HAL
open science

Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités

Monique Lejeune Jalabert, Bernard Teissier

To cite this version:

Monique Lejeune Jalabert, Bernard Teissier. Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités. 1971. hal-01053223

HAL Id: hal-01053223

https://hal.science/hal-01053223v1

Preprint submitted on 30 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CHAPITRE TROISIEME

L A C O N T I N U I T E D U C O N T A C T

I - SEMI-CONTINUITE DE L'EXPOSANT NUMERIQUE DE CONTACT

(1.0) Dans l'esquisse de démonstration de II.(4.5.5), on s'aperçoit que ce qui manque pour obtenir également la résolution des singularités des espaces analytiques est un (ou des) théorème(s) de "prolongement", car, alors qu'en géométrie algébrique on peut prolonger un germe de centre d'éclatement en une sous-variété fermée, en géométrie analytique ceci n'est plus possible. Pour pallier à cette difficulté on va construire une sorte de "faisceau des résolutions", i.e. sur chaque ouvert autour de x, on étudie tous les processus de résolutions locales; bien qu'il n'y ait aucune canonicité on définit une notion qui tient compte de tous les processus possibles et permet le recollement : ce sera le jardinage. Mais pour cela il faut établir des résultats non seulement en un point mais aussi dans un voisinage. Ainsi certains de ceux-ci sont obtenus comme conséquence des théorèmes de Stabilité I et II.

(1.1) Le but de ce chapitre est de montrer les deux théorèmes suivants.

Théorème de continuité I (1.1.1) : Soit X un espace analytique complexe, x un point de X. Soit $i : X \to Z$ une immersion de X dans un espace lisse. Soit W une sous-variété lisse de Z contenant x et $r : Z \to W$ une rétraction transverse à X en x. Soit $\mathcal{E}$ l'exposant idéaliste de contact de W avec X en x (relativement à r). Soit X_0 la strate de Samuel de X contenant x. Alors il existe un voisinage Ω de x dans Z tel que

1) r soit transverse à X en y pour tout $y \in X_0 \cap W \cap \Omega$

2) $\mathcal{E}$ est l'exposant idéaliste de contact de W avec X en y (relativement à r) pour tout $y \in X_0 \cap W \cap \Omega$.

<u>Théorème de continuité II</u> : Soit X un espace analytique complexe, x un point de X. Soit $i : X \to Z$ une immersion de X dans un espace lisse. Soit X_0 la strate de Samuel de X contenant x. Soit W une sous-variété lisse de Z contenant x et $r : Z \to W$ une rétraction ayant le contact maximal avec X en x. Alors il existe un voisinage Ω de x dans Z tel que

1) $X_0 \cap \Omega \subset W \cap \Omega$

2) r ait le contact maximal avec X en tout point $y \in X_0 \cap \Omega$.

(1.1.3) Afin d'alléger les notations on notera par $\Delta = (X, Z, W; r)$ la situation décrite par le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] & Z \arrow[d, shift left, "r"] \\ & W \arrow[u, hook, shift left] \end{tikzcd}$$

où r est un morphisme lisse. On appellera Δ une <u>installation</u>.

♦

Soit $x \in X$.

Soit $g : W' \to W$ la modification normalisée de $\mathcal{J}$, où $\mathcal{E} = (\mathcal{J}, b)$ est l'exposant idéaliste de contact de W avec X en x. On sait alors définir la rétrotirette de Δ par g qui est encore une installation.

(1.1.4) On sait que $g^{-1}(\mathcal{E}) = (g^{-1}(\mathcal{J}), b)$ est l'exposant idéaliste de contact de W' avec X' en tous les points x' de W' tels que $g(x') = x$. Mais maintenant $g^{-1}(\mathcal{J})$ est un diviseur.

On voudrait obtenir une méthode pour obtenir un morphisme surjectif propre $g : W' \to W$ où W' est non singulier et $g^{-1}(\mathcal{J})$ un diviseur. Dans un but de simplification, on appellera simplement un tel morphisme une <u>simplification de $\mathcal{J}$ sur W</u>. On ne connaît pas d'autre méthode que la

---

♦ Passage censuré.

résolution des singularités pour obtenir une simplification de $\mathfrak{J}$ sur W.

En faisant une modification normalisée de $\mathfrak{J}$ on obtient W' singulier en général. Mais pour montrer la résolution d'un espace de dimension n en x, on peut utiliser une simplification de $\mathfrak{J}$ sur W, car on peut obtenir une telle simplification si on connaît la "résolution" en dimension $\leq n-1$. C'est cette méthode qu'utilise Hironaka dans "Bimeromorphic smoothing".

<u>Proposition</u> (1.1.5) : Soit $\Delta = (X, Z, W; r)$ une installation. Soit $\mathcal{E} = (\mathfrak{J}, b)$ un exposant idéaliste sur W et $\mathcal{E}' = (\mathfrak{J}', b')$ celui qu'on obtient par rétrotirette par un morphisme $g : W' \to W$ propre et surjectif. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathcal{E}$ est un exposant idéaliste de contact de W avec X en x relativement à r ;

ii) $\mathcal{E}'$ est un exposant idéaliste de contact de W' avec X' en tout point x', tel que $g(x') = x$ relativement à r'.

<u>Preuve</u> : i) $\Rightarrow$ ii) a déjà été montré (cf. corollaire II.(2.3.9)).

Supposons alors qu'en tout point x' tel que $g(x') = x$, $\mathcal{E}'$ soit un exposant idéaliste de contact de W' avec X' en x' relativement à r'.

Soit $D \overset{h}{\to} W$ un disque testant de W en x.

Comme g est propre et surjectif on a des morphismes $S : D \to D$, $h : D \to W'$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "S"'] & W' \arrow[d, "g"] \\ D \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

(d'après le critère valuatif de propreté). Soit $x' = h'(0)$.

Par hypothèse on a que :

$$\nu_o(\mathcal{E}'^{h'}) = d_{x'^{h'}}(W'^{h'}, X'^{h'})$$

et

$$\nu_o(\mathcal{E}^{hS}) = d_{x^{hS}}(W^{hS}, X^{hS}) .$$

On cherche à démontrer que :

$$\nu_o(\mathcal{E}^h) = d_{x^h}(W^h, X^h) .$$

On a que $S(t) = t^s + \ldots$ $\qquad (s = e_o(S))$.

Donc :

$$\nu_o(\mathcal{E}^{hS}) = s\,\nu_o(\mathcal{E}^h) .$$

Soit $\mathcal{E}^* = (\mathcal{J}^*, b^*)$ un exposant idéaliste de contact de W^h avec X^h :

$$d_{x^h}(W^h, X^h) = \nu_{x^h}(\mathcal{E}^*) .$$

$\mathcal{J}^*$ est un idéal de $\mathbb{C}\{t\}$.

$(\mathcal{E}^*)^S$ est un exposant idéaliste de contact, donc :

$$d_{x^{hS}}(W^{hS}, X^{hS}) = \nu_{x^{hS}}((\mathcal{E}^*)^S) = s\,\nu_{x^h}(\mathcal{E}^*) .$$

On a donc :

$$s\,\nu_o(\mathcal{E}^h) = d_{x^h}(W^{hS}, X^{hS}) = s\,\nu_{x^h}(\mathcal{E}^*) = s\,d_{x^h}(W^h, X^h) .$$

D'où :

$$\nu_o(\mathcal{E}^h) = d_{x^h}(W^h, X^h) .$$

(1.1.6) Soit x un point fixé de X. Dans le voisinage de x on va étudier la variation des d_ξ ♦ où $\xi \in X_o \cap W_o$ (resp. $\xi \in X_o \cap T$ où $T = \{\eta \in W \cap X$ où r est transverse). Pour cela on doit étendre les notions de platitude normale et de stratification de Samuel au cas anisotrope.

Rappelons que si $Y \hookrightarrow V$ et $V \hookrightarrow X$ sont des immersions fermées telles que $V \hookrightarrow X$ soit définie par $\mathcal{P}$ et $Y \hookrightarrow X$ soit définie par $\mathcal{Q}$, alors <u>le cône normal anisotrope de X le long de Y de V-tropisme d</u> est le Specan de $gr\begin{pmatrix} X \\ V, d \\ Y \end{pmatrix}$ où

$$gr\begin{pmatrix} X \\ V, d \\ Y \end{pmatrix} = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{R}^+} \left(\sum_{a+b/d \geq \mu} \mathcal{P}^a \mathcal{Q}^b \Big/ \sum_{a+b/d > \mu} \mathcal{P}^a \mathcal{Q}^b \right)$$

(cf. II.(1.3.3) et II.(1.3.7)).

Rappelons que si $\Delta = (X, Z, W, r)$ est une installation et que si $Y \hookrightarrow X$ on a noté (cf. II.(1.4))

!! $$C^{W,d}_{X,Y} = C^{W \cap X, d}_{X,Y} \quad .$$

D'autre part si J définit l'immersion $X \hookrightarrow Z$ alors on a une immersion fermée

$$C^{W,d}_{X,Y} \hookrightarrow C^{W,d}_{Z,Y}$$

définie par les d-formes initiales des éléments de $\mathcal{J}$.

♦ $d_\xi(W, X)$

<u>Proposition</u> (1.1.7) : Soit

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans la catégorie des espaces analytiques au-dessus de S. Supposons que

1) tous les morphismes de ce diagramme soient des immersions fermées

2) Y, W, Z soient lisses au-dessus de S.

Alors la suite de Y-cônes :

$$(0) \longrightarrow C^{Y \underset{S}{\times} Y, d}_{Y \underset{S}{\times} Y, Y} \longrightarrow C^{Y \underset{S}{\times} W, d}_{Y \underset{S}{\times} X, Y} \longrightarrow C^{W, d}_{X, Y} \longrightarrow (0)$$

est exacte.

<u>Démonstration</u> : On construit un diagramme commutatif de Y-cônes

$$\begin{tikzcd} (0) \arrow[r] & C^{Y \underset{S}{\times} Y, d}_{Y \underset{S}{\times} Y, Y} \arrow[r] & C^{Y \underset{S}{\times} W, d}_{Y \underset{S}{\times} Z, Y} \arrow[r] & C^{W, d}_{Z, Y} \arrow[r] & (0) \\ (0) \arrow[r] & C^{Y \underset{S}{\times} Y, d}_{Y \underset{S}{\times} Y, Y} \arrow[r] \arrow[u] & C^{Y \underset{S}{\times} W, d}_{Y \underset{S}{\times} X, Y} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{I}"] & C^{W, d}_{X, Y} \arrow[r] \arrow[u] & (0) \end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont évidemment des immersions fermées.

Soit $y \in Y$. Le choix d'une rétraction locale de Z sur W permet d'identifier $C^{W,d}_{Z,Y}$ à $C_{Z,Y}$, $C^{Y \underset{S}{\times} W, d}_{Y \underset{S}{\times} Z, Y}$ à $C_{Y \underset{S}{\times} Z, Y}$ qui sont tous deux des fibrés localement triviaux. On vérifie aisément que la suite des $\mathcal{O}_Y$-modules formée par les éléments de degré 1 (au sens usuel) est exacte et on en choisit un scindage compatible à la bigraduation, donc à la

d-graduation.

Pour montrer que I est cartésien, on procède comme d'habitude germe par germe et après complétion. On identifie $\hat{\mathcal{O}}_{Z,y}$ avec $S[[y,w,z]]$ où $S = \hat{\mathcal{O}}_{S,s}$ avec s image de y dans S. $\hat{\mathcal{O}}_{Y \underset{S}{\times} Z,y}$ s'identifie alors à $S[[y,y',w',z']]$, le diagramme de S algèbres :

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathcal{O}}_{Z,y} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathcal{O}}_{Y \underset{S}{\times} Z,y} \arrow[d] \\
S[[y,w,z]] \arrow[r, "\varphi_1"'] & S[[y,y',w',z']]
\end{tikzcd}$$

où $\varphi_1(y) = y'$, $\varphi_1(w) = w'$, $\varphi_1(z) = z'$ étant commutatif.

Soit $\sigma : S[[y,y',w',z']] \to S[[y',y'',w',z']]$ tel que

$$\sigma(y) = y'-y'' \ , \ \sigma(y') = y' \ , \ \sigma(w') = w' \ , \ \sigma(z') = z' \ .$$

C'est un S-isomorphisme.

Nous pouvons maintenant identifier $\mathrm{gr}\begin{pmatrix} Z \\ W, d \\ Y \end{pmatrix}$ à $\mathrm{gr}\begin{pmatrix} S[[y,w,z]] \\ z, d \\ (w,z) \end{pmatrix}$ et encore à $S[[y]][W,Z]$ et $\mathrm{gr}\begin{pmatrix} Y \underset{S}{\times} Z \\ Y \underset{S}{\times} W, d \\ Y \end{pmatrix}$ à $\mathrm{gr}\begin{pmatrix} S[[y,y',w',z']] \\ z', d \\ (y-y', w', z') \end{pmatrix}$ ou encore $\mathrm{gr}\begin{pmatrix} S[[y',y'',w',z']] \\ z', d \\ (y'', w', z') \end{pmatrix}$ et encore $S[[y']][Y'',W',Z']$ et posant $\tilde{\alpha} = \mathrm{gr}\,\sigma \circ \varphi_1$

$$\tilde{\alpha} : S[[y]][W,Z] \to S[[y']][Y'',W',Z']$$

est défini par

$$\tilde{\alpha}(y) = y' \quad \tilde{\alpha}(W) = W' \quad \tilde{\alpha}(Z) = Z' \ .$$

Ici, dans $S[[y]][W,Z]$, W a le poids $1/d$ et Z le poids 1,
dans $S[[y']][W',Z',Y'']$, W' et Y'' ont le poids $1/d$ et Z' le poids 1.

Rappelons que B étant un anneau nœthérien, I, P, Q des idéaux de B tels que $I \subset Q$, $P \subset Q$, par définition la suite

$$0 \to \mathrm{in}\begin{pmatrix} B \\ P, d; I \\ Q \end{pmatrix} \to \mathrm{gr}\begin{pmatrix} B \\ P, d \\ Q \end{pmatrix} \to \mathrm{gr}\begin{pmatrix} B/I \\ P+I/I, d \\ Q/I \end{pmatrix} \to 0$$

est exacte.

Si pour $f \in B$, $f \neq 0$, on note $\nu_Q(f;P,d) = \sup\{\mu : f \in \Sigma_{i+j/d \geq \mu} P^i Q^j\}$ $\mathrm{in}_Q(f;P,d) = \mathrm{cl}\, f \bmod \Sigma_{i+j/d>\mu} P^i Q^j$, on voit facilement que $\mathrm{in}\begin{pmatrix} B \\ P, d; I \\ Q \end{pmatrix}$ est engendrée par les $\mathrm{in}_Q(f;P,d)$ où $f \in I$, $f \neq 0$.

Si I est donc l'idéal de $S[[y,w,z]]$ définissant X dans Z, l'idéal K engendré par $\varphi_1(I)$ est celui définissant $Y \underset{S}{\times} X$ dans $Y \underset{S}{\times} Z$. Ainsi, après transformation par σ comme ci-dessus, ce que nous avons finalement à prouver se réduit à $\mathrm{in}\begin{pmatrix} S[[y',y'',w',z']] \\ (z'), d \\ (y'',w',z' \end{pmatrix}, \sigma(K)\Big)$ est engendré dans $S[[y']][Y'',W',Z']$ par $\tilde{\alpha}\left(\mathrm{in}\begin{pmatrix} S[[y,w,z]] \\ (z), d \\ (z,w) \end{pmatrix}, I\right)$.

Soit $g \in \sigma(K)$. $g = \sum_{i=1}^{m} Q_i(y',y'',w',z')\, f_i(y',w',z')$ où $f_i(y,w,z) \in I$ et $Q_i \in S[[y',y'',w',z']]$.

Soit $\nu = \nu_{(y'',w',z')}(g;(z'),d)$ et écrivons

$$Q_i = \sum_{\alpha;\,|\alpha| \leq \nu/d} y''^{\alpha}\, Q_{i\alpha}(y',w',z') + R_i$$

où $R_i \in (y'')^{\frac{\nu+1}{d}}$,

$$\mathrm{in}_{(y'',w',z')}(g;(z'),d) = \mathrm{in}_{(y'',w',z')}(\sum_{\alpha|\alpha|\leq\nu/d} y''^{\alpha}(\sum_{i=1}^{m} Q_{i\alpha} f_i);(z'),d).$$

Soit $g_\alpha = \sum_{i=1}^{m} Q_{i\alpha} f_i$, $g_\alpha \in I$ et $\nu_{(z,w)}(g_\alpha;z,d) \geq \nu - |\alpha|/d$.

En effet, sinon on aurait $\mu = \inf_{\alpha,|\alpha|\leq\nu/d} (\nu_{(z,w)}(g_\alpha;(z),d) + \frac{|\alpha|}{d}) < \nu$

et $0 = \sum_{\alpha,\ |\alpha|\leq\nu/d} Y''^{\alpha}\, \mathrm{cl}\, g_\alpha \bmod (\sum_{i+j/d>\mu-|\alpha|/d} (z')^i (z',w')^j)$.

Mais $\mathrm{cl}\, g_\alpha \bmod (\sum (z')^i (z',w')^j) \in S[[y'']][W',Z']$. Il est donc nul et

$$\nu_{(z,w)}(g_\alpha;(z),d) > \mu - |\alpha|/d \ .$$

D'où finalement

$$\mathrm{in}_{(y'',w',z')}(g;(z'),d) = \sum_{\alpha,|\alpha|\leq\nu/d} Y''^{\alpha}\, \mathrm{cl}\, g_\alpha \bmod (\sum_{i+j/d>\nu-|\alpha|/d} (z')^i (z',w')^j).$$

Ainsi il existe des α pour lesquelles cette classe est non nulle et restreignant la sommation à ceux-là :

$$\mathrm{in}_{(y'',w',z')}(g;(z'),d) = \sum_{\alpha}^{*} Y''^{\alpha}\, \tilde{\alpha}(\mathrm{in}_{(z,w)}(g_\alpha;(z),d)).$$

<u>Corollaire</u> (1.1.8) : Avec les notations de la proposition (1.1.7) supposons seulement que Y soit lisse au-dessus de S. Alors la suite de Y-cônes :

$$(0) \to C^{Y \underset{S}{\times} Y, d}_{Y \underset{S}{\times} Y, Y} \to C^{Y \underset{S}{\times} W, d}_{Y \underset{S}{\times} X, Y} \to C^{W, d}_{X, Y} \to (0)$$

est exacte.

<u>Remarque</u> : Ce résultat avait été annoncé (chap. I, (3.4.5)) dans le cas où $d = 1$.

<u>Démonstration</u> : La question est locale sur Y ; soit donc y un point de Y : plongeons, localement en y, W dans un espace lisse $\tilde{W}$, et posons

$$\tilde{Z} = Z \times_W \tilde{W} \ ;$$

on sait que la suite :

$$(0) \to C^{Y \underset{S}{\times} Y, d}_{Y \underset{S}{\times} Y, Y} \to C^{Y \underset{S}{\times} \tilde{W}, d}_{Y \underset{S}{\times} X, Y} \to C^{\tilde{W}, d}_{X, Y} \to (0)$$

est exacte (proposition (1.1.7)).

D'autre part, comme la rétraction $r : Z \to W$ est lisse, la suite :

$$(0) \to C^{Y \underset{S}{\times} Y, d}_{Y \underset{S}{\times} Y, Y} \to C^{Y \underset{S}{\times} W, d}_{Y \underset{S}{\times} Z, Y} \to C^{W, d}_{Z, Y} \to (0)$$

est exacte. On a en effet des isomorphismes canoniques (pour les espaces analytiques sous-jacents) :

$$C^{W, d}_{Z, Y} \simeq C_{Z, Y} \quad \text{et} \quad C^{Y \underset{S}{\times} W, d}_{Y \underset{S}{\times} Z, Y} \simeq C_{Y \underset{S}{\times} Z, Y}$$

(II. (1.4.3)). Il suffit alors d'appliquer la proposition (1.1.7) en faisant $d = 1$.

Prenons l'intersection terme à terme de ces deux suites. Si l'on admet que $C^{W,d}_{Z,Y} \cap C^{\widetilde{W},d}_{X,Y} = C^{W,d}_{X,Y}$ (et donc que $C^{Y \underset{S}{\times} W,d}_{Y \underset{S}{\times} Z,Y} \cap C^{Y \underset{S}{\times} \widetilde{W},d}_{Y \underset{S}{\times} X,Y} = C^{Y \underset{S}{\times} W}_{Y \underset{S}{\times} X,Y}$), on voit que le corollaire est démontré.

(1.2) Nous allons maintenant généraliser au cas anisotrope la construction des faisceaux de jets (I.(3.2)); X_o étant la strate de Samuel d'un point x de X, nous avions construit un cône C ($C = \mathrm{Specan\,gr}\, P_X(X_o)$) dont les fibres étaient les cônes tangents $C_{X,x}$.

Nous allons de même construire un espace sur X_o tel que les fibres soient des cônes anisotropes.

Soit donc $\mathbb{A} = (X, Z, W, r)$ une installation ; nous cherchons à construire une "$\mathcal{O}_{W \cap X}$-algèbre de jets de X de tropisme d dans la direction de W".

Soit : $V \overset{j}{\hookrightarrow} X$ une immersion fermée ; notons $\Delta : V \to V \times V$ l'application diagonale.

(1.2.1) Posons $P^{\mu;V,d}_X = \mathcal{O}_{V \times X} \Big/ \sum_{a+b/d>\mu} \mathcal{P}^a \mathcal{Q}^b$, où μ est un nombre réel positif, $\mathcal{P}$ l'idéal de l'immersion de l'immersion $1 \times j : V \times V \hookrightarrow V \times X$, et $\mathcal{Q}$ celui de l'immersion $(1 \times j) \circ \Delta : V \hookrightarrow V \times X$.
$P^{\mu;V,d}_X$ est "l'Anneau du μ-ième voisinage infinitésimal de V dans $V \times X$ de tropisme d dans la direction de $V \times V$". On munit cet Anneau de la structure de $\mathcal{O}_V$-Algèbre provenant de la projection canonique : $V \times X \to V$.

Avant de continuer, prenons un exemple : supposons W et Z lisses, les coordonnées sur Z étant $(\underline{w}, \underline{z})$, w étant défini par $\underline{z} = 0$.

Soit $f(w,z)$ une section de $\mathcal{O}_Z$ définie au voisinage de $(\underline{0})$.

On peut écrire, avec des notations évidentes, un développement de Taylor :

$$f(\underline{w},\underline{z}) - f(\underline{w}',0) = \Sigma(\underline{w}-\underline{w}')\frac{\partial f}{\partial \underline{w}}(\underline{w}',0) + \Sigma(\underline{z})\frac{\partial f}{\partial \underline{z}}(\underline{w}',0) + \dots \quad .$$

Si on donne le poids 1 à z et le poids 1/d à $\underline{w}-\underline{w}'$, un jet d'ordre μ (i.e. un élément de $P_X^{\mu;V,d}$) associé à f est une classe d'équivalence de développements de Taylor jusqu'à l'ordre μ.

Dans le cas d'une installation $\mathbb{A}$, on posera

$$P_X^{\mu;W,d} = P_X^{\mu;W\cap X,d} \quad ,$$

et si $i : Y \to W \cap X$ est une immersion fermée,

(1.2.2) $$P_X^{\mu;W,d}(Y) = i^* \, P_X^{\mu;W,d} \quad .$$

En particulier, si x est un point de $W \cap X$, $P_X^{\mu:W,d}(x)$ est le μ-ième voisinage infinitésimal de x dans X, de tropisme d dans la direction de W (cf. I.(3.2.5)).

Prenons maintenant μ dans le groupe discret $\mathbb{Z}_0 + 1/d\,\mathbb{Z}_0$, et soit μ^- le prédécesseur de μ dans ce groupe, on a un épimorphisme naturel :

$$P_X^{\mu;W,d}(Y) \to P_X^{\mu^-;W,d}(Y) \quad ,$$

et on définit $gr^\mu \, P_X^{W,d}(Y)$ comme étant le noyau de cet épimorphisme (cf. I.(3.3)).

(1.2.3) On pose

$$gr\, P_X^{W,d}(Y) = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}_0+1/d\mathbb{Z}_0} gr^\mu \, P_X^{W,d}(Y)$$

(avec $\mathrm{gr}^0 P_X^{W,d}(Y) = \mathcal{O}_y$) : c'est de manières naturelle une $\mathcal{O}_Y$-algèbre (cf. I.(3.3.1)).

Il est alors facile de voir, comme en (I.(3.3.4)), que $\mathrm{Specan}\,\mathrm{gr}\, P_X^{W,d}(Y) = C_{Y\times X,Y}^{Y\times W,d}$.

(1.2.4) On peut évidemment faire toutes ces constructions pour une installation au-dessus de S. On laisse le soin au lecteur d'effectuer ce yoga.

On a maintenant :

<u>Proposition</u> (1.2.5) : Les conditions suivantes sont équivalentes

1) quel que soit $\mu \in \mathbb{Z}_0 + 1/d\,\mathbb{Z}_0$, $P_X^{\mu;W,d}(Y)$ est $\mathcal{O}_Y$-plat en $y \in Y$
2) $\mathrm{gr}\, P_X^{W,d}(Y)$ est $\mathcal{O}_Y$-plat en $y \in Y$
3) si Y est lisse, $C_{X,Y}^{W,d}$ est plat sur Y en y.

C'est l'analogue anisotrope du corollaire (3.5.12) du chapitre I.

L'équivalence de 1) et 2) est facile : la démonstration est la même que pour le cas $d = 1$.

L'équivalence de 2) et 3) résulte du corollaire (1.1.8) qui donne un isomorphisme :

$$C_{Y\times X,Y}^{Y\times W,d} \simeq C_{X,Y}^{W,d} \times C_{Y\times Y,Y}^{Y\times Y,d} \quad ;$$

comme Y est supposée lisse, $C_{Y\times Y,Y}^{Y\times Y,d}$ est lisse, et $C_{X,Y}^{W,d}$ plat équivaut à $C_{Y\times X,X}^{Y\times W,d}$ plat. <u>cqfd</u>.

Remarquons de plus que dans les conditions 1) ou 2) on a l'égalité :

$$C^{Y\times W,d}_{Y\times X,Y}(y) = C^{W,d}_{X,y} ,$$

il suffit de prendre les fibres en y des suites exactes :

$$0 \to gr^{\mu} P^{W,d}_{X}(Y) \to P^{\mu;W,d}_{X}(Y) \to P^{\mu^{-};W,d}_{X}(Y) \to 0 .$$

Pour terminer, nous allons associer à ces faisceaux de jets une "stratification de Samuel anisotrope" en posant

$$H^{1;W,d}_{X,x}(\mu) = \dim_{\mathbb{C}} P^{\mu;W,d}_{X}(x)$$

($H^{1;W,d}_{X,x}$ est ainsi une fonction de $\mathbb{R}^{+}$ dans $\mathbb{Z}_{o}$) . On a alors :

<u>Théorème</u> (1.2.6) : Soit $\Delta = (X,Z,W,r)$ une installation telle que r soit une rétraction lisse. Il existe alors une partition localement finie de $W\cap X$ en sous-espaces analytiques $X_{\alpha,d}$ telle que :

1) Il existe des applications $H_{\alpha} : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{Z}_{o}$ telles que

$$x \in X_{\alpha,d} \Leftrightarrow H^{1;W,d}_{X,x} = H_{\alpha}$$

2) $\overline{X}_{\alpha}$ et $\overline{X}_{\alpha} - X_{\alpha}$ sont des sous-espaces analytiques fermés de $W\cap X$.

(1.3) Généralisons maintenant la notion de normale platitude : soient $\Delta = (X, Z, W ; r)$ une installation, Y un sous-espace analytique de $X \cap W$, d un nombre réel ≥ 1.

<u>Définition</u> (1.3.1) : Soit x un point de Y ; on dit que X est d-normalement plat le long de Y en x si les conditions suivantes sont réalisées :

1) Y est lisse en x

2) W est normalement plat le long de Y en x (cf. I.(3.5.14)).

3) pour tout nombre δ vérifiant $1 \leq \delta \leq d$, $C^{W,\delta}_{X,Y}$ est Y-plat en x.

Nous allons énoncer un théorème qui caractérise la d-normale platitude et qui résume ce que nous avons démontré dans le cas anisotrope :

<u>Théorème</u> (1.3.2) : Avec les mêmes notations que pour la définition précédente, supposons que Y soit lisse en x, et que W soit normalement plat le long de Y en x ; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) X est d-normalement plat le long de Y en x.

2) pour tout $\mu \in \mathbb{R}_0$ et pour tout δ tel que $1 \leq \delta \leq d$, $P^{\mu,W,\delta}_X$ est $\mathcal{O}_Y$-plat en x.

3) pour tout δ tel que $1 \leq \delta \leq d$, $\mathrm{gr}\, P^{W,\delta}_X(Y)$ est $\mathcal{O}_Y$-plat en x.

4) pour tout δ tel que $1 \leq \delta \leq d$, la suite

$$(0) \to C^{Y,\delta}_{Y,x} \to C^{W,\delta}_{X,x} \to (C^{W,\delta}_{X,Y}) \underset{Y}{\times} x \to (0)$$

est exacte.

5) soit J l'idéal qui définit X dans Z en x ; pour tout δ tel que $1 \leq \delta \leq d$, il existe un système d'éléments $(f_1, \ldots, f_m)$ de J (qui peut dépendre de δ) tel que :

a) $\nu_Y(f_i, W, \delta) = \nu_x(f_i, W, \delta) \quad (1 \leq i \leq m)$

b) les $\mathrm{in}_x(f_i, W, \delta)$ engendrent l'idéal $\mathrm{in}_x(W \overset{Z}{\underset{X}{;}} \delta)$ (idéal de $\mathrm{gr}(W \overset{X}{\underset{x}{;}} \delta)$ dans $\mathrm{gr}(W \overset{Z}{\underset{x}{;}} \delta)$).

(rappelons que si $f_i = \Sigma f_{iA} z^A$ avec $f_{iA} \in \mathcal{O}_{W,x}$, on a

$\nu_Y(f_i, W, \delta) = \inf \left\{ \frac{\nu_Y(f_A)}{\delta} + |A| \right\}$) .

6) il existe un voisinage U de x dans Y tel que X soit d-normalement plat le long de Y en tout point $y \in U$.

7) il existe un voisinage U de x dans Y tel que pour tout δ avec $1 \leq \delta \leq d$, on ait :

$$H^{W,\delta}_{X,x} = H^{W,\delta}_{X,y} \quad \text{pour tout } y \in U .$$

8) soit $X_{o,\delta}$ la δ-strate de Samuel de X contenant x ; Y est localement contenu autour de x dans $\bigcap_{1 \leq \delta \leq d} X_{o,\delta}$.

Le lecteur est invité à se convaincre que ce théorème a été pratiquement entièrement démontré dans les pages qui précèdent.
Nous ajouterons seulement deux remarques :

- La raison pour laquelle on a besoin de la platitude normale de W en x est la suivante : la condition 5) exprime que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C^{W,\delta}_{Z,x} & \longrightarrow & C^{W,\delta}_{Z,Y \times_Y x} \\ \uparrow & & \uparrow \\ C^{W,\delta}_{X,x} & \longrightarrow & C^{W,\delta}_{X,Y \times_Y x} \end{array}$$

est cartésien. Or la suite de Y-cônes :

$$0 \to C^{Y \times Y,\delta}_{Y \times Y,Y} \to C^{Y \times W,\delta}_{Y \times Z,Y} \to C^{W,\delta}_{Z,Y} \to 0$$

est exacte. Mais on ne sait montrer que la fibre au-dessus de x de $C^{Y \times W,\delta}_{Y \times Z,Y}$ est $C^{W,\delta}_{Z,x}$ que si $gr\,\mathcal{P}^{W,\delta}_Z(Y)$ est $\mathcal{O}_Y$-plat, ce qui est équivalent à $gr_Y W$ plat puisque la rétraction $r : Z \to W$ est lisse.

- On montre comme au chap. I § 4, que pour δ fixée, $1 \leq \delta \leq d$, il existe un ouvert U_δ de Y contenant x, tel que $C^{W,\delta}_{X,Y}$ soit plat en $y \in U_\delta$. On déduit ensuite du théorème (1.4.1) chap. II qu'au voisinage de x les $C^{W,\delta}_{X,Y}$ prennent seulement un nombre fini de valeurs distinctes quand δ varie correspondant à des valeurs $\delta_1, \ldots, \delta_k$ du tropisme. On pourra donc pour U choisir $\bigcap_{j=1\ldots k} U_{\delta_j}$.

(1.4) Nous allons maintenant préparer la démonstration de la semi-continuité de l'exposant numérique de contact, ainsi que du théorème de continuité I.

Soient $\mathbb{A} = (X, Z, W, r)$ une installation, x un point de $W \cap X$, W_o et X_o les strates de Samuel de W et X passant par x, et Y un sous-espace réduit de $X_o \cap W_o$ contenant x.

<u>Proposition</u> (1.4.1) : Soit δ un nombre réel vérifiant $1 \leq \delta \leq d_x(W,X)$; supposons que Y soit contenu dans la δ-strate de Samuel $X_{o,\delta}$. Il existe alors un voisinage U de x dans Y, tel que pour $y \in U$ on ait l'inégalité : $d_y(W,X) \geq \delta$.

<u>Remarque</u> : Si Y est lisse, la condition $Y \subset X_{o,\delta}$ est équivalente à dire que $C^{W,\delta}_{X,Y}$ est plat sur $\mathcal{O}_Y$ (Proposition (1.2.5)).

Posons $C_\delta = \mathrm{Specan\,gr}\, P^{W,\delta}_X(Y)$; C_δ est plat sur Y en x, puisque par hypothèse la fonction $H^{W,\delta}_{X,y}$ est constante au voisinage de x (1.2.5). La fibre en y du morphisme $C_\delta \to Y$ est alors isomorphe à $C^{W,\delta}_{X,y}$ si y est assez proche de x (1.2.5). La fonction de Samuel relative de ce morphisme est ainsi la fonction de Samuel du cône $C_{C^{W,\delta}_{X,y},\, y}$: au point x, on voit que $C_{C^{W,\delta}_{X,x},\, x} = C_{X,x}$, puisque $\delta \leq d_x(W,X)$ (si $\delta < d_x(W,X)$, on a même $C^{W,\delta}_{X,x} = C_{X,x}$ par définition de $d_x(W,X)$, et si $\delta = d_x(W,X)$, on laisse au lecteur le soin de le démontrer (à partir des lemmes II.(1.4.4) à (1.4.7) et II.(1.4.11).

On a donc $H_{C_\delta/Y,y} \leq H_{X,x}$ par semi-continuité de la fonction de Samuel relative (cf. I.(4.3.5)).

Montrons que l'inégalité $d_y(W,X) < \delta$ est impossible : on aurait alors en effet l'inégalité $H_{C^{W,\delta}_{X,y},y} > H_{X,y}$ (le lecteur est invité à s'en convaincre dans le cas où X est une hypersurface en dessinant le diagramme de Newton). Mais comme $H_{X,y} = H_{X,x}$, car par hypothèse on a $Y \subset X_o$, on voit que l'on obtient l'inégalité $H_{C_\delta/Y,y} > H_{X,x}$, ce qui est absurde. <u>cqfd</u>

<u>Remarque</u> : Il résulte de cette démonstration que Y est contenu dans la strate de Samuel relative du morphisme : $C_\delta \to Y$.

Avant de continuer, nous allons généraliser l'exposant numérique de contact $d_x(W,X)$: Si Y est un sous-espace de $W_o \cap X_o$, $d_Y(W,X)$ sera le premier nombre réel d ($d \geq 1$) tel que $C^{W,d}_{X,Y}$ soit différent de $C_{X,Y}$ (cf. II.(1.4.1)). On a alors :

<u>Corollaire</u> (1.4.2) : Soit δ un nombre réel tel que $1 \leq \delta \leq d_x(W,X)$. Si X est δ-normalement plat le long de Y en x (1.3.1), on a l'inégalité : $d_Y(W,X) \geq \delta$.

Soit ε un petit nombre positif : puisque X est δ-normalement plat, il existe un voisinage $U_{\varepsilon,x}$ de x dans Y, tel que si $y \in U_{\varepsilon,x}$, le cône $C^{W,\delta-\varepsilon}_{X,Y}$ soit Y-plat en y.
D'après le théorème (1.3.2), il en résulte un isomorphisme d'espaces analytiques :

$$(C^{W,\delta-\varepsilon}_{X,Y}) \underset{Y}{\times} y \times C^{Y,\delta-\varepsilon}_{Y,y} \xrightarrow{\sim} C^{W,\delta-\varepsilon}_{X,y}$$

d'où, grâce à la proposition (1.4.1) :

$$C^{W,\delta-\varepsilon}_{X,y} \xrightarrow{\sim} C_{X,y} .$$

Mais X est normalement plat le long de Y en x : d'où, si U_ε est assez petit :

$$C_{X,y} \xrightarrow{\sim} (C_{X,Y}) \underset{Y}{\times} y \times C_{Y,x} .$$

On a donc, pour tout y de U_ε un isomorphisme :

$$C^{W,\delta-\varepsilon}_{X,Y} \underset{Y}{\times} y \xrightarrow{\sim} (C_{X,Y}) \underset{Y}{\times} y \quad ,$$

ce qui implique $C^{W,\delta-\varepsilon}_{X,Y} = C_{X,Y}$ (car ces deux cônes sont canoniquement plongés dans $C_{Z,Y}$) ; on a donc $\delta - \varepsilon < d_Y(W,X)$ par définition de $d_Y(W,X)$, d'où $\delta \leq d_Y(W,X)$. <u>cqfd</u>

Soit $\Delta = (X,Z,W,r)$ une installation ; soit $\underline{f} = (f_1,\ldots,f_m)$ une famille d'éléments de $\mathcal{O}_{Z,x}$, et Y un sous-espace de W contenant x.

Si on écrit $f_i = \Sigma f_{A,i} z^A$ avec $f_{A,i} \in \mathcal{O}_{W,x}$, on peut construire un diagramme de Newton avec les points $\Delta_{A,i} = \{\nu_Y(f_{A,i}), |A|\}$. Posons $\nu_i = \nu_Y(f_i)$: si le point $(0,\nu_i)$ appartient à ce diagramme de Newton, on peut parler sans ambiguité du premier côté du polygône de Newton de f_i. Si p_i est sa pente, on pose $d_i = -\dfrac{1}{p_i}$ et $d^x_Y(\underline{f},W) = \inf\limits_{1\leq i\leq m} d_i$.

On a alors :

<u>Proposition</u> (1.4.3) : Soient $\Delta = (X,Z,W,r)$ une installation, Y un sous-espace lisse de $W_o \cap X_o$, x un point de Y. Si $\underline{f} = (f_1,\ldots,f_m)$ est une base standard de X dans Z en x, normalisée par rapport au système $(\mathcal{O}_{W,x}, Z_1,\ldots,Z_r)$, on a l'égalité

$$d_Y(W,X) = d^x_Y(\underline{f},W) .$$

Remarquons que $d^x_Y(\underline{f},W)$ est bien défini, puisque, la base standard $\underline{f}$ étant normalisée, on a $\nu_Y(f_i) = \nu_x(f_i) = \nu_i$ $(1 \leq i \leq m)$ et donc le point $(0,\nu_i)$

appartient au polygone de Newton de f.

Cette proposition a été démontrée dans le cas où $Y = \{x\}$ (II.(1.4.2)) et la démonstration se transpose aisément au cas envisagé ici.

<u>Corollaire</u> (1.4.4) : Sous les mêmes hypothèses que pour la proposition (1.4.3), soit d un nombre réel tel que $1 \leq d \leq d_x(W,X)$.

Si X est d-normalement plat le long de Y en x, pour tout nombre δ avec $1 \leq \delta \leq d$, on a :

1) $\nu_Y(f_i, W, \delta) = \nu_x(f_i, W, \delta) = \nu_i \quad (1 \leq i \leq m)$

2) $in_x(W \overset{Z}{\underset{X}{,}} \delta)$ est engendré par les $in_x(f_i, W, \delta) \quad (1 \leq i \leq m)$.

Nous avons en effet vu que $d_Y(W,X) \geq d$ (1.4.2) et donc $d_Y^x(\underline{f}, W) \geq d$ d'après la proposition précédente, d'où immédiatement la propriété 1), en regardant le polygone de Newton de f_i.

La propriété 2) est encore une conséquence de II.(1.4.11). En effet, puisque (f) est normalisée en x, $d_x(W,X) = d_x(f;W)$. D'où, pour $\delta \in [1,d[$, $in_x(f_i, W, \delta)$ est indépendant de δ et vaut $in_x f_i$. Comme dans ces conditions $C_{X,x}^{W,\delta} = C_{X,x}$, 2) est trivialement satisfait. Mais on sait alors que les $in_x(f_i, W, d)$ engendrent encore $in_x(W \overset{Z}{\underset{X}{,}} d)$.

<u>Corollaire</u> (1.4.5) : Soient $\Delta = (X, Z, W, r)$ une installation, Y un sous-espace lisse de $W_o \cap X_o$, x un point de Y, et d un nombre réel tel que $1 \leq d \leq d_x(W,X)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) X est d-normalement plat de long de Y en x

2) localement en x, on a : $Y \subset \{y \mid \nu_y(f_i, W, d) \geq \nu_i\}$, $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ étant une base standard normalisée de X en x par rapport au système $(\mathcal{O}_{W,x}, Z_1, \ldots, Z_r)$ et ν_i étant égal à $\nu_x(f_i)$.

(Remarquons que puisque $d \leq d_x(W,X)$, on a

$$\nu_i = \nu_x(f_i) = \nu_x(f_i, W, d) \quad).$$

La démonstration, laissée au lecteur, est identique à celle du cas $d = 1$ (voir II.(3.1.5)).

Il résulte de ce corollaire et de la proposition (1.4.3) que sous les mêmes hypothèses, <u>X est toujours $d_Y(W,X)$-normalement plat le long de Y en x</u>.

<u>Corollaire</u> (1.4.6) : Les hypothèses sont les mêmes que pour le corollaire (1.4.5). Soit d un nombre tel que $1 \leq d \leq d_x(W,X)$; alors l'ensemble des points y tels que $\nu_y(f_i, W, d) = \nu_x(f_i) = \nu_i$ est (localement en x) égal à $\bigcap_{\delta \leq d} X_{o,\delta}$ (rappelons que $X_{o,\delta}$ est la δ-strate de Samuel de X passant par x, et que $(f_1, \ldots, f_m)$ est une base standard de X dans Z en x, normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x}, Z_1, \ldots, Z_r)$).

La démonstration est là aussi analogue à celle du cas $d = 1$ (cf. II.(3.3.8)) : on montre que les deux espaces analytiques en question ont mêmes germes de courbes en x , en se ramenant au cas où ces courbes sont lisses par des modifications ponctuelles.

Avant de montrer la semi-continuité de l'exposant numérique de contact, nous allons donner un exemple qui illustre ce que nous venons de faire : considérons l'hypersurface X d'équation $y^2 = tx^3 + x^5$ dans $Z = \mathbb{C}^3$. W sera le plan des (x,t) et Y l'axe des t. On peut considérer X comme une famille à un paramètre de courbes planes (pour t variable) ; pour $t = 0$, le premier exposant caractéristique vaut $\frac{5}{2}$, alors que pour $t \neq 0$ il vaut $\frac{3}{2}$; on voit que cette famille est équimultiple, et donc que X est normalement plat le long de Y ; on a $d_o(W,X) = 2$, $d_Y(W,X) = \frac{3}{2}$, $d_y(W,X) = \frac{3}{2}$ pour $y \in Y$ et différent de 0.

Pour $d<\frac{3}{2}$, $C^{W,d}_{X,Y}$ est défini par l'équation y^2 ; l'équation de $C^{W,\frac{3}{2}}_{X,Y}$ est $y^2 - tx^3$, et pour $d>\frac{3}{2}$, l'équation de $C^{W,d}_{X,Y}$ est tx^3 : on voit donc que $C^{W,d}_{X,Y}$ est plat pour $d\leq\frac{3}{2}$, mais pas pour $d>\frac{3}{2}$.

(1.5) On voit enfin que $d_y(W,X)\leq d_o(W,X)$ si $y\in Y$: cela est en accord avec le théorème de semi-continuité que nous allons montrer maintenant :

<u>Théorème</u> (1.5.1) : Soient $\mathbb{A}=(X,Z,W,r)$ une installation (r étant toujours une rétraction lisse), x un point de $X_o\cap W_o$.

Il existe alors un voisinage U de x dans $X_o\cap W_o$, tel que, si $y\in U$, on ait :

$$d_y(W,X)\leq d_x(W,X) \ .$$

<u>Démonstration</u> : Soit F un sous-espace analytique fermé irréductible de $X_o\cap W_o$ contenant x ; nous allons montrer par récurrence sur $\dim_x F$ que la fonction $y\mapsto d_y(W,X)$ est semi-continue sur F.

Soit $\underline{f}=(f_1,\ldots,f_m)$ une base standard de X dans Z en x, normalisée par rapport au système $(\mathcal{O}_{W,x},Z_1,\ldots,Z_r)$; posons

$$d_1 = \inf_{y\in F}(d_y(\underline{f},W)) \ ,$$

on a $d_1\leq d_x(W,X)$ puisque que l'on sait que $d_x(W,X)=d_x(\underline{f},W)$ (II.(1.4.21).

L'espace $C^{d_1}=\mathrm{Specan\,gr}\,P_X^{W,d_1}(F)$ est F-plat au voisinage de x (car $F\subset X_o\cap W_o$, et, pour tout δ tel que $1\leq\delta\leq d_1$, la fonction de Samuel $H^{W,\delta}_{X,y}$ est constante d'après le corollaire (1.4.6)) ; la fibre $C^{d_1}(y)$ est donc isomorphe à $C^{W,d_1}_{X,y}$; de même l'espace $C=\mathrm{Specan\,gr}\,P_X(F)$ est plat sur F au voisinage de x, et $C(y)\xrightarrow{\sim} C_{X,y}$.

Soit G l'ensemble des $y \in F$ tel que $C_{X,y}^{W,d_1} = C_{X,y}$ (cf. II.(1.4.8)) : c'est aussi l'ensemble des $y \in F$ tels que $d_1 < d_y(W,X)$.
G est un sous-espace analytique fermé de F, car c'est l'ensemble des points où les fibres de deux fibrés plats coïncident. Considérons deux cas :

a) $d_1 = d_x(W,X)$. On a alors $x \notin G$, et $F - G$ est un ouvert contenant x sur lequel on a, par définition, $d_1 \geq d_y(W,X)$: le théorème est donc vrai dans ce cas.

b) $d_1 < d_x(W,X)$.

Nous allons montrer que l'égalité $F = G$ est impossible au voisinage de x : si y est proche de x, on a

$$d_y(\underline{f}, W) \leq d_y(W,X)$$

(cf. II.(1.4.13)) ; d'autre part, $\nu_y(f_i) = \nu_x(f_i) = \nu_i$ dans un voisinage de x, $\nu_y^*(X,Z)$ est extraite de la suite $\nu_x^*(X,Z) = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ pour y assez proche de x dans F en vertu du lemme suivant :

<u>Lemme</u> (1.5.2) : Il existe un voisinage U de x dans $X_o \cap W_o$, tel que si $y \in U$, on ait $\nu^*(y) \leq \nu^*(x)$ pour l'ordre lexicographique (en particulier, la suite $\nu^*(y)$ est extraite de la suite $\nu^*(x)$).

On voit donc que le nombre $\prod_{i=1}^{m} (\nu_i !) d_y(W,X)$ est un <u>entier</u> ; il n'existe ainsi qu'un nombre fini de valeurs de $d_y(W,X)$ qui soient plus petites que $d_x(W,X)$, soient $\delta_1, \ldots, \delta_k$.
Si on avait $G = F$, on aurait $d_1 < d_y(W,X)$ pour tout $y \in Y$, d'où $d_1 < \delta_1 < \ldots < \delta_k \leq d_x(W,X)$; si ε est un nombre tel que $d_1 < d_1 + \varepsilon < \delta_1$, on aurait $C_{X,y}^{W,d_1+\varepsilon} = C_{X,y}$, et donc $\mathrm{gr}\, P_X^{W,d_1+\varepsilon}(F)$ serait $\mathcal{O}_F$-plat : F serait contenu dans l'ensemble des y tels que $d_y(\underline{f}, w) \geq d_1 + \varepsilon$ (1.4.5) ; on obtiendrait alors une contradiction puisque par définition $d_1 = \inf_{y \in F} (d_y(\underline{f}, W))$.

On a donc $G \subset F$ strictement,

. si $x \notin G$, alors sur $F - G$ qui est un ouvert contenant x, $d_y(W,X) \leq d_1 < d_x(W,X)$

. si $x \in G$, par hypothèse de récurrence , il existe un ouvert U tel que sur $U \cap G$ on ait $d_y(W,X) \leq d_x(W,X)$; sur $F - G$ on a par définition $d_y(W,X) \leq d_1 < d_x(W,X)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

<u>Corollaire</u> (1.5.3) : Soit toujours $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ une base standard de X dans Z en x normalisée (par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x}, Z_1, \ldots, Z_r)$). On a alors

$$d_y(W,X) = d_y(\underline{f}, W)$$

dans un voisinage de x dans $X_o \cap W_o$.

II - LE THEOREME DE CONTINUITE I

Pour terminer, nous allons esquisser une démonstration du théorème de continuité I.

D'abord un lemme :

<u>Lemme</u> (2.1) (dit "Lemme onze") : Soit $\Delta = (X, Z, W, r)$ une installation. Soit y un point de $W \cap X$. On suppose

1) que r est lisse et W est lisse (donc aussi Z) en y

2) que r est transverse à X en y.

Soit $f = (f_1, \ldots, f_m)$ un système d'éléments de J_y l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,y}$ définissant X dans Z au voisinage de y tel que

1) $\mathrm{in}_y(X, Z) = (\mathrm{in}_y f_1, \ldots, \mathrm{in}_y f_m)$

2) $i = 1, \ldots, m$, $\lambda_i = \mathrm{cl}\, \mathrm{in}_y f_i \bmod \overline{N} \,.\, \mathrm{gr}_y Z \neq 0$ où $\overline{N} = \bigoplus_{i>0} \mathrm{gr}_y^i W$.

Soit $i = 1, \ldots, m$, $\nu_i = \nu_y(f_i)$, $b = \prod_{i=1}^{m} \nu_i !$, écrivant $f_i = \Sigma f_{iA} z^A$; $f_{iA} \in \mathcal{O}_{W,y}$, soit

$$\mathfrak{J}_y = (\ldots f_{iA}^{b/\nu_i - |A|} \ldots)\mathcal{O}_{W,y} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = (\mathfrak{J}_y, b) ,$$

s'il existe $q \in \mathcal{O}_{W,y}$ tel que $\mathfrak{J}_y = (q^b)\mathcal{O}_{W,y}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{E}$ est exposant idéaliste de contact de W avec X en y (relativement à r)

2) $\overline{\nu}_y(\mathcal{E}) = d_y(W, X)$.

<u>Remarque</u> : Nous nous permettons d'insister sur le fait que dans ce lemme nous ne supposons pas que (f) soit une base standard de X dans Z en y.

<u>Démonstration</u> : 1) $\Rightarrow$ 2). On sait bien que W étant lisse en y, $gr_y W$ est réduit. Par conséquent, si $g = g_1, \ldots, g_s$ est une base standard normalisée de X en y par rapport à $\mathcal{O}_{W,y}$, on a, avec $g_i = \Sigma\, g_{iA}\, z^A$ et $\mu_i = \nu_y(g_i)$,

$$d_y(W,X) = \inf \frac{\nu_y(g_{iA})}{\mu_i - |A|}$$

(voir II.(1.4.21)), le germe en y d'exposant idéaliste de contact de W avec X en y est

$$\mathcal{E} = \left(\left(\ldots\, g_{iA}^{\frac{\pi \mu_i !}{\mu_i - |A|}} \ldots \right) \mathcal{O}_{W,y}\, ,\, \pi \mu_i ! \right)$$

II.(2.3.5), (2.3.10)

$$\bar{\nu}_y(\mathcal{E}) = \inf \nu_y \left(g_{iA}^{\frac{\pi \mu_i !}{\mu_i - |A|}} \right) \cdot \frac{1}{\pi \mu_i !} = \inf \frac{\nu_y(g_{iA})}{\mu_i - |A|} \quad .$$

2) $\Rightarrow$ 1). On remarque d'abord que $\mathcal{O}_{W,y}$ étant régulier est intégralement clos et il existe, pour $i = 1, \ldots, m$, $|A| \leq \nu_i$, $\beta_{iA} \in \mathcal{O}_{W,y}$ tel que

$$(*) \qquad f_{iA} = \beta_{iA}\, q^{\nu_i - |A|} \quad .$$

De plus il existe au moins un (i,A) tel que $|A| < \nu_i$ et β_{iA} soient une unité.

Il s'agit de montrer que si $h : D \to W$ est un disque testant quelconque de centre y

$$\nu_y(\mathcal{E}^h) = \nu_o(q \circ h) = d_{x^h}(W^h, X^h) \quad .$$

Supposons que pour un disque testant il n'en soit pas ainsi ; alors 2) entraîne que $in_o(f_i \circ h)$ est l'image canonique de $in_y f_i$ dans $gr_o Z^h$ et par suite :

$1^h)$ $\quad in_o(X^h, Z^h) = (in_o(f_1 \circ h), \ldots in_o(f_m \circ h))$

$2^h)$ $\quad \lambda_i = cl\, in_o(f \circ h) \bmod T\, gr_o Z^h$ où $(T) = \bigoplus_{i>0} gr_o \mathbb{C}\{t\}$

$\nu_i = \nu_o(f_i \circ h)$.

D'après II.(1.4.11), on a donc

$$d_{y^h}(W^h, X^h) \geq \inf \frac{\nu_o(f_{iA} \circ h)}{\nu_i - |A|} = \nu_o(q \circ h) \ .$$

Pour ce mauvais disque, l'inégalité précédente est stricte

$$d_{y^h}(W^h, X^h) > \nu_o(q \circ h) = d^h$$

et

$$C^{W^h, d^h}_{X^h, y^h} = C_{X^h, y^h} \ .$$

Posant $F_i^h = in_o(f_i \circ h, W^h, d^h)$, toujours de (*) on déduit que

$$F_i^h = \sum_{|A| \leq \nu_i} \beta_{iA}(y)\, Z^A [in_o(q \circ h)]^{\nu_i - |A|} \ ,$$

et d'après II.(1.4.11), ces éléments sont un système de générateurs de l'idéal définissant $C^{W^h, d^h}_{X^h, y^h}$ dans $C^{W^h, d^h}_{Z^h, y^h}$.

Comme $d^h \geq 1$, $d_{y^h}(W^h, X^h) > 1$. Par suite $C_{X^h, y^h} = C_{X \cap r^{-1}(y), y} \times T_{D,0}$.

Finalement, on obtient :

$$(\ldots F_i^h \ldots) = (\ldots \lambda_i \ldots)\mathbb{C}[T, Z] \ .$$

L'idéal de droite étant homogène en Z, chaque composante homogène de F_i^h y appartient donc et comme $in_o(q \circ h)^{\nu_i - |A|} \in \mathbb{C}[T]$, il vient finalement pour $i = 1, \ldots, m$, $\mu < \nu_i$

$$\sum_{|A|=\mu} \beta_{iA}(y)\, Z^A \in (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\, \mathbb{C}[Z] \quad .$$

Ceci entraîne que

$$\sum_{|A|=\mu} \beta_{iA}(y)\, Z^A (\mathrm{in}_y q)^{\nu_i-\mu} \in (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\, \mathrm{gr}_y Z \ .$$

Posant $F_i = \sum_{|A|\leq \nu_i} \beta_{iA}(y)\, Z^A (\mathrm{in}_y q)^{\nu_i-|A|}$, on a

$$(F_1,\ldots,F_m) \subset (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\, \mathrm{gr}_y Z \ .$$

Or avec $d = \nu_y(q) = \bar{\nu}_y(\mathcal{E})$, on s'aperçoit que F_i n'est rien d'autre que $\mathrm{in}_y(f_i, W, d)$, et, toujours d'après II.(1.4.11), $\mathrm{in}_y(W \overset{Z}{\underset{X}{,}} d) = (\ldots(\mathrm{in}_y(f_i, W, d),\ldots)$ donc $C^{W,d}_{X,y} \supset C_{X\cap r^{-1}(y),y} \times T_{W,y}$.

Or $d = d_y(W,X)$.
Deux cas sont alors à considérer :

ou bien $d = 1$, et

$$C_{X,y} \supset C_{X\cap r^{-1}(y),y} \times T_{W,y} \quad .$$

Mais la transversalité de r en y nous dit que $H^1_{X,y} = H^1_{X\cap r^{-1}(y),y} * H^0_{W,y}$.
Par conséquent cette inclusion est une égalité, $T_{W,y} \subset T_{X,y}$ et $d_y(W,X) > 1$. On obtient dans ce cas une contradiction.

ou bien $d > 1$, alors

$$C_{X,y} = C_{X\cap r^{-1}(y),y} \times T_{W,y}$$

et

$$C^{W,d}_{X,y} \supset C_{X,y} \ .$$

II.(1.4.8) assure que $C_{X,y} = C^{W,d}_{X,y}$ ce qui contredit la définition de $d_y(W,X)$.

(2.2) Passons maintenant à la démonstration du théorème (1.1.1).

Soit $\mathcal{E} = (\mathfrak{J}, b)$ un exposant idéaliste sur W dont le germe en x est l'exposant idéaliste de contact de W avec X en x. On admettra l'existence d'un voisinage Ω_1 de x dans Z tel que r soit transverse à X en $y \in X_o \cap W \cap \Omega_1$.

Soit $g : W' \to W$ une simplification de $\mathfrak{J}$ sur W (voir (1.1.4)). Pour tout $x' \in W'$, $g(x') = x$, $\mathcal{E}' = (g^{-1}(\mathfrak{J}), b)$ est exposant idéaliste de W' avec X' en x' (1.1.5). Désignant par $X'_{x'}$ la strate de Samuel de x' dans X', il existe un voisinage $\Omega'_{x'}$ de x' dans Z' tel que, en un point $y' \in \Omega'_{x'} \cap W' \cap X'_{x'}$, les hypothèses du lemme (2.1) soient satisfaites. En effet, comme système (f) il suffit de choisir la rétrotirette par g d'une base standard de X en x normalisée par rapport à $(\mathcal{O}_{W,x} ; Z)$. En restreignant, $\Omega'_{x'}$ au besoin, (1.5.3) permet de supposer qu'on a en plus $\overline{\nu}_{y'}(\mathcal{E}') = d_{y'}(W', X')$ et de (2.1) on déduit que, en $y' \in \Omega'_{x'} \cap W' \cap X'_x$, $\mathcal{E}'$ est exposant idéaliste de contact de W' avec X' en y'.

Remarquons maintenant que r étant transverse à X en $y \in \Omega_1$, r' à X' en $y' \in g^{-1}(y)$, on a

$$H_{X,y} = H_{X \cap r^{-1}(y), x} * H_{W,y}$$

$$H_{X',y'} = H_{X' \cap r'^{-1}(y'), y'} * H_{W',y'} \quad ,$$

W et W' étant lisses de même dimension $H_{W,y} = H_{W',y'}$, de plus $X \cap r^{-1}(y)$ s'identifie à $X' \cap r'^{-1}(y')$. Par conséquent $X'_{y'}$ ne dépend pas de $y' \in g'^{-1}(y)$. Désignons cette strate par X'_y.

Soit $\Omega' = \bigcup_{x' \in g^{-1}(x)} \Omega'_{x'}$ c'est un ouvert de Z' contenant $g^{-1}(x)$. g étant propre, il existe Ω ouvert contenant x (contenue dans Ω_1) tel que $g^{-1}(\Omega) \subset \Omega'$. Nous allons montrer que Ω convient. Soit $y \in \Omega \cap X_o \cap W$. D'après (1.1.5), il suffit de voir qu'en tout $y' \in g^{-1}(y)$ $\mathcal{E}'$ est exposant idéaliste de contact.

Or pour un tel y', il existe $x' \in g^{-1}(x)$ tel que $y' \in \Omega'_x$. De plus, comme $H_{X,y} = H_{X,x}$, la transversalité de r en y et x entraîne, puisque, W étant lisse, $H_{W,y} = H_{W,x}$, que $H_{X \cap r^{-1}(x)} = H_{X \cap r^{-1}(y)}$. La transversalité après simplification entraîne de même que $H_{X',y'} = H_{X',x'}$. Par conséquent, $y' \in X'_x$. Finalement

$$y' \in \Omega'_x \cap W' \cap X'_x \quad .$$

$\mathcal{E}'$ est donc exposant de contact en ce point.

Ceci achève la démonstration de (1.1.1).

A suivre ...

Les auteurs, rédacteurs et "techniciens"
vous souhaitent de bonnes vacances.

***