



HAL
open science

Propagation d'incertitudes en imagerie acoustique

Thibaut Le Magueresse, Jérôme Antoni, Sébastien Paillasseur, Jean-Hugh Thomas

► **To cite this version:**

Thibaut Le Magueresse, Jérôme Antoni, Sébastien Paillasseur, Jean-Hugh Thomas. Propagation d'incertitudes en imagerie acoustique. Congrès Français d'Acoustique 2014, Apr 2014, France. pp.Méthode d'inversion en imagerie acoustique. hal-01038125

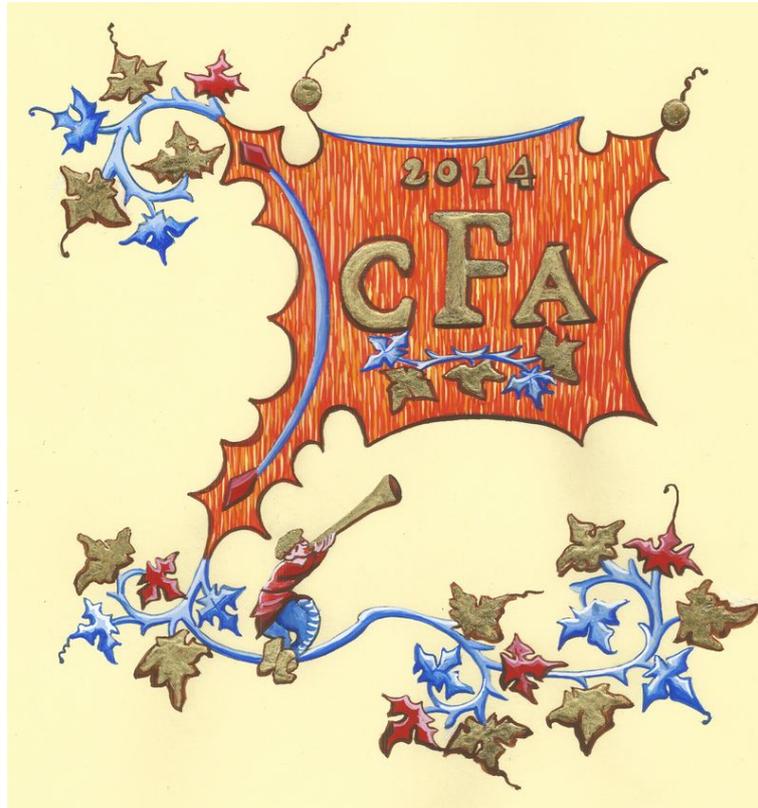
HAL Id: hal-01038125

<https://hal.science/hal-01038125>

Submitted on 23 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Propagation d'incertitudes en imagerie acoustique

T. Le Magueresse^a, J. Antoni^b, S. Paillasseur^a et J.-H. Thomas^c

^aMicrodb, 28 chemin du petit bois, 69130 Ecully, France

^bLaboratoire Vibrations Acoustique, INSA de Lyon Bâtiment St. Exupéry 25 bis av. Jean Capelle, 69621
Villeurbanne, France

^cLAUM, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans, France
thibaut-le-magueresse@microdb.fr

La reconstruction d'un champ de pression et/ou de vitesse par la rétro-propagation de mesures microphoniques est un problème délicat à résoudre puisqu'il est sujet à de nombreuses sources d'erreurs. La résolution du problème inverse en acoustique réside dans la bonne utilisation de l'information et des incertitudes disponibles. Une modélisation probabiliste du problème semble donc pertinente afin de prendre en compte ces connaissances a priori. Dans ce cadre, les données mesurées et les inconnues du problème sont modélisées par des densités de probabilité. Ainsi, les erreurs expérimentales peuvent être représentées par une densité gaussienne. De plus, en connaissant la densité de probabilité a posteriori du paramètre de régularisation, l'erreur liée à la régularisation peut être quantifiée. Finalement, les erreurs de modèle sont les plus difficiles à caractériser. L'approche proposée ici suppose que les erreurs de modèle sont incluses dans les valeurs singulières de l'opérateur de propagation. Cette communication traite particulièrement des erreurs de modèle. Un algorithme d'espérance-maximisation (EM) est proposé et l'erreur de modèle est introduite comme une variable manquante au problème. Des résultats de simulations sont présentés et des estimations de l'erreur de modèle et de sa variance sont calculés.

1 Introduction

Dans de nombreuses applications des techniques d'imagerie acoustique, l'approximation de la propagation des ondes en champ libre est très forte et induit des erreurs de reconstruction parfois très importantes. Les méthodes d'imagerie classiques peuvent être améliorées en prenant en compte un modèle de propagation mesuré [1] ou calculé par des méthodes numériques (par méthode des éléments de frontières [2, 3] ou méthode de tir de rayons phasés [4]). La prise en compte d'un modèle plus fidèle à la réalité implique un coût de temps de calcul ou de temps d'expérimentation non-négligeable, et il serait intéressant de connaître la part de responsabilité des erreurs de modèle sur l'erreur de reconstruction totale. Trois types d'erreurs ont été répertoriés lors de la résolution de problèmes inverses : les erreurs commises sur l'estimation du paramètre de régularisation, sur la mesure microphonique (bruit de mesure) et sur l'approximation du modèle de propagation (erreurs de modèle).

La variabilité de chaque densité de probabilité peut être propagée dans le but d'estimer un intervalle de confiance sur les quantités acoustiques reconstruites. L'accès à un intervalle de confiance sur l'estimation de la puissance acoustique d'une source pourrait être une information pertinente pour l'ingénieur. Des travaux récents ont permis d'étudier la propagation des erreurs expérimentales [5] et des erreurs liées au processus de régularisation [6]. L'objet de cette communication est d'introduire dans le formalisme une variable représentant l'erreur de modèle effectuée. L'approche bayésienne semble pertinente pour prendre en compte l'incertitude liée à l'estimation du modèle de propagation, comme montré par des études récentes réalisées dans le domaine du traitement de l'image [7, 8].

2 Problème direct

Le problème direct consiste à exprimer au niveau du plan de mesure Γ^a , constitué d'une antenne de M microphones, le champ acoustique $p(\mathbf{r}_m^a)$ résultant d'une étendue de sources de débit $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ rayonnant sur une surface Γ^s . Ce problème s'écrit de la façon suivante :

$$p(\mathbf{r}_m^a) = \int_{\Gamma^s} \mathbf{g}(\mathbf{r}_m^a; \mathbf{r}^s) \mathbf{q}(\mathbf{r}^s) d\Gamma^s + b_m, \quad m = 1, \dots, M, \quad (1)$$

avec $\mathbf{g}(\mathbf{r}_m^a; \mathbf{r}^s)$ la fonction de propagation supposée connue liant la pression mesurée à la pression pariétale au niveau du

plan de reconstruction et b_m le bruit de mesure associé à la $m^{\text{ème}}$ mesure de pression.

Les débits de la source peuvent être décomposés sur une base spatiale :

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}^s) = \sum_{k=1}^P c_k \Phi_k(\mathbf{r}^s), \quad (2)$$

où les coefficients c_k dépendent des mesures microphoniques et Φ_k les k fonctions de base spatiales, indépendantes des mesures, et supposées connues et optimales (se référer à [9]).

Sous forme matricielle, le problème direct devient alors :

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}^a) = \mathbf{H}\mathbf{q}(\mathbf{r}^s) + \mathbf{b}, \quad (3)$$

avec \mathbf{H} la matrice de propagation, $\mathbf{p}(\mathbf{r}^a)$ le vecteur contenant le champ de pression mesuré par les M microphones, et \mathbf{b} le vecteur contenant le bruit de mesure sur chaque microphone. L'opérateur de propagation est décomposé en valeurs singulières :

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H, \quad (4)$$

avec \mathbf{S} une matrice diagonale contenant les M valeurs singulières et \mathbf{U} et \mathbf{V} les matrices singulières issues de la décomposition de la matrice de propagation. Ces matrices singulières possèdent des propriétés d'orthogonalité :

$$\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}, \quad \mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{I}, \quad (5)$$

avec \mathbf{I} la matrice identité. Les valeurs singulières réelles apparaissent dans un ordre croissant : $s_1 > s_2 > \dots > s_N \geq 0$.

Le champ de pression au niveau de l'antenne peut alors s'écrire :

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}^a) = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H\mathbf{q}(\mathbf{r}^s). \quad (6)$$

Puisque $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^H$, la projection des pressions mesurées sur les fonctions de base permettent d'introduire y :

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{S}^{-1/2}\mathbf{p}(\mathbf{r}^a) \quad (7)$$

avec $\mathbf{U}_b^{-1/2}$ une matrice de structure connue telle que sa trace soit égale à M . Les coefficients de cette matrice sont des coefficients de corrélation qui définissent la nature du bruit. En utilisant l'Eq. (6), la projection des pressions mesurées devient :

$$y_k = \mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{S}\underbrace{\mathbf{V}^H\mathbf{q}(\mathbf{r}^s)}_{\mathbf{c}} \quad (8)$$

Ainsi, pour chaque fonction de base k , le problème direct peut s'écrire :

$$y_k = s_k c_k + v_k, \quad (9)$$

avec $\mathbf{v} = \mathbf{U}^H \Omega_b^{-1/2} \mathbf{b}$ la projection du bruit de mesure sur les fonctions de base.

3 Modélisation de l'erreur de modèle

3.1 Prise en compte des erreurs de modèle dans le problème direct

En prenant en compte une erreur sur l'estimation du modèle de propagation, ce problème direct devient :

$$y_k = (s_k + \Delta s_k) c_k + v_k. \quad (10)$$

Les erreurs de modèle sont délicates à prendre en compte puisqu'elles sont intrinsèquement inconnues. Elles peuvent provenir d'une erreur de modélisation de la température, de l'estimation des coefficients d'absorption des matériaux, des phénomènes ondulatoires non pris en compte, etc. Dans le cas général, les matrices \mathbf{U} , \mathbf{V} et la matrice diagonale des valeurs singulières \mathbf{S} devraient être considérées comme stochastiques. Dans ce cas, identifier les densités de probabilité de chaque hyperparamètre s'avèrerait long et délicat.

L'approche proposée ici considère l'approximation d'une invariance des matrices de base \mathbf{U} et \mathbf{V} , et donc que les incertitudes liées au modèle sont entièrement absorbées par les valeurs singulières. Il semble alors pertinent d'insérer une variabilité sur les valeurs singulières pour ainsi modéliser une erreur sur le modèle utilisé [10]. Estimer l'erreur de modèle revient à estimer le coefficient directeur de la fonction linéaire de l'équation (10) schématisée en figure 1.

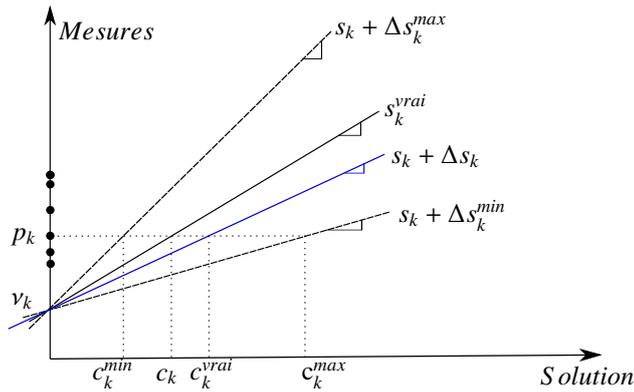


FIGURE 1 – Interprétation du problème direct comme une fonction affine

3.2 Comportement des valeurs singulières vis-à-vis des erreurs de modèle

Des simulations ont été réalisées afin d'étudier la variabilité des valeurs singulières vis-à-vis d'erreurs insérées dans le modèle. Il s'agit d'une source monopolaire, rayonnant vers une antenne plane irrégulière, comme schématisé en figure 2. Une réflexion sur le sol est modélisée

simplement selon un modèle de source-image. La fonction de propagation s'écrit alors :

$$g(\mathbf{r}_m^a; \mathbf{r}_n^s) = \frac{e^{ikr_d}}{4\pi r_d} \left(1 + R \frac{r_d}{r_r} e^{ik(r_r - r_d)} \right) \quad (11)$$

avec $r_d = |\mathbf{r}_m^a - \mathbf{r}_n^s|$ la distance directe entre un point de calcul et un point de mesure, r_r la distance du chemin des ondes réfléchi sur le sol d'un point de calcul à un point de mesure, et R le coefficient de réflexion de la paroi.

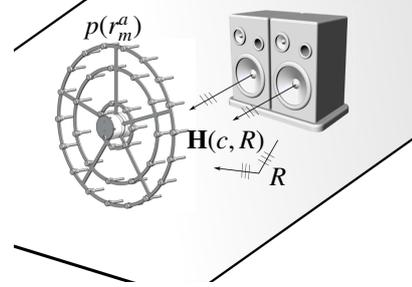


FIGURE 2 – Géométrie du problème

Une erreur de modèle a été volontairement insérée sur l'estimation de la célérité des ondes acoustiques, ou en ajoutant une réflexion des ondes sur une paroi rigide. Le propagateur est ensuite décomposé en valeurs singulières. Pour différentes erreurs de modèle, ces valeurs singulières sont calculées. Leur dispersion est estimée, et une relation entre leur dispersion et les valeurs singulières non bruitées est recherchée.

La figure 3 montre une certaine linéarité entre les valeurs singulières non-bruitées et les valeurs singulières calculées en insérant une erreur de modèle sur l'estimation de la célérité ou du coefficient de réflexion :

$$\tilde{s}_k = C s_k, \quad (12)$$

avec \tilde{s}_k les valeurs singulières bruitées et C le coefficient directeur de la fonction linéaire liant les valeurs singulières exactes et bruitées.

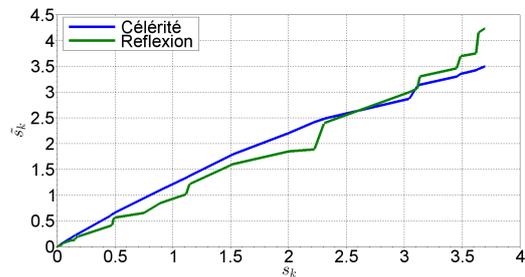


FIGURE 3 – Influence des erreurs de modèle sur les valeurs singulières

Cette observation a son importance, puisqu'elle permet de simplifier le problème en posant une unique inconnue au lieu de M inconnues.

4 Approche bayésienne pour la résolution du problème inverse

La règle de Bayes est utilisée pour estimer la densité de probabilité a posteriori [9] :

$$[c|y] = \frac{[y|c][c]}{[y]}, \quad (13)$$

où la notation $[X]$ désigne la densité de probabilité d'une variable aléatoire X et $[X|Y]$ sa densité de probabilité conditionnée aux observations Y . Le terme $[y|c]$ est la fonction de vraisemblance, c'est-à-dire la probabilité d'observer les mesures sachant le champ de sources, le terme $[c]$ désigne la densité de probabilité a priori avant que les mesures ne soient effectuées, et finalement, $[y]$ représente l'évidence exprimant la probabilité d'observer les données moyennées sur tout l'espace des réalisations possibles des paramètres.

4.1 Modélisation des densités de probabilité

4.1.1 Modèle de source

La distribution a priori permet de prendre en compte les connaissances que l'expérimentateur possède sur le problème étudié. L'hypothèse principale est que les sources rayonnent comme des bruits blancs d'une puissance acoustique α^2 . La densité de probabilité a priori de l'inconnue c_k est modélisée comme étant une loi gaussienne :

$$[c|\alpha^2] = \mathcal{N}_c(\mathbf{0}, \alpha^2) = \frac{1}{\pi^K \alpha^{2K}} \exp\left(-\frac{\|c\|^2}{\alpha^2}\right). \quad (14)$$

Des a priori sur la nature de la source peuvent être ici pris en compte [11] (corrélation de sources, a priori spatial, stationnarité).

4.1.2 Modèle de bruit de mesure

Les erreurs expérimentales liées au bruit de mesure peuvent être modélisées par une densité de probabilité gaussienne, et ce pour plusieurs raisons :

- Les erreurs expérimentales peuvent provenir de plusieurs origines, et cette superposition d'erreurs converge vers une loi gaussienne d'après le théorème central limite [12] ;
- Le choix d'une loi gaussienne est le choix qui implique le plus de dispersion pour la modélisation des fluctuations aléatoires.

Sa densité de probabilité peut alors s'écrire comme une distribution normale centrée complexe $\mathcal{N}_c(0, \beta^2 \mathbf{\Omega}_b)$ avec β^2 la puissance moyenne du bruit. La projection du bruit de mesure sur les fonctions de base est :

$$[v|\beta^2] = \mathcal{N}_c(\mathbf{0}, \beta^2 \mathbf{\Omega}_b) = \frac{1}{\pi^M \beta^{2M} |\mathbf{\Omega}_b|} \exp\left(-\frac{\|v\|_{\mathbf{\Omega}_b}^2}{\beta^2}\right), \quad (15)$$

avec $|\mathbf{\Omega}_b|$ désignant le déterminant de la matrice $\mathbf{\Omega}_b$, et la notation $\|v\|_{\mathbf{\Omega}_b}^2 = v^H \mathbf{\Omega}_b^{-1} v$.

4.1.3 Modèle du bruit de modèle

Pour une configuration physique et géométrique donnée et stationnaire, la variable Δs_k peut être définie comme étant une variable qui ne dépend pas du bloc temporel étudié. Cette caractéristique doit être utilisée pour pouvoir l'identifier du bruit total. La deuxième caractéristique utilisée est la linéarité observée en section 3.2 entre les valeurs singulières exactes et bruitées. L'hyperparamètre γ^2 est introduit comme l'inverse du coefficient directeur C défini en Eq. 12. La loi de probabilité de la variable Δs_k n'est pas connue, mais nous supposons qu'elle est de nature gaussienne pour des raisons de simplicité en terme de formalisme mathématique. Sa moyenne et sa variance sont, elles, inconnues et elles seront à déterminer par la suite.

4.2 Résolution du problème inverse sans prendre en compte l'erreur de modèle

Dans le but d'estimer les coefficients des fonctions de base c , la technique employée est de maximiser la probabilité a posteriori donnée par la formule de Bayes en Eq. (13) :

$$J_1 = \text{Argmax}\{[c, \alpha^2, \beta^2|y]\} \quad (16)$$

$$= \text{Argmin}\{-\ln[c, \alpha^2, \beta^2|y]\}. \quad (17)$$

Dans le but de trouver une expression des coefficients à reconstruire, la dérivée de cette fonction coût par rapport à c est annulée :

$$\frac{\partial J_1}{\partial c} = 0, \quad (18)$$

d'où :

$$c = \left[\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}^2 + \eta^2} \right] y, \quad (19)$$

avec $\eta^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ représentant le paramètre de régularisation.

4.3 Algorithme Espérance-Maximisation

L'erreur de modèle est définie comme une variable manquante qui simplifierait le problème : si l'erreur de modèle était connue, le problème inverse deviendrait classique. La particularité de l'algorithme EM est donc d'introduire la variable manquante comme étant une variable connue du problème. La deuxième étape est de maximiser la densité de probabilité a posteriori $[c|y]$, marginalisée sur la variable manquante.

La maximisation de la densité de probabilité a posteriori de l'équation (13) est rendue délicate par la prise en compte des erreurs de modèle. Une façon de simplifier le problème est de définir la variable représentant les erreurs de modèle comme une variable manquante pour chaque élément k :

$$\begin{aligned} \ln([y_k|c_k][c_k]) &= \ln\left(\int [y_k|\Delta s_k, y_k] d[\Delta s_k]\right) + \ln[c_k] \quad (20) \\ &\geq \int \ln[y_k|\Delta s_k, y_k] d[\Delta s_k|y_k] + \ln[c_k] \quad (21) \\ &= \mathbb{E}_{\Delta s_k|y_k}\{\ln[c_k|\Delta s_k, y_k]\} + \ln[c_k]. \quad (22) \end{aligned}$$

L'algorithme EM permet, de façon itérative, d'estimer la solution en suivant ces deux étapes :

1. Espérance :

$$J_1(c_k, c_k^{[n]}) = \mathbb{E}_{\Delta s_k|y_k, c_k^{[n]}}\{\ln[c_k|\Delta s_k, y_k]\} + \ln[c_k]. \quad (23)$$

2. Maximisation :

$$c_k^{[n+1]} = \underset{c_k}{\text{Arg max}} J(c_k, c_k^{[n]}). \quad (24)$$

Appliqué à notre problème, l'algorithme EM est résumé ci-dessous. Il est à noter que les hyperparamètres α^2 , β^2 et γ^2 sont supposés connus ici. Ils seront estimés de façon automatique en partie 5.

Algorithme

1. Initialisation de la solution sans prendre en compte l'erreur de modèle :

$$\hat{c}^{[n=0]} = \left[\frac{s_k}{s_k^2 + \eta^2} \right] \mathbf{y}, \quad (25)$$

2. Etape d'espérance

$$J_1(c_k, c_k^{[n]}) = -\beta^2 \|\mathbf{y} - (s_k + \Delta s_k) c_k\|^2 + \alpha^{-2} \|c\|^2 \quad (26)$$

Dans l'équation 26, estimer l'espérance de l'erreur de modèle :

$$\mathbb{E}\{\Delta s_k\} = \frac{\sum_{i=1}^I \Re \{c_{ki}^{[n]*} (y_{ki} - s_k c_{ki}^{[n]})\}}{\sum_{i=1}^I |c_{ki}^{[n]}|^2 + \frac{\beta^2}{\gamma^2 s_k^2}} \quad (27)$$

Estimer aussi la variance de l'erreur de modèle :

$$\text{Var}\{\Delta s_k\} = \frac{\beta^2}{\sum_{i=1}^I |c_{ki}^{[n]}|^2 + \frac{\beta^2}{\gamma^2 s_k^2}} \quad (28)$$

3. Etape de maximisation :

$$\frac{\partial J_1(c_k, c_k^{[n]})}{\partial c_{ki}} = 0 \quad (29)$$

Estimer :

$$c_{ki}^{[n+1]} = \frac{s_k + \mathbb{E}\{\Delta s_k\}}{|s_k + \mathbb{E}\{\Delta s_k\}|^2 + \text{Var}\{\Delta s_k\} + \eta^2} y_{ki} \quad (30)$$

L'Eq. (27) montre que l'espérance de l'erreur de modèle est le résultat d'une opération de corrélation entre les sources estimées et le modèle (au numérateur) et normalisé par un terme faisant intervenir un nouveau rapport d'hyperparamètres. Par ailleurs, la variance de l'erreur de modèle est fournie par une expression analytique et cette quantité décroît comme l'inverse du nombre I de blocs temporels.

5 Réglage des hyperparamètres

La première étape de l'algorithme est d'estimer la solution régularisée sans prendre en compte l'erreur de modèle. Durant cette première étape d'initialisation de la solution, le paramètre de régularisation est aussi calculé. Ce paramètre est estimé en calculant la densité de probabilité a posteriori [6] :

$$[\eta^2 | \mathbf{y}] \propto \left(\prod_{k=1}^M \frac{\langle |y|^2 \rangle}{s_k^2 + \eta^2} \right)^{M-2} \prod_{k=1}^M (s_k^2 + \eta^2)^{-1}. \quad (31)$$

L'estimateur MAP du paramètre de régularisation est alors donné par la minimisation de la fonction coût J_2 :

$$\eta_{MAP}^2 = \underset{\eta^2}{\text{Argmin}} (J_2(\eta^2)) \quad (32)$$

avec

$$J_2 = \sum_{k=1}^M \ln(s_k^2 + \eta^2) + \left(M + \frac{2}{I} \right) \ln \alpha^2, \quad (33)$$

et

$$\alpha^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{\langle |y|^2 \rangle}{s_k^2 + \eta^2}. \quad (34)$$

La puissance du bruit peut aussi être déduite :

$$\beta^2 = \alpha^2 \times \eta^2. \quad (35)$$

La détermination du troisième hyperparamètre γ^2 pose la question de l'identifiabilité de l'erreur de modèle de l'erreur de mesure. Il faut alors supposer γ^2 connu pour pouvoir identifier le problème. La stratégie adoptée est de calculer l'évidence $[\mathbf{y} | \alpha^2, \beta^2, \gamma^2, \mathbb{E}\{\Delta s_k\}]$ pour plusieurs valeurs de γ^2 . L'algorithme EM est alors répété plusieurs fois pour différentes valeurs de γ^2 . A l'issue de chaque processus itératif, une estimation de l'évidence est réalisée. Un exemple de fonction coût de l'évidence est proposé en figure 4. L'hyperparamètre optimal est celui qui minimise l'évidence :

$$\hat{\gamma}^2 = \underset{\gamma^2}{\text{Argmin}} (J_3(\gamma^2)), \quad (36)$$

avec

$$J_3(\gamma^2) = -\ln [\mathbf{y} | \alpha^2, \beta^2, \mathbb{E}\{\Delta s_k\}^{[n=n_{fin}]}] \quad (37)$$

$$= -\ln \frac{\exp\left(-\alpha^{-2} \sum_{k=1}^M \frac{|y_k|^2}{s_k^2 + \mathbb{E}\{\Delta s_k\}^{[n=n_{fin}]} + \eta^2}\right)}{\pi^M \alpha^{2M} |\Omega_n| \prod_{k=1}^M (s_k^2 + \mathbb{E}\{\Delta s_k\}^{[n=n_{fin}]} \eta^2)}.$$

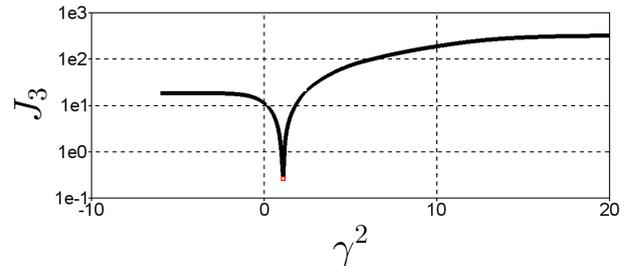


FIGURE 4 – Tracé d'un exemple de fonction coût permettant de déterminer l'hyperparamètre optimal représentant le bruit de modèle

6 Simulations numériques

Afin de valider l'approche proposée, des simulations numériques ont été réalisées. Trois types d'erreurs de modèle ont été modélisés : une erreur synthétique appliquée directement sur les valeurs singulières, une erreur appliquée sur la célérité des ondes acoustiques, et enfin une erreur appliquée sur la réflexion des ondes sur une paroi. La configuration étudiée est similaire à celle présentée en section 3.2.

6.1 Indicateurs utilisés

Pour plusieurs tirages aléatoires des bruits de mesure et de modèle, et pour plusieurs niveaux de bruit, l'erreur quadratique moyenne de reconstruction de la source est calculée.

$$EQM = \frac{\mathbb{E} \left\{ \sum_i |\tilde{q}_i - q_i|^2 \right\}}{\mathbb{E} \left\{ \sum_i |q_i|^2 \right\}}. \quad (38)$$

La référence q_i est fournie par la rétropropagation du champ de pression rayonné calculé sans ajout d'erreur de mesure ou de modèle. L'indice i représente l'indice des blocs temporels pris en compte, l'espérance est prise sur le nombre de tirages effectués.

Par ailleurs, le biais et la variance de l'erreur de reconstruction sont aussi calculés, respectivement :

$$biais = \frac{\mathbb{E} \left\{ \sum_i |\mathbb{E} \{ \tilde{q}_i \} - q_i|^2 \right\}}{\mathbb{E} \left\{ \sum_i |q_i|^2 \right\}}, \quad (39)$$

$$variance = \frac{\mathbb{E} \left\{ \sum_i |\tilde{q}_i - \mathbb{E} \{ \tilde{q}_i \}|^2 \right\}}{\mathbb{E} \left\{ \sum_i |q_i|^2 \right\}}. \quad (40)$$

6.2 Erreur commise sur les valeurs singulières

Tout d'abord, une erreur aléatoire a été appliquée sur les valeurs singulières. Les matrices singulières sont inchangées : seules les valeurs singulières sont perturbées par un bruit gaussien. L'erreur quadratique moyenne, le biais et la variance sont calculés pour différentes puissances de bruit de mesure et de modèle. La figure 5 présente ces trois indicateurs avec et sans prise en compte de l'erreur de modèle calculé par l'algorithme EM présenté ci-dessus.

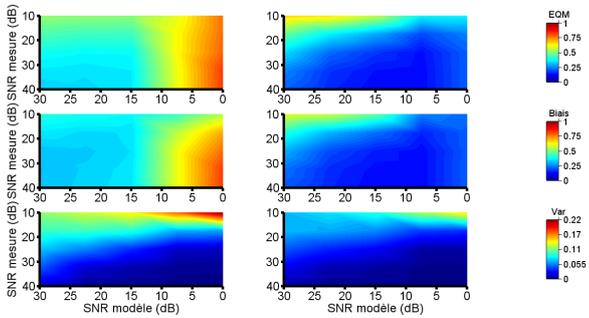


FIGURE 5 – Erreur quadratique moyenne (en haut), biais (au milieu) et variance (en bas) des solutions en ne prenant pas en compte les erreurs de modèle (à gauche) et en les prenant en compte (à droite) pour différents niveaux de bruit de mesure et de modèle

Cette figure montre que la prise en compte de l'erreur de modèle améliore considérablement les résultats de reconstruction. Ce cas de simulation valide l'approche dans l'hypothèse de l'invariance des matrices singulières vis-à-vis des erreurs de modèle.

6.3 Erreur commise sur l'estimation de la célérité

Une erreur sur l'estimation de la célérité est ici insérée volontairement lors du calcul du propagateur de l'équation 3. Les résultats de calcul des indicateurs sont représentés en

figure 6. Il apparaît que le biais est faiblement corrigé par la prise en compte des erreurs de modèle. Par ailleurs, la variance est très fortement réduite, ce qui traduit une stabilité accrue de la solution.

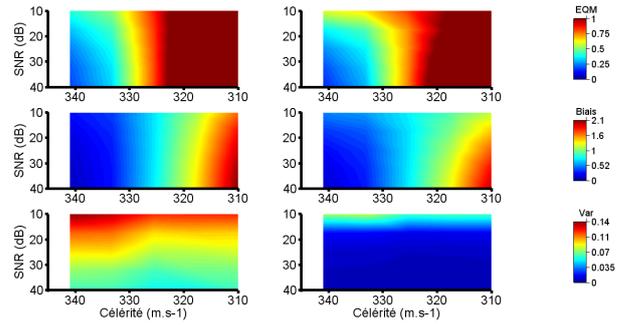


FIGURE 6 – Erreur quadratique moyenne (en haut), biais (au milieu) et variance (en bas) des solutions en ne prenant pas en compte les erreurs de modèle (à gauche) et en les prenant en compte (à droite) pour différents niveaux de bruit de mesure et de modèle

6.4 Erreur commise sur l'estimation d'une réflexion

Finalement, une erreur sur l'estimation du coefficient de réflexion a été introduite. L'erreur quadratique moyenne de reconstruction, ainsi que le biais et la variance sont présentés en figure 7. La prise en compte des erreurs de modèle sur les valeurs singulières n'influence pas l'erreur de reconstruction du champ source. L'algorithme EM ne permet donc pas d'améliorer les résultats mais fournit néanmoins l'information sur la variance de l'erreur de modèle sur l'estimation des valeurs singulières.

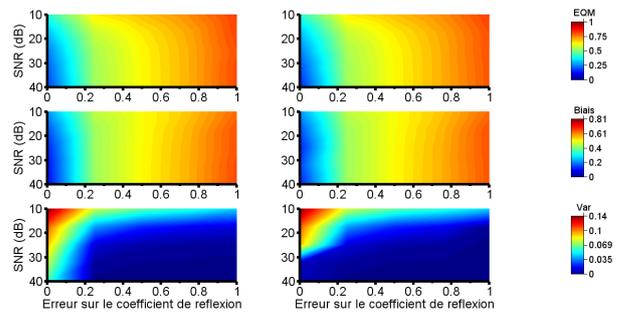


FIGURE 7 – Erreur quadratique moyenne (en haut), biais (au milieu) et variance (en bas) des solutions en ne prenant pas en compte les erreurs de modèle (à gauche) et en les prenant en compte (à droite) pour différents niveaux de bruit de mesure et de modèle

6.5 Discussion

L'hypothèse de l'invariabilité des matrices singulières semble forte dans le cas pratique d'une erreur de modèle commise sur la célérité des ondes ou sur l'approximation du coefficient de réflexion. La figure 8 montre les fonctions de base dans le cas avec et sans erreur commise sur le coefficient de réflexion. Ces fonctions de base semblent très différentes les une des autres avec ou sans erreur de modèle,

ce qui expliquerait le fait que les résultats de reconstruction ne sont pas améliorés avec l'utilisation de l'algorithme EM.

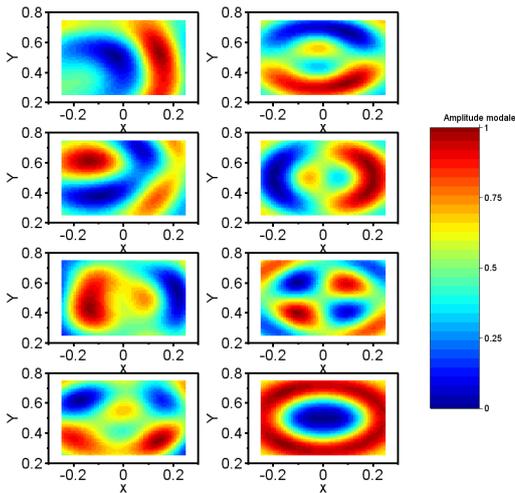


FIGURE 8 – 4 premières matrices singulières V calculées avec un coefficient de réflexion de $R = 0.4$ (à gauche) et $R = 0$ (à droite), renseignées avec une amplitude modale normalisée

Finalement, la variance sur l'estimation des valeurs singulières est une information fournie par l'algorithme EM. Cette variance ne traduit pas entièrement l'incertitude sur l'erreur de modèle, puisqu'elle traduit uniquement l'incertitude associée à l'estimation des valeurs singulières. Cette incertitude peut ensuite être propagée jusqu'à l'estimation des quantités acoustiques d'intérêt.

7 Conclusion

Un formalisme bayésien du problème inverse en imagerie acoustique a été utilisé pour introduire une variable représentant les erreurs de modèle. Une hypothèse d'invariabilité des matrices singulières de l'opérateur de propagation a été considérée. L'application d'un algorithme EM a été proposée et des estimations de l'espérance de l'erreur de modèle ainsi que de sa variance ont été calculées. Dans un cas simple où les valeurs singulières sont bruitées numériquement, l'algorithme s'est montré efficace et l'erreur quadratique moyenne de reconstruction a été fortement réduite. Pour des cas plus réalistes où l'erreur de modèle est appliquée sur l'estimation de la célérité des ondes ou sur le coefficient de réflexion d'une paroi, l'hypothèse d'invariabilité des matrices singulières s'est révélée trop sévère pour améliorer les résultats de reconstruction.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Labex CeLyA de l'Université de Lyon, géré par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-10-LABX-0060/ ANR-11-IDEX-0007).

Références

[1] S.M. Dumbacher and D.L. Brown. Practical considerations of the ifrf technique as applied to noise path analysis and acoustical imaging. In *Proc. 15th*

International Modal Analysis Conference, pages 1677–1685, 1997.

- [2] WA Veronesi and JD Maynard. Digital holographic reconstruction of sources with arbitrarily shaped surfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 85 :588, 1989.
- [3] M.-R. Bai. Application of bem (boundary element method)-based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 92 :533, 1992.
- [4] C.H. Jeong and J.G. Ih. Reconstruction of sound source pressures in an enclosure using the phased beam tracing method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 126 :158, 2009.
- [5] K.-U. Nam and Y.-H. Kim. Errors due to sensor and position mismatch in planar acoustic holography. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 106 :1655, 1999.
- [6] A. Pereira. *Acoustic imaging in enclosed spaces*. PhD thesis, Insa Lyon, 2013.
- [7] N. P. Galatsanos, V. Z. Mesarovic, R. Molina, and A. K. Katsaggelos. Hierarchical bayesian image restoration from partially known blurs. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 9(10) :1784–1797, 2000.
- [8] R. Molina, J. Mateos, and A. K. Katsaggelos. Blind deconvolution using a variational approach to parameter, image, and blur estimation. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 15(12) :3715–3727, 2006.
- [9] J. Antoni. A bayesian approach to sound source reconstruction : Optimal basis, regularization, and focusing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(4) :2873–2890, 2012.
- [10] E. Zhang. *Étude de problèmes inverses en dynamique des structures par inférence bayésienne (Recalage de modèle et reconstruction des efforts)*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 2010.
- [11] J. Antoni. Focalisation bayésienne : une approche unifiée du problème inverse en acoustique. *10ème Congrès Français d'Acoustique*, 2010.
- [12] H. Cramér. *Mathematical Methods of Statistics (PMS-9)*, volume 9. Princeton university press, 1999.