriciens et aux praticiens de nouvelles perspectives.

Les itérations avec de multiples inverses ont été étudiées précédemment [6] dans un contexte probabiliste aboutissent à d'autres conclusions. Ces méthodes ont été appliquées aux itérations inversibles sans être sûr de la convergence vers leurs solutions.

Inversement, si le nombre m d'inverses est fini, on considère que l'on tire chaque branche inverse au hasard avec une probabilité $1/m$. Les fonctions de WM se prêtent bien à cette randomisation. Le rapprochement de ces divers résultats reste essentiel.

D'ailleurs, dans l'espace des fonctions de WM où l'on travaille ici, l'écart est faible avec les processus stochastiques. Si cette théorie présentée dans un cadre simple est confirmée, il ne fait pas de doute que des généralisations vont être avancées. Il est alors permis de conjecturer que même les courbes définies géométriquement sont représentables par des fonctions de WM.

Dans ce bref essai, on s'est attaché à démontrer les questions qui paraissaient essentielles, sans pouvoir les confronter à d'autres idées. Toutes les remarques et observations, pourvu qu'elles ne soient pas trop difficiles, seront donc les bienvenues.