HAL open science

Structures connectives de l'intrication quantique

Stéphane Dugowson

To cite this version:

Stéphane Dugowson. Structures connectives de l'intrication quantique. 2014. hal-01025949

HAL Id: hal-01025949

https://hal.science/hal-01025949

Preprint submitted on 18 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Structures connectives de l'intrication quantique

Stéphane Dugowson *

19 juillet 2014

Résumé

Dans ce texte, après des rappels d'une part sur la notion de structure connective et d'autre part sur les formalismes de la mécanique quantique, nous associons certaines familles de structures connectives à tout état quantique intriquant un nombre fini quelconque de particules, ainsi qu'à tout « dispositif de mesure » portant sur de tels états. Cela nous permet finalement de définir un nouvel outil de classification de l'intrication quantique : l'ordre connectif.

Mots clés : Connectivité. Intrication quantique. Borroméen. Ordre connectif.

Abstract. *Connectivity structures of quantum entanglement.* In this paper, after some recalls about connectivity structures and about the formalisms of quantum mechanics, we associate some families of connectivity structures with any entangled quantum state, and with any "measurement device" on such states. This finally allows us to define a new classification tool for quantum entanglement : the connectivity order.

Keywords : Connectivity. Quantum entanglement. Borromean. Connectivity order.

Mathematics Subject Classification 2010 : 54A05, 57M25, 81P40.

Introduction

Le présent article s'inscrit dans le cadre général d'une recherche de l'auteur concernant les structures connectives des interactions entre plusieurs entités, et concerne plus spécifiquement les structures connectives susceptibles de décrire l'intrication quantique. Il accompagne et développe les considérations présentées par l'auteur dans plusieurs exposés : le 18 juin 2017 au séminaire de logique catégorique dirigé par Anatole Khélif à l'université Paris Diderot ([6]), le 25 juin 2014 à Aix-en-Provence au cours du *Workshop on Diffeology, etc.* organisé par Patrick Iglesias-Zemmour [1] ainsi que le 2 juillet 2014 au séminaire du laboratoire Quartz organisé à Supméca (Paris).

À l'origine de notre intérêt actuel pour le thème de l'intrication quantique, il y a notamment des discussions avec Anatole Khélif et Christophe Chalons

*stephane.dugowson@supmeca.com

1. http://math.huji.ac.il/~piz/Site/Worshop%20Diffeology%202014.html

dans le cadre du séminaire de logique catégorique de l'Université Paris Diderot, discussions portant en particulier sur les états intriqués et les expériences dites GHZ en référence aux travaux initiés à partir de 1989 par Greenberger, Horne et Zeilinger [10], états et expériences qui, en mettant en jeu trois, quatre ou davantage de particules, renouvellent le thème de l'intrication quantique initié par Einstein, Podolsky et Rosen (EPR). Du point de vue connectif, ce type d'intrication soulève immédiatement la question de savoir dans quelle mesure elle pourrait ou non être dite *borroméenne*[2], et plus généralement de définir la structure connective de tout état quantique intriqué. Se posera alors la question de la réalisabilité quantique de *toute* structure connective finie.

En général, l'intuition initiale de ce que devrait être la structure connective d'une interaction semble *a priori* assez claire : si un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les entités parmi celles que l'on considère peut être séparé par la pensée en deux parties entre lesquelles il n'y a pas d'interactions, alors ce sous-ensemble d'entités n'est pas connecté. La structure connective est alors celle qu'engendrent les sous-ensembles connectés[3]. Une des difficultés, en particulier dans le cas de l'intrication quantique, est toutefois de savoir quel genre de système constitue un tel sous-ensemble. Comme nous le verrons, cette difficulté provient, au moins dans le cadre du formalisme quantique en termes de vecteurs d'état (par oppositions aux opérateurs de densité), du fait qu'un sous-système quantique *n'est pas* un système quantique (fermé).

Dans le cas d'un entrelacs, plutôt que de considérer d'emblée un sous-entrelacs en *oubliant* les autres composantes, on peut voir un tel sous-entrelacs comme le résultat d'opérations de *coupures* sur les composantes qui ne lui appartiennent pas. Or, de telles coupures ont un analogue dans le formalisme quantique des vecteurs d'état, à savoir la transformation des états consécutive à une expérience de mesure quantique, notamment une mesure projective.

En 1997, Aravind [1], adoptant ce point de vue, a remarqué que l'état GHZ à trois particules pouvait effectivement être associé à l'entrelacs borroméen... entre autres entrelacs. En 2007, Sugita [16], s'appuyant cette fois sur le formalisme des opérateurs de densité, a montré que la nature borroméenne de l'état GHZ pouvait effectivement être considérée comme plus fondamentale que les autres descriptions par entrelacs. Aucun de ces deux auteurs, toutefois, ne disposait du point de vue connectif — certes lié aux entrelacs, notamment grâce au théorème de Brunn-Debrunner-Kanenobu (voir [7] et [8]) — et n'a considéré en toute généralité l'intrication quantique d'un nombre quelconque de particules.

Après quelques rappels sur les structures connectives (section 1), suivis d'un récapitulatif sur les formalismes de la mécanique quantique et en particulier de l'intrication quantique (section 2), c'est donc ce que nous nous proposons de faire dans la section suivante, intitulée *Structures connectives des états quantiques intriqués*.

La section 4, intitulée *Structures relationnelles des dispositifs multilocaux*, vise également à définir des structures connectives, non plus pour les états quantiques intriqués, mais cette fois pour les *expériences de mesure* que l'on peut réaliser sur de tels états, ces expériences étant identifiées à des familles de ques-

2. La structure borroméenne est l'une des structures connectives les plus fondamentales, voir plus loin la section 1.

3. Bien entendu, on peut imaginer que la structure connective d'une interaction évolue au cours du temps en fonction des interactions elles-mêmes, ou des interactions avec d'autres systèmes.

tions qui peuvent être posées, localement, aux systèmes quantiques considérés. Afin de pouvoir préciser les structures connectives en question, nous commencerons par formaliser ce type de situations grâce à la notion de *dispositif multilocal* — notion directement empruntée, avec quelques changements terminologiques, aux relations considérées par Christophe Chalons dans son travail sur les degrés ludiques (voir [4]) — puis nous préciserons diverses notions de localité susceptibles de s'appliquer ou non à ces dispositifs. Plusieurs exemples de tels dispositifs et de leurs structures connectives sont alors présentés, portant notamment sur les états quantiques EPR et GHZ.

Enfin, l'aspect probabiliste des dispositifs de mesure ayant été laissé de coté dans les considérations précédentes, une dernière section présente rapidement, à titre de piste de recherche, la notion de structure connective d'une famille de variables aléatoires, due à Anatole Khélif.

On trouvera à la fin du texte un indexe des notations, la liste des références bibliographiques et une table des matières.

1 Rappels sur les structures connectives

Nous donnons ci-après quelques rapides rappels sur les structures connectives, le lecteur souhaitant approfondir la question étant invité à se reporter aux références [7, 8, 9].

1.1 Structures connectives intègres

Définition 1 (Espaces connectifs)**.** Un *espace connectif* est un couple $X = (|X|, \kappa(X))$ formé d'un ensemble $|X|$ et d'un ensemble non vide $\kappa(X)$ de parties de $|X|$ tel que pour toute famille $\mathcal{I} \in \mathcal{P}(\kappa(X))$, on ait

$$\bigcap_{K \in \mathcal{I}} K \neq \varnothing \Longrightarrow \bigcup_{K \in \mathcal{I}} K \in \kappa(X).$$

L'ensemble $|X|$ est le *support* de X, l'ensemble $\kappa(X)$ est la *structure connective* de X et ses éléments sont les *parties connexes* ou *parties connectées* de l'espace connectif X. Un point $x \in |X|$ est *absent* s'il n'appartient à aucune partie connexe de X, il est *présent* dans le cas contraire. On appelle *composante absente* de X l'ensemble des points absents de X. On appelle *composantes connexes* de X les parties connexes maximales pour l'inclusion. Pour tout point présent x de X, on appelle *composante connexe de x* l'unique composante connexe de X contenant x. Nous dirons d'un espace connectif qu'il est *intègre* si tout singleton est connecté. Un *morphisme connectif*, ou *application connective*, d'un espace connectif $(|X|, \kappa(X))$ vers un autre $(|Y|, \kappa(Y))$ est une application $f : |X| \to |Y|$ telle que :

$$\forall K \in \kappa(X), f(K) \in \kappa(Y).$$

Dans le présent article, nous ne considérerons que des espaces connectifs finis intègres.

1.2 Exemples

Exemple 1 (Espaces connectifs topologiques)*.* On définit un foncteur U_T : **Top** $\to$ **Cnct** en associant à tout espace topologique l'espace connectif intègre ayant les

mêmes points, et dont les connexes sont les parties connexes pour la topologie de l'espace considéré. Nous dirons qu'un espace connectif est topologique s'il est dans l'image objet de U_T.

Exemple 2 (Espaces connectifs graphiques). La notion de connexité d'un ensemble de sommets d'un graphe simple non orienté conduit à la définition d'un foncteur U_G : **Grf** $\to$ **Cnct** défini sur la catégorie **Grf** dont les objets sont les graphes simples non orientés et dont les flèches sont les applications qui préservent cette connexité. A tout graphe de ce genre, le foncteur U_G associe l'espace connectif ayant pour points les sommets du graphe, et pour parties connexes tout ensemble de sommets connexe au sens des graphes, *i.e.* tel qu'il existe un chemin dans cet ensemble formé d'arêtes reliant de proche en proche toute paire de points de cet ensemble. Nous dirons qu'un espace connectif est graphique s'il est dans l'image objet de U_G.

Exemple 3 (Espace borroméen, espaces brunniens). L'exemple le plus simple d'espace intègre ni topologique ni graphique est l'*espace borroméen* $\mathcal{B}_3$, où pour tout entier n on désigne par $\mathcal{B}_n$ l'espace intègre à n points dont la seule partie connexe non réduite au vide ou à un singleton est la partie pleine :

$$|\mathcal{B}_n| = \{0, 1, ..., n-1\} \quad \text{et} \quad \kappa^\bullet(\mathcal{B}_n) = \{|\mathcal{B}_n|\},$$

où, pour tout espace connectif X, on a posé

$$\kappa^\bullet(X) = \{K \in \kappa(X), card(K) \geqslant 2\}.$$

Exemple 4 (Structure connective des entrelacs). À tout entrelacs L dans $\mathbf{R}^3$ ou $\mathbf{S}^3$, on associe un espace connectif intègre S_L en prenant pour points de S_L les composantes de L, les parties connexes de l'espace étant données par les sous-entrelacs de L non séparables par un plan topologique.

1.3 Théorème de Brunn-Kanenobu et conjectures brunniennes

L'exemple 4 admet une sorte de réciproque, énoncée par Hermann Brunn [2] en 1892, selon laquelle toute structure connective intègre finie est la structure d'un entrelacs de $\mathbf{R}^3$. Brunn a donné, pour toute structure connective intègre finie, l'idée principale de la construction d'un tel entrelacs, construction fondée sur les *entrelacs brunniens*, et une démonstration complète de la représentabilité par entrelacs de toute structure connective intègre finie a finalement été donnée en 1985 par Kanenobu [11, 12], après un travail intermédiaire, dans les années 1960, de Debrunner [5].

Dans le présent article, nous appellerons *conjectures brunniennes* toute affirmation portant sur la réalisabilité de toute structure connective intègre finie, non plus en termes d'entrelacs, mais par les objets auxquels nous associons une ou plusieurs structures connectives, en l'occurrence : des états quantiques dans la section 3, des dispositifs multilocaux dans la section 4, des familles de variables aléatoires dans la section 5.

Par exemple, la conjecture brunnienne pour la structure d'intrication globale d'un état quantique pur [4] consiste à affirmer que pour toute structure connective intègre finie κ, il existe un état quantique pur dont la structure d'intrication globale est précisément la structure κ.

4. voir la définition 24, section 3.1.7 page 23.

1.4 Engendrement de structures connectives

Pour tout ensemble E, l'ensemble des structures connectives intègres dont E peut être muni constitue un treillis complet pour l'inclusion. La plus fine d'entre elle est appelée *structure discrète*, ou encore, pour éviter tout risque de confusion, *structure discrète intègre*. La moins fine est la structure grossière ou indiscrète.

Comme dans le cas des espaces topologiques, une conséquence de l'organisation en treillis complets des structures connectives (intègres) sur un ensemble E est la notion de structure connective (intègre) la plus fine contenant un ensemble donné quelconque $\mathcal{A}$ de parties de E. L'engendrement de cette structure à partir de l'ensemble $\mathcal{A}$ est décrit dans [7], § 2, théorème 3. Une telle construction justifie l'appellation « structure connective intègre *engendrée* par $\mathcal{A}$ » pour désigner la structure en question. On note $[\mathcal{A}]_1$ ou $[\mathcal{A}]$ la structure connective intègre engendrée par $\mathcal{A}$.

1.5 Ordre connectif

Dans [8], nous avons défini l'ordre connectif $\Omega(X)$ d'un espace connectif X quelconque. C'est un ordinal, généralement transfini. Dans le cas des espaces connectifs intègre *finis*, l'ordre connectif est un entier naturel, plus simple à définir : l'ordre connectif $\Omega(X)$ d'un espace connectif *fini* intègre X coïncide avec l'ordre connectif défini dans [7], à savoir la hauteur du graphe orienté acyclique G_X constitué des connexes irréductibles, muni de la relation d'inclusion, où la notion de connexe irréductible est donnée par la définition suivante.

Définition 2 (Connexes irréductibles)**.** Soit $X = (|X|, \kappa_X)$ un espace connectif intègre. Une partie connexe $K \in \kappa_X$ est dite *irréductible* si et seulement si elle n'appartient pas à la structure connective intègre engendrée par les autres parties : $K \notin [\kappa_X \setminus \{K\}]_1$.

Les parties connexes irréductibles sont également appelées les *points génériques* de l'espace connectif considéré.

L'ordre connectif d'un espace connectif $X = (|X|, \kappa)$ sera également appelé l'ordre connectif de la structure connective κ, et par conséquent sera également notée $\Omega(\kappa)$.

2 Quantique : deux formalismes de base

Dans cette section 2, pour laquelle nous nous sommes essentiellement appuyé sur l'ouvrage de Chuang et Nielsen,[13], nous rappelons les deux formalismes mathématiques, d'ailleurs conceptuellement assez différents, réglant le comportement général des systèmes quantiques : celui, $\mathcal{FV}$, des vecteurs d'état (2.2), et celui, $\mathcal{FD}$, des *opérateurs de densité* (2.3), avant de préciser comment passer d'un formalisme à l'autre.

Nous commencerons toutefois par préciser certaines notions communes aux deux formalismes concernant les notions de système, d'état et de mesure quantiques, l'utilisation d'espaces de Hilbert, ainsi que la composition de systèmes (2.1).

Remarque 1. Certains innovations terminologiques nous ont paru nécessaires par rapport à la terminologie usuelle. Bien entendu, dans ce cas, nous les signalons clairement.

Remarque 2. La présentation usuelle de ces formalismes s'appuie notamment sur des postulats. Notre propre présentation des choses nous conduit parfois à ne présenter que des morceaux de ces postulats, que nous signalons en parlant également de principes : *principe de la mesure projective*, *principe du mixage des états*, etc.

2.1 Notions communes aux deux formalismes

2.1.1 Notion de système quantique

Définition 3. Un *système quantique* $\mathcal{S}$ est défini, dans un formalisme $\mathcal{F}$, par la donnée

- d'un espace de Hilbert $H_{\mathcal{S}}$, appelé *espace des états* de $\mathcal{S}$,
- d'un ensemble $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{F}}$, entièrement déterminé par l'espace $H_{\mathcal{S}}$, et dont les éléments constituent les *états* dans lesquels le système $\mathcal{S}$ est susceptible, *éventuellement*, de se trouver.

Remarque 3. Pour un système dont l'espace des états est $H_{\mathcal{S}}$, la définition de l'ensemble $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{F}}$ dépend du formalisme $\mathcal{F}$ utilisé. Pour les distinguer, nous appellerons parfois *états vectoriels* les états considérés dans le formalisme $\mathcal{FV}$ des vecteurs d'état, et *états de densité* ceux qu'emploie le formalisme $\mathcal{FD}$ des opérateur de densité. En tout cas, il importe de souligner qu'aussi bien avec l'un que l'autre des deux formalismes en question, l'espace de Hilbert $H_{\mathcal{S}}$ *n'est pas* l'ensemble des états $\widetilde{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$. On pourrait regretter, dans ces conditions, que l'espace de Hilbert en question soit couramment appelé *espace des états*. Heureusement, en pratique, cela ne semble pas devoir être source de trop grandes confusions.

Remarque 4. Le mot *éventuellement* que nous avons écrit dans la définition 3 ci-dessus vient de ce que, dans le cas du formalisme des vecteurs d'état, il peut arriver qu'un système quantique ne se trouve dans aucun état. Par ailleurs, dans le formalisme des opérateurs de densité, nous verrons qu'un système quantique peut se trouver dans plusieurs états différents, selon la connaissance que l'on a de ce système.

Remarque 5. D'une façon générale, l'expression *système quantique* désignera pour nous uniquement des systèmes qui, en dehors des expériences de mesure, restent *fermés*, c'est-à-dire n'échangeant pas d'information, et par conséquent pas non plus d'énergie, avec d'autres systèmes. Il faut toutefois souligner que les corrélations dues à l'intrication quantique rendent problématique, et en tout cas plutôt subtile, cette notion de fermeture. Elle se présente du reste de manière différente dans les deux formalismes.

Remarque 6. En général, un système quantique connaît une évolution continue de son état « au cours du temps »(quitte à interpréter en termes relativistes la signification de cette expression : temps propre d'une particule, etc...), une telle évolution étant régie par l'équation de Schrödinger ou l'une de ses variantes (Heisenberg, Dirac, etc). Nous ne considérerons pas du tout cet aspect des choses dans le présent article. Par contre, il peut se produire, en particulier au sein d'un

espace-temps relativiste, qu'un système quantique soit créé ou soit détruit à la faveur de la disparition ou de la création d'autres systèmes quantiques (pour distinguer deux systèmes quantiques, on pourra faire en sorte que les espaces de leurs états respectifs soient disjoints).

2.1.2 À propos des espaces de Hilbert, des bras et des kets

Nous ne considérerons dans le présent article que des espaces de Hilbert *de dimension finie*, le plus souvent une puissance de 2. Par ailleurs, les espaces de Hilbert considérés seront définis sur le corps des complexes $\mathbf{C}$, bien qu'en pratique nous n'utiliserons que des nombres réels. Le produit scalaire $< \cdot | \cdot >$ sur l'espace de Hilbert H sera donc hermitien, et tout opérateur positif — *i.e.* « semi-defini positif », autrement dit dont la forme quadratique associée ne prend que des valeurs positives ou nulles — est automatiquement auto-adjoint.

L'adjointe (ou conjuguée) d'une matrice (ou d'un endomorphisme) A sera notée $A^\dagger$. Une base orthonormée de H étant donnée, un vecteur ψ de H s'identifie à une matrice colonne, tandis que la forme linéaire $\psi^\dagger$ définie pour tout $\varphi \in H$ par $\psi^\dagger(\varphi) = < \psi, \varphi > \in \mathbf{C}$ s'identifie à la matrice ligne adjointe de celle de ψ.

Dirac a introduit une notation astucieuse pour désigner les vecteurs de H et leurs adjoints : la notation des *bras* et des *kets*. Selon cette notation, les vecteurs ψ, φ, a, b etc... de l'espace H seront également notés sous forme de *kets* : $|\psi >$, $|\varphi >$, $|a >$, $|b >$, ...

Remarque 7. On utilisera également couramment les notations $|0 >$, $|1 >$, où $|0 >$ *ne désigne en aucun cas le vecteur nul*, mais un vecteur unitaire que les informaticiens ont de bonnes raisons de vouloir noter ainsi pour le distinguer du vecteur $|1 >$, ces deux-là étant orthogonaux.

Selon la notation de Dirac, les formes linéaires sur H, adjointes des vecteurs, s'écrivent sous forme de *bras* : la forme linéaire adjointe du vecteur $|\psi >$ sera ainsi écrite $< \psi|$. De cette manière, l'action de la forme $< \psi|$ sur un vecteur $|\varphi >$, qu'on aurait pu noter $< \psi||\varphi >$, se notera simplement $< \psi|\varphi >$, ce qui est bien le produit scalaire attendu.

Remarque 8 (Sur l'expression $< v|A|w >$). Notons provisoirement $(.,.)$ le produit scalaire sur H. Pour tout endomorphisme A et tous vecteurs u et v, on a :

$$< v||A|w >= ((< v|)^\dagger, A|w >) = (|v >, A|w >) = (A^\dagger|v >, |w >),$$

d'où

$$< v||A|w >= ((< v|A)^\dagger, |w >) =< v|A||w > .$$

Les deux expressions $< v||A|w >$ et $< v|A||w >$ désignant dans tous les cas le même scalaire, il est naturel de noter simplement celui-ci $< v|A|w >$.

2.1.3 Expériences de mesure, observables

Les états quantiques d'un système ne peuvent pas, en général, être connus expérimentalement. Néanmoins, tout système quantique peut faire l'objet d'expériences de mesure, visant à obtenir au moins des informations partielles sur les états dans lesquels il pourrait se trouver, expériences qui, le plus souvent, modifient d'ailleurs l'état quantique du système. Plus précisément, on dispose pour

tout système quantique d'un ensemble de procédures formelles que nous appellerons *expériences de mesure* ou simplement *mesures*, procédures qui indiquent, pour tout état e du système, la probabilité, au terme de cette procédure :

— d'obtenir telle ou telle valeur λ, appelée *résultat de la mesure*, appartenant à un ensemble de valeurs possibles associé à cette procédure,

— que le système connaisse une transition vers tel ou tel état e', fonction à la fois de l'état antérieur e du système et du résultat λ obtenu.

Il existe plusieurs classes plus ou moins générales de telles procédures formelles de mesures. Dans cet article, nous utiliserons uniquement ce qu'on appelle les *mesures projectives*, qui reposent sur la notion d'*observable*[5]

Définition 4. Une *observable* A du système quantique $\mathcal{S}$ est un opérateur hermitien[6] sur $H = H_{\mathcal{S}}$, autrement dit un opérateur linéaire diagonalisable avec des valeurs propres réelles et dont les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Remarque 9. La définition donnée ci-dessus d'une observable est difficile à comprendre directement. Elle se comprend mieux à la lumière de la description de la procédure formelle de mesure — spécifique à chacun des deux formalismes employés — associée à toute observable. En tout état de cause, une telle définition a un coté un peu artificiel, dans la mesure où deux types de données assez différents s'y trouve pour des raisons de commodité accolés : d'une part des sous-espaces orthogonaux supplémentaires, d'autre part des valeurs réelles attachées à ces sous-espaces.

2.1.4 Systèmes composés

Définition 5. Étant donnée une famille $(\mathcal{S}_i)_{i\in I}$ de systèmes quantiques, on appelle système quantique composé par cette famille un système $\mathcal{S}$ dont l'espace des états est le produit tensoriel de celui des $\mathcal{S}_i$:

$$H_{\mathcal{S}} = \bigotimes_{i\in I} H_i, \tag{1}$$

où on a posé $H_i = H_{\mathcal{S}_i}$.

En outre, lorsque les sous-systèmes $\mathcal{S}_i$ se trouvent dans des états donnés, il en découle l'attribution au système global $\mathcal{S}$ d'un état spécifique, selon des règles qui dépendent du formalisme employé (voir ci-après les sections 2.2.3 et 2.3.3).

Remarque 10. On rappelle que le produit scalaire sur l'espace $\bigotimes_{i\in I} H_i$ est donné par le produit des produits scalaires sur chaque H_i, de sorte que l'on peut écrire

$$< \psi_1\psi_2\cdots\psi_k|\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k >=< \psi_1|\varphi_1 >< \psi_2|\varphi_2 > \cdots < \psi_k|\varphi_k >$$

5. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage [13] pour la définition plus générale de mesures quantiques fondées sur l'utilisation de *systèmes d'opérateurs de mesure*, les différences entre une mesure faite selon un systèmes d'opérateurs quelconques avec le cas particulier d'une mesure projective sont : premièrement, qu'un système d'opérateurs quelconque peut conduire à un nombre quelconque de résultats différents pour la mesure effectuée ; deuxièmement, que ces résultats ne sont pas nécessairement numériques ; et enfin, que les états dans lesquels se retrouvent le système juste après la mesure résultent de l'action d'opérateurs quelconques et non nécessairement de projections orthogonales.

6. Un opérateur hermitien est la même chose qu'un opérateur auto-adjoint.

où la notation $< bra|ket >$ a été étendue aux produit tensoriels en posant

$$|\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_k >= \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \cdots \otimes \varphi_k,$$

et

$$< \psi_1\psi_2\cdots\psi_k| = |\psi_1\psi_2\cdots\psi_k >^\dagger .$$

2.2 Formalisme $\mathcal{FV}$ des vecteurs d'état

2.2.1 États (vectoriels) d'un système quantique

Dans le formalisme des vecteurs d'état, l'ensemble des états (vectoriels) $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{FV}}$ d'un système quantique $\mathcal{S}$ est l'ensemble des *droites vectorielles* de l'espace des états $H_{\mathcal{S}}$. Autrement dit, $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{FV}}$ est l'espace projectif associé à $H_{\mathcal{S}}$.

Par un abus de langage courant, nous parlerons des vecteurs appartenant à l'espace de Hilbert $H_{\mathcal{S}}$ comme constituant eux-mêmes les états du système quantique $\mathcal{S}$, alors que deux vecteurs non nuls colinéaires de cet espace, engendrant la même droite vectorielle, représenteront en fait le même état.

En pratique, on se restreint presque toujours à l'utilisation de vecteurs *unitaires* ψ — *i.e.* tels que $< \psi|\psi >= 1$ — de l'espace $H_{\mathcal{S}}$. En particulier, un tel vecteur unitaire $\psi \in H_{\mathcal{S}}$ et son opposé $-\psi$ représenteront *le même* état quantique, de même que tout vecteur unitaire de la forme $e^{i\theta}\psi$.

2.2.2 Mesures projectives

À toute observable M de sous-espaces propres $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, autrement dit telle que

$$M = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda P_\lambda$$

où les P_λ désignent les projections orthogonales sur les E_λ, vérifiant donc

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda = Id,$$

se trouve associée la procédure de mesure suivante : le système quantique étant dans un état (généralement inconnu)

$$\psi = \sum_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda(\psi)$$

avec $< \psi|\psi >= 1$, il y a une probabilité

$$p(\lambda) =\| P_\lambda(\psi) \|^2=< P_\lambda(\psi)|P_\lambda(\psi) >=< \psi|P_\lambda(\psi) >=< \psi|P_\lambda|\psi >$$

que le résultat numérique pour la mesure effectuée soit le nombre réel λ, le système sautant alors de l'état ψ à l'état

$$P_\lambda(\psi) \simeq \frac{P_\lambda(\psi)}{\| P_\lambda(\psi) \|}, \tag{2}$$

où le vecteur unitaire $\dfrac{P_\lambda(\psi)}{\| P_\lambda(\psi) \|}$ est bien définie si la probabilité en question est non nulle.

D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \| P_\lambda(\psi) \|^2 = 1,$$

autrement dit la somme des probabilités considérées est bien égale à 1.
Notation. Pour tout état vectoriel $a \in H$ et toute observable $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda P_\lambda$, nous noterons $M[a]$ l'ensemble des états vectoriels auxquels peut conduire la mesure de M lorsque le système est initialement dans l'état a , autrement dit

$$M[a] = \{ \frac{P_\lambda(a)}{\| P_\lambda(a) \|}, \lambda \in \Lambda, P_\lambda(a) \neq 0_H \}. \tag{3}$$

Remarque 11. Chaque observable M donnant lieu à une procédure de mesure entièrement spécifiée, on parlera aussi bien de l'*expérience de mesure* M, voire de la *mesure* M, que de l'*observable* M.

Exemple 5 (Opérateur d'homothétie). Si M est l'opérateur (ou la matrice) nulle, ou plus généralement si M est une homothétie — en particulier l'identité de H — l'expérience de mesure correspondante est celle qui consiste à décider à l'avance le résultat et à ne rien faire. Avec une probabilité égale à 1 l'état du système (toujours inconnu) s'en trouve inchangé. Cet exemple jouera un rôle fondamental dans la notion de mesure partielle d'un système intriqué (voir plus loin la définition 7).

2.2.3 Systèmes composés et intrication

Principe de composition des états Un postulat fondamental de la mécanique quantique [7], stipule que lorsque les systèmes d'une famille $(\mathcal{S}_i)_{i \in I = \{1,\ldots,k\}}$ sont respectivement dans les états ψ_1, ..., ψ_k, alors le système $\mathcal{S}$ composé des $\mathcal{S}_i$ se trouve dans l'état

$$\psi = \bigotimes_{i \in I} \psi_i \in \bigotimes_{i \in I} H_{\mathcal{S}_i} = H_{\mathcal{S}}, \tag{4}$$

ce qu'en notations *kets* on écrit encore [8]

$$|\psi >= |\psi_1 > \otimes |\psi_2 > \otimes \ldots \otimes |\psi_k > = |\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_k > .$$

Cependant, le système $\mathcal{S}$ peut aussi se trouver dans des états non factorisables.

Définition 6. Nous dirons qu'un état $\psi \in H_{\mathcal{S}} = \bigotimes_{i \in I} H_{\mathcal{S}_i}$ est *complètement séparable* s'il est complètement factorisable, autrement dit s'il peut s'écrire sous la forme

$$|\psi > = |\psi_1 > \otimes |\psi_2 > \otimes \ldots \otimes |\psi_k >.$$

Un état non complètement séparable sera dit *partiellement intriqué*. En outre, s'il existe une partition [9] $I = I_A \cup I_B$ telle que $\psi \in H_{\mathcal{S}}$ puisse s'écrire, à l'ordre des facteurs près [10], sous la forme

$$\psi = \psi_A \otimes \psi_B,$$

7. Voir [13], p. 94.
8. Voir la remarque 10.
9. Voir la note 20.
10. Voir la remarque 20.

avec, pour $j \in \{A, B\}$,

$$\psi_j \in \bigotimes_{i \in I_j} H_{\mathcal{S}_i},$$

nous dirons que ψ est *partiellement séparable*. Si ψ n'est pas partiellement séparable, nous dirons qu'il est *globalement intriqué*.

Remarque 12. Le mot « partiellement » doit être compris ici au sens large, *i.e.* équivalent à « partiellement ou complètement ». Par conséquent, un état complètement séparable est également « partiellement séparable ».

Remarque 13. La terminologie usuelle appelle état *séparable* ce que nous appelons un état *complètement séparable*, et par voie de conséquence elle appelle état *intriqué* ce que nous appelons état *partiellement intriqué*. Ces appellations usuelles se comprennent bien dans le cas où il n'y a que deux sous-systèmes, puisqu'il n'y a pas dans ce cas de différence entre un état complétement séparable et un état partiellement séparable. Dès qu'il y a au moins trois sous-systèmes, les précisions apportées par les adverbes *complètement* et *partiellement* nous ont semblées indispensables.

Remarque 14. Le théorème de décomposition de Schmidt affirme que tout état vectoriel unitaire $\psi \in H_A \otimes H_B$ d'un système composé de *deux* sous-systèmes peut s'écrire sous la forme

$$\psi = \sum_r \alpha_r \psi_r^A \otimes \psi_r^B,$$

les $(\psi_r^A)_r$ formant une famille orthonormée de H_A et les $(\psi_r^B)_r$ une famille orthonormée de H_B, et les α_r étant des réels strictement positifs, l'ensemble des α_r étant d'ailleurs unique, c'est-à-dire entièrement déterminé par la donnée de ψ. L'état ψ est alors séparable si et seulement si le cardinal de cet ensemble, c'est-à-dire le nombre de termes de cette somme, appelée *rang de Schmidt de* ψ, est égal à 1.

Une remarque évidente mais qui mérite réflexion est que lorsqu'un système composé se trouve dans un état intriqué alors plusieurs des sous-systèmes — tous, dans le cas d'un état globalement intriqué — connaissent une situation curieuse : **ils ne sont dans aucun état !**. Ou alors, si l'on considère qu'un système quantique devrait, par définition, se trouver toujours dans un état ou un autre, il faudrait décider que de tels sous-systèmes ne sont pas des systèmes. Comme il semble légitime de douter qu'il s'agisse en tout cas de systèmes véritablement fermés, ce point de vue pourrait en effet être soutenu. Pour notre part, en définissant un système par la donnée de son espace (et de son ensemble) d'états mais sans préciser qu'il devait nécessairement se trouver toujours dans tel ou tel état, notre conclusion est différente : les sous-systèmes qui composent un système plus vaste restent des systèmes quantiques fermés, mais il faut alors admettre qu'un système quantique peut parfois n'être dans aucun état.

Dans ces conditions, qu'est-ce que faire une mesure quantique sur un sous-système qui ne se trouve dans aucun état quantique particulier ? La définition suivante répond à cette question.

Définition 7 (Mesures partielles)**.** Étant donnés $(\mathcal{S}_i)_{i \in I = \{1,\ldots,k\}}$ une famille de systèmes quantiques composant un système $\mathcal{S}$, et étant donnée une observable M_i sur l'espace $H_{\mathcal{S}_i}$, on appelle *expérience de mesure partielle* de M_i l'expérience de mesure sur le système $\mathcal{S}$ de l'observable définie, à l'ordre des facteurs près [11],

11. Voir la remarque 20.

par

$$M_i \otimes Id_{(\otimes_{j\neq i} H_j)} = M_i \otimes (\bigotimes_{j\neq i} Id_{H_j}),$$

où on a posé $H_j = H_{\mathcal{S}_j}$.

2.3 Formalisme $\mathcal{FD}$ des opérateurs de densité

Le formalisme quantique en termes d'opérateurs de densité a été introduit par John von Neumann et, indépendamment, par Lev Landau en 1927. Il constitue d'une certaine façon une généralisation probabiliste du formalisme par vecteurs d'état.

2.3.1 États (de densité) d'un système quantique

Conformément à la définition 3, le formalisme des opérateurs de densité attache à tout système quantique $\mathcal{S}$ d'espace des états l'espace de Hilbert $H_{\mathcal{S}}$ un *ensemble* d'états, mais celui-ci n'est plus celui donné par le formalisme des vecteurs d'état. Afin de distinguer les deux sortes d'états, nous appellerons *états de densité* ceux que considère le formalisme des opérateurs de densité.

Avant de préciser ce que sont les états de densité d'un système quantique, faisons une remarque préliminaire au sujet du statut épistémologique des états en question : celui-ci est quelque peu ambigu, dans la mesure où, dans ce formalisme, l'état de densité d'un système n'est pas une donnée purement objective, mais peut dépendre également de la connaissance que nous avons à son sujet. En fait d'état, ce qui est formalisé ici se rapproche davantage d'*une description probabiliste de l'état* du système, de sorte qu'un système quantique donné pourra se trouver dans plusieurs états de densité différents en fonction des connaissances que nous aurons à son sujet. Nous donnerons ci-après plusieurs exemples de cette situation (voir page 13 le *principe de mixage*, ainsi que la remarque 16 et l'exemple 6).

Définition 8. Étant donné un système quantique $\mathcal{S}$ d'*espace* des états $H = H_{\mathcal{S}}$, *l'ensemble des états de densité* de $\mathcal{S}$ est l'ensemble $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{FD}} = \mathcal{T}(H)$ des opérateurs $\rho \in \mathcal{L}(H)$ positifs et de trace 1. Autrement dit, un état de densité ρ de $\mathcal{S}$ est un opérateur sur l'espace $H_{\mathcal{S}}$ vérifiant

$$\forall \psi \in H_{\mathcal{S}}, < \psi|\rho|\psi >= \psi^{\dagger}\rho\psi \geqslant 0,$$

et

$$tr(\rho) = 1.$$

Remarque 15. L'espace $H_{\mathcal{S}}$ étant défini sur le corps des complexes $\mathbf{C}$, la positivité de ρ équivaut au fait d'être hermitien ($\rho = \rho^{\dagger}$) avec des valeur propres λ (nécessairement réelles) toutes positives ou nulles : $\lambda \geqslant 0$.

La définition 8 ci-dessus constitue une partie du premier postulat [12] du formalisme des opérateurs de densité. Elle doit être complétée par l'énoncé du principe de mixage suivant :

12. Voir [13], p. 102.

Principe de mixage. Si l'on sait que le système $\mathcal{S}$ doit se trouver dans l'un des états ρ_1, ..., ρ_m avec des probabilité respectives p_1,..., p_m telles que $\sum_{1\leqslant j\leqslant m} p_j = 1$, on attribuera au système $\mathcal{S}$ l'état de densité $\rho = \sum_{1\leqslant j\leqslant m} p_j\rho_j$. Ce principe illustre le fait que l'état de densité d'un système dépend de notre connaissance à son sujet.

Définition 9. Un état de densité ρ est dit *pur* lorsqu'il existe $\psi \in H_{\mathcal{S}}$ tel que

$$\rho = |\psi >< \psi|.$$

Dans le cas contraire, il est dit *mixte*.

En utilisant le fait que, pour tout $\rho \in \mathcal{L}(H)$, la trace de ρ peut s'écrire

$$tr(\rho) = \sum_{j=1}^{j=d} < e_j|\rho|e_j >, \tag{5}$$

avec $(e_j)_{j\in\{1,\dots,d\}}$ une base orthonormée quelconque de H, on obtient immédiatement la formule suivante, très utile : pour tous vecteurs φ et ψ d'un espace de Hilbert H, on a

$$< \varphi|\psi >= tr(|\psi >< \varphi|). \tag{6}$$

On vérifie également sans difficulté la proposition 1 :

Proposition 1. *Pour tout état de densité ρ, on a : $tr(\rho^2) \leqslant 1$.*
De plus,

$$\rho \,\text{est pur} \Leftrightarrow tr(\rho^2) = 1.$$

2.3.2 Mesure projective

Dans cet article, nous ne ferons appel aux procédures de mesure quantique que dans le seul cadre du formalisme des vecteurs d'état, aussi n'indiquons-nous ici qu'à titre indicatif le principe des mesures projectives pour les états de densité.

Principe de mesure d'une observable. Étant donnée une observable $M = M^\dagger = M = \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda P_\lambda$, où les P_λ désignent les projections orthogonales sur les sous-espaces propres de M, définie sur l'espace de Hilbert $H_{\mathcal{S}}$ d'un système quantique $\mathcal{S}$ se trouvant dans un état de densité (généralement inconnu) ρ, une mesure de cette observable conduit au résultat λ avec la probabilité

$$p(\lambda) = tr(P_\lambda\rho),$$

son état de densité étant à cette occasion transformé en

$$\rho_\lambda = \frac{P_\lambda\rho P_\lambda}{tr(P_\lambda\rho)},$$

qui est bien défini lorsque cette probabilité est non nulle.

Remarque 16 (Impact sur l'état d'un système de l'oubli d'une mesure). Comme le remarque Chuang et Nielsen ([13], page 100), si l'on a effectué une telle mesure

mais qu'on en a perdu la trace, on peut toutefois affirmer, d'après le principe de mixage, qu'après cette mesure le système se trouve avec certitude dans l'état

$$\rho' = \sum_{\lambda \in \Lambda} p(\lambda)\rho_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \rho P_\lambda.$$

Si par contre on a noté le résultat λ de cette expérience de mesure, et qu'on ne l'a pas perdu, on peut affirmer que le système se trouve alors dans l'état de densité

$$\rho_\lambda = \frac{P_\lambda \rho P_\lambda}{tr(P_\lambda \rho)}.$$

Ceci illustre qu'un même système peut se trouver en même temps dans deux états de densité différents, selon la connaissance que l'on en a (songer à deux expérimentateurs dont l'un connaîtrait le résultat de l'expérience et l'autre non), et donne à réfléchir sur le statut épistémologique de ces états de densité.

2.3.3 Systèmes composés et intrication

Considérons une famille $(\mathcal{S}_i)_{i \in I = \{1,\dots,k\}}$ de systèmes quantiques, d'espaces respectifs $H_i = H_{\mathcal{S}_i}$, composant un système global $\mathcal{S}$ d'espace $H = H_{\mathcal{S}} = \bigotimes_{i \in I} H_i$.

Principe de composition des états. Selon l'un des postulats du formalisme des opérateurs de densité [13], lorsque les systèmes $(\mathcal{S}_i)$ se trouvent dans des états de densité respectifs ρ_i, le système global $\mathcal{S}$ se trouve alors dans l'état de densité

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_k \in \mathcal{T}(H). \tag{7}$$

Remarque 17. Rappelons que le produit tensoriel de $\rho_A \in \mathcal{L}(H_A)$ et de $\rho_B \in \mathcal{L}(H_B)$ est $\rho_A \otimes \rho_B \in \mathcal{L}(H_A \otimes H_B)$ caractérisé par le fait que pour tout $(\psi_A, \psi_B) \in H_A \times H_B$, on a

$$\rho_A \otimes \rho_B(\psi_A \otimes \psi_B) = \rho_A(\psi_A) \otimes \rho_B(\psi_B),$$

de sorte que, plus généralement, on peut donc écrire

$$\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_k(|\psi_1 \psi_2 \dots \psi_k >) = |\rho_1(\psi_1) \dots \rho_k(\psi_k) > .$$

Définition 10. Nous dirons qu'un état global de densité $\rho \in \mathcal{T}(H)$ est *complètement acorrélé* s'il est de la forme

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_k \in \mathcal{T}(H).$$

S'il existe une partition [14] $I = I_A \cup I_B$ telle que ρ puisse s'écrire, à l'ordre des facteurs près [15], sous la forme

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B,$$

avec $\rho_A \in \mathcal{T}(\bigotimes_{i \in I_A} H_i)$ et $\rho_B \in \mathcal{T}(\bigotimes_{i \in I_B} H_i)$, nous dirons que ρ est *partiellement acorrélé*. Un état de densité non complètement acorrélé sera dit *partiellement corrélé*, et un état non partiellement acorrélé sera dit *complétement corrélé*.

13. Voir [13], p. 102.
14. Voir la note 20.
15. Voir la remarque 20.

En outre, ρ sera dit *complètement séparable* s'il peut s'écrire sous la forme

$$\rho = \sum_{r=1}^{r=n} p_r \rho_{r,1} \otimes \rho_{r,2} \otimes ... \otimes \rho_{r,k} \in \mathcal{T}(H),$$

avec les $p_r \geqslant 0$ des probabilités telles que $\sum_{r=1}^{r=n} p_r = 1$. S'il existe une partition $I = I_A \cup I_B$ telle que ρ puisse s'écrire, à l'ordre des facteurs près, sous la forme

$$\rho = \sum_{r=1}^{r=n} p_r \rho_{r,A} \otimes \rho_{r,B},$$

avec, pour tout r, $\rho_{r,A} \in \mathcal{T}(\bigotimes_{i \in I_A} H_i)$ et $\rho_{r,B} \in \mathcal{T}(\bigotimes_{i \in I_B} H_i)$, nous dirons que ρ est *partiellement séparable*. Un état de densité non complètement séparable sera dit *partiellement intriqué*, et un état non partiellement séparable sera dit *complètement intriqué*.

Remarque 18. L'usage du mot *partiellement* dans la définition ci-dessus doit être compris au sens large : par exemple, un état complètement corrélé est *a fortiori* partiellement corrélé, etc.

Remarque 19. La terminologie usuelle appelle
- *corrélés* les états que nous appelons partiellement corrélés,
- *séparables* ceux que nous appelons complètement séparables,
- *intriqués* ceux que nous appelons partiellement intriqués.

Ces différences terminologiques, qui visent à davantage de précision, sont cohérentes avec celles déjà soulignées, dans le cas du formalisme vectoriel, par la remarque 13.

Quel que soit l'état global de densité ρ dans lequel le système composé $\mathcal{S}$ se trouve, il existe une façon naturelle — qui n'est de ce fait pas considérée comme faisant partie des postulats de la mécanique quantique — d'attribuer à chacun des sous-systèmes $\mathcal{S}_i$ un état de densité spécifique dont l'expression en fonction de ρ fait appel à la notion de trace partielle, ainsi définie :

Définition 11 (Traces partielles)**.** Étant donné un espace de Hilbert H et $H = H_A \otimes H_B$ une factorisation de H. On appelle trace partielle sur H_B l'unique application linéaire $tr_B : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H_A)$ qui, à tout opérateur ρ de la forme

$$\rho = |\varphi_A \varphi_B >< \psi_A \psi_B| = |\varphi_A >< \psi_A| \otimes |\varphi_B >< \psi_B|$$

associe l'opérateur $tr_B(\rho) \in \mathcal{L}(H_A)$ donné par

$$tr_B(\rho) =< \psi_B|\varphi_B > |\varphi_A >< \psi_A|. \tag{8}$$

Définition 12. d'un état de densité à un sous-système] Étant donné $\rho \in T(H)$ un état de densité du système $\mathcal{S}$ composé par la famille $(\mathcal{S}_i)_{i \in I = \{1,...,k\}}$, où $H = H_{\mathcal{S}} = \bigotimes_{i \in I} H_i$ et $H_i = H_{\mathcal{S}_i}$, et étant donné $j \in I$, on appelle *réduction de ρ à H_j* l'opérateur de densité réduit ρ^j défini par

$$\rho^j = tr_B(\rho),$$

où $B = \bigotimes_{i \neq j} H_i$. Plus généralement, pour toute partie non vide $J \subset I$, on appelle *réduction de ρ à $H_J = \bigotimes_{j \in J} H_j$* l'opérateur $\rho^J \in \mathcal{T}(H_J)$ défini par

$$\rho^J = tr_B(\rho),$$

où $B = \bigotimes_{i \in \neg J} H_i$, avec $\neg J = I \setminus J$.

État de densité d'un sous-système Dans le formalisme $\mathcal{FD}$, il est dit [16]que si le système composé $\mathcal{S}$ est dans l'état de densité ρ, alors le sous-système $\mathcal{S}_j$ est dans l'état de densité ρ^j obtenu par réduction de ρ à H_j.

Exemple 6 (Deux états pour un même système). Considérons le système $\mathcal{S}$ composé de deux sous-systèmes $\mathcal{S}_A$ et $\mathcal{S}_B$, avec $H_A = H_{\mathcal{S}_A} = vect\{|0_A>, |1_A>\}$ et $H_B = H_{\mathcal{S}_B} = vect\{|0_B>, |1_B>\}$, et supposons que $\mathcal{S}$ se trouve dans l'état pur $\rho = |\psi><\psi|$, avec $\psi = \dfrac{|0_A 0_B> + |1_A 1_B>}{\sqrt{2}}$, que nous noterons plus simplement

$$\psi = \frac{|00> + |11>}{\sqrt{2}}.$$

Dans la base $(|00>, |01>, |10>, |11>)$ de H, l'opérateur ρ s'écrit matriciellement

$$\mathrm{Mat}_\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la formule (8) permet de trouver facilement l'expression matricielle de ρ^A et ρ^B dans les bases respectives $(|0_A>, |1_A>)$ et $(|0_B>, |1_B>)$ de H_A et H_B :

$$\mathrm{Mat}_{\rho^A} = \mathrm{Mat}_{\rho^B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Appliquant le principe de composition des états, on obtient alors pour le système $\mathcal{S}$ entier un état de densité $\rho' = \rho^A \otimes \rho^B$ de matrice

$$\mathrm{Mat}_{\rho'} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\rho \neq \rho'$. Cet exemple illustre à nouveau qu'en fonction de la connaissance que l'on a d'un système, celui-ci peut se voir attribuer des états de densité différents. En l'occurrence, la donnée des états mixtes ρ^A et ρ^B dans lesquels se trouvent les sous-systèmes A et B contient moins d'information que celle contenue dans la donnée de l'état intriqué ρ — l'information perdue est celle relative à la manière dont A et B sont intriqués — il est donc logique qu'on ne puisse à partir de ρ^A et ρ^B retrouver l'état ρ.

2.4 Passage d'un formalisme à l'autre

2.4.1 Des vecteurs d'état aux opérateurs de densité

On passe du formalisme des vecteurs d'états à celui des opérateurs de densité en identifiant tout état vectoriel à un état de densité pur, grâce à l'injection

$$\begin{gathered} \widetilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{FV}} \hookrightarrow \mathcal{T}(H) = \widetilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{FD}}, \\ \psi = |\psi> \mapsto \rho = |\psi><\psi|. \end{gathered}$$

16. Voir Chuang et Nielsen [13], pages 105-106.

Cette injection montre que l'espace des états de densité est plus large que celui des états vectoriels. Les états de densité ρ qui peuvent se mettre sous la forme $|\psi >< \psi|$ sont précisément les états purs, et tout naturellement on appelle également états purs les états vectoriels ψ eux-mêmes.

Plus généralement, à toute famille pondérée d'états vectoriels unitaires $(\psi_r, p_r)_{r\in R}$, où les $p_r \geqslant 0$ vérifient $\sum_r p_r = 1$, on associe l'état de densité mixte

$$\rho = \sum_{r\in R} p_r|\psi_r >< \psi_r|.$$

2.4.2 Des opérateurs de densité aux vecteurs d'état

Un état de densité ρ peut toujours être interprété en termes de famille d'états purs pondérée par des probabilités $(\psi_r, p_r)_{r\in R}$, autrement dit en termes d'états mixtes $\rho = \sum_r p_r|\psi_r >< \psi_r|$, ne serait-ce qu'en prenant pour vecteurs ψ_r une base de vecteurs propres de l'opérateur hermitien ρ. Néanmoins, la portée d'une telle interprétation est restreinte par le fait que, très souvent, ρ peut s'écrire *de plusieurs manières* sous cette forme.

3 Structures connectives des états quantiques intriqués

Padmanabhan K. Aravind, professeur de physique au *Worcester Polytechnic Institute* (Massachusetts), dans un article [1] publié en 1997 comme chapitre du livre [15], et Ayumu Sugita, du département de physique appliquée de la *Osaka City University*, dans un article [16] publié en 2007 sur ArXiv, cherchent à comparer intrication quantique et entrelacs dans $\mathbf{R}^3$, et cela essentiellement dans le cas de trois composantes — bien qu'Aravind considère aussi l'intrication *borroméenne généralisée* à un nombre quelconque de composantes, autrement dit ce qu'on appelle aussi depuis 1976 avec [14] les entrelacs *brunniens* [17] — avec en particulier la question de savoir si le système GHZ constitué de trois qubits intriqués dans l'état

$$GHZ = \frac{|000 > +|111 >}{\sqrt{2}} \tag{9}$$

peut ou non être dit borroméen.

Or, dans ce type de question, le seul aspect des entrelacs qui intervient réellement est leur structure connective [18]. C'est du reste une question très naturelle, lorsqu'on considère l'intrication quantique en ayant à l'esprit le point de vue connectif, de se demander s'il est possible d'associer de façon naturelle une ou plusieurs structures connectives à tout état d'un système quantique composé. C'est l'objet de la présente partie que de proposer la définition de telles structures, en nous appuyant d'abord sur l'idée développée par Aravind, et ensuite sur celle de Sugita, la principale différence entre les deux points de vue étant qu'Aravind utilise essentiellement le formalisme des vecteurs d'état, tandis que Sugita utilise celui des opérateurs de densité.

À la fin de la présente section 3, nous introduisons la notion d'ordre connectif d'un état quantique intriqué.

17. Sur l'histoire des structures connectives, et en particulier la contribution fondamentale de Brunn à ce sujet, voir [7] ainsi que le rappel historique figurant dans l'introduction de [9].
18. Sur la structure connective des entrelacs, voir [7].

3.1 Structures connectives de désintrication

3.1.1 L'analogie d'Aravind entre systèmes intriqués et entrelacs

Dans le cas d'un entrelacs, la considération de sous-entrelacs est immédiate : il suffit d'oublier les composantes qui n'en font pas partie. Or, un tel oubli n'a pas d'équivalent évident s'agissant des systèmes quantiques composés, du moins dans le formalisme des vecteurs d'état. Par contre, l'opération qui consiste à obtenir un sous-entrelacs d'un entrelacs donné comme résultat d'opérations de *coupures* sur les composantes qui ne lui appartiennent pas a de manière assez évidente un analogue dans le formalisme quantique des états purs, à savoir la transformation [19] des états consécutive à une mesure quantique effectuée sur l'une des particules formant un système intriqué. C'est là l'idée centrale adoptée par Padmanabhan K. Aravind [1]. Le problème est alors le suivant : une même mesure peut parfois conduire, pour le système constitué des autres particules que celle sur laquelle la mesure (partielle) a été effectuée, à un système intriqué ou non. De plus, cela peut également dépendre du type de mesure effectué, un peu comme si dans un entrelacs, selon que l'on effectue sur l'un des nœuds qui le compose une coupure de tel ou tel type, les composantes restantes devaient former des entrelacs de structures différentes. C'est en particulier le cas pour l'exemple fondamental autour duquel l'article d'Aravind est construit, l'état GHZ qui se révèle conduire soit à une structure borroméenne, soit à une structure totalement connectée selon les expériences de mesure considérées.

3.1.2 Un éventail de structures connectives

Il découle de qui précède qu'il y pourrait y avoir plusieurs structures connectives légitimes à envisager pour un même état quantique intriqué. Dans ce qui suit, nous allons effectivement définir, à la section 3.1.7, tout un éventail de structures connectives pour un état pur d'un système quantique composé d'une famille finie $(\mathcal{S}_i)_{i\in I=\{1,\ldots,k\}}$ de sous-systèmes, chacun d'eux ayant pour espaces d'états un espace de Hilbert H_i. Cet état sera représenté par un vecteur unitaire ψ :

$$\psi \in H = \bigotimes_{i\in I} H_i.$$

Pour cela, nous avons d'abord besoin de donner quelques précisions de vocabulaire et de notations relatives aux ensembles d'états à considérer, à la séparabilité de ces états, aux ensembles de mesures qui peuvent être effectués sur ces états, ainsi que des précisions concernant le quantificateur logique que nous noterons $\exists^\bullet$ pour exprimer le fait qu'une propriété est satisfaite par *certains* éléments, mais *pas tous*.

19. Transformation au moins partiellement désintricante, s'agissant en tout cas de la particule sur laquelle la mesure est effectuée. Curieusement, la désintrication quantique semble être une notion encore relativement peu considérée en tant que telle. Remarquons en outre qu'elle soulève de façon assez aigüe le problème de comprendre l'articulation entre non-localité et contraintes relativistes, dans la mesure où, comme nous le soulignons dans la remarque 30 page 31, il est impossible de localiser en tant qu'unique événement de l'espace-temps relativiste une telle désintrication : deux mesures constituant des événements séparés par un intervalle de genre espace effectuées sur deux parties intriquées d'un même système quantique peuvent aussi bien prétendre l'une que l'autre être « à l'origine » de la désintrication : tout se passe comme si elles ne faisaient qu'actualiser une désintrication dont la cause n'est pas localisable, désintrication qui se produit dès qu'au moins une des deux mesures a lieu, mais qui ne se serait pas produite si aucune des deux mesures n'avaient été faite...

3.1.3 J-états

Pour toute partie non vide J de I, nous noterons H_J l'espace des états du sous-système $\mathcal{S}_J$ de $\mathcal{S}$, espace défini par

$$H_J = \bigotimes_{j \in J} H_j, \tag{10}$$

et nous appellerons *état sur* J ou J*-état* tout état φ de $\mathcal{S}_J$, c'est-à-dire tout état défini par un vecteur unitaire $\varphi \in H_J$.

Définition 13. Soit $J \subset I$, avec $card(J) \geqslant 2$, et $J = J_1 \cup J_2$ une partition[20] de J. On dit qu'un J-état $\varphi \in H_J$ est (J_1, J_2)*-séparable* s'il existe $\varphi_1 \in H_{J_1}$ et $\varphi_2 \in H_{J_2}$ tels que, *à l'ordre des facteurs près*, on ait

$$\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2.$$

On note $\mathcal{D}_{(J_1,J_2)}$ l'ensemble des J-états (J_1, J_2)-séparables.

Remarque 20 (« À l'ordre des facteurs près »). Le produit tensoriel n'étant pas commutatif, nous serons souvent conduit à préciser que les formules écrites doivent être comprises « à l'ordre des facteurs près ». Par exemple, dans la formule écrite ci-dessus, $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$, cela ne signifie pas seulement que l'on pourrait avoir aussi $\varphi = \varphi_2 \otimes \varphi_1$, mais surtout que l'ordre de *tous* les facteurs figurant dans *toute* expression de φ_1 et de φ_2 doit éventuellement être rétabli pour entrer dans la définition usuelle des éléments de $\bigotimes_{j \in J} H_j$. Au fond, tout cela est simplement équivalent à l'utilisation d'une version commutative du produit tensoriel définie, pour éviter toute ambiguïté, sur des *copies deux à deux disjointes* des espaces H_i. Ceci précisé, si d'aventure il nous arrivait d'oublier de préciser la mention « à l'ordre des facteurs près », le lecteur ne manquerait pas de rectifier par lui-même.

Définition 14. J désignant une partie de I non vide et non réduite à un point, un J-état $\varphi \in H_J$ est dit *partiellement séparable* s'il existe une partition $J = J_1 \cup J_2$ telle que φ soit (J_1, J_2)-séparable. On note $\mathcal{D}_J$ (ou simplement $\mathcal{D}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des J-états partiellement séparables. Un J-état non partiellement séparable sera dit *globalement intriqué*.

Nous noterons en outre $\neg\mathcal{D}_J$ (ou simplement $\neg\mathcal{D}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des J-états globalement intriqués, autrement dit le complémentaire de $\mathcal{D}_J$ dans H_J :

$$\neg\mathcal{D}_J = H_J \setminus \mathcal{D}_J. \tag{11}$$

Remarque 21. La question de savoir s'il faut élargir la définition 14 aux parties de I réduites à un point n'est pas vraiment importante, dans la mesure où les structures connectives qui seront définies sur la base de ces considérations seront de toute façon intègres, autrement dit les singletons seront considérés dans tous les cas comme connexes.

20. Rappelons qu'une partition d'un ensemble est un recouvrement de cet ensemble par des parties disjointes *toutes non vides*.

3.1.4 Expériences déterminantes et projections sur J

Pour toute partie $J \subset I$, on note $\neg J$ le complémentaire de J dans I.

Définition 15. Étant donné $L \subset I$, on appelle *expérience déterminante sur* L toute expérience de mesure d'une observable M sur le système $\mathcal{S}$ qui, *à l'ordre des facteurs près*[21], est de la forme

$$M = (\bigotimes_{l \in L} M_l) \otimes (\bigotimes_{j \in \neg L} Id_j) = (\bigotimes_{l \in L} M_l) \otimes Id_{H_{\neg L}},$$

où, pour tout $l \in L$, M_l désigne un opérateur hermitien de l'espace H_l dont toutes les valeurs propres soient distinctes, *i.e.* dont tous les sous-espaces propres soient de dimension 1.

On note $\mathcal{M}_L$ l'ensemble des expériences déterminantes sur L.

Remarque 22. À noter que l'observable $\bigotimes_{l \in L} M_l$ peut s'interpréter comme synthétisant la suite des observables $(M_l)_{l \in L}$. Voir à ce sujet la remarque 30 page 31.

Remarque 23. L'ensemble I ayant été supposé non vide, les ensembles $\mathcal{M}_L$ ne sont jamais vides. En particulier, pour $L = \varnothing \subset I$, on a $\mathcal{M}_L = \{Id_H\}$.

Soit maintenant J une partie propre de I et $M \in \mathcal{M}_{\neg J}$ une expérience déterminante sur $\neg J$. Les sous-espaces propres des M_l qui composent M étant tous de dimension 1, tout état[22] $b \in M[\psi]$ auquel la mesure de M peut conduire à partir de l'état ψ est $(J, \neg J)$-séparable, autrement dit peut se factoriser sous la forme

$$b = (\bigotimes_{l \in L} b_l) \otimes b_J,$$

avec, pour tout $l \in L$, b_l un vecteur propre unitaire de M_l, et $b_J \in H_J$, une telle factorisation étant unique (à des coefficients multiplicatifs de module 1 près). Par conséquent, tout état $b \in M[\psi]$ définit un unique état $b_J \in H_J$, que nous appellerons la *projection de* b *sur* J.

Pour tout $M \in \mathcal{M}_{\neg J}$, on posera en outre

$$M_J[\psi] = \{b_J \in H_J, b \in M[\psi]\}. \tag{12}$$

Remarque 24. Pour $J = I$, on a $\mathcal{M}_{\neg J} = \{Id_H\}$, et on pose naturellement $(Id_H)_J[\psi] = \{\psi\}$.

Remarque 25. Si on n'avait pas imposé que les valeurs propres de chaque M_l soient distinctes, on aurait effectivement pu rencontrer des situations telles que celles-ci : si u et v sont des vecteurs propres orthogonaux de M_1 associés à une même valeur propre, une mesure de M_1 sur un état intriqué de la forme $\frac{|u00> + |v11>}{\sqrt{2}}$ peut conduire à le laissé inchangé, donc non factorisable.

3.1.5 Le quantificateur $\exists^\bullet$

Nous définissons le quantificateur *certains mais pas tous*, noté $\exists^\bullet$, par l'équivalence logique suivante, écrite pour toute propriété $P(x)$ dépendant d'une variable $x \in E$:

$$\exists^\bullet x \in E, P(x) \Leftrightarrow (\exists x \in E, P(x)) \text{ et } (\exists x \in E, \neg P(x)). \tag{13}$$

21. Voir la remarque 20.
22. Voir la notation donnée par la formule (3) page 10.

3.1.6 Types d'intrication de ψ sur $J \subset I$

Dans toute cette section 3.1.6, J désigne une partie de I ayant au moins deux éléments, et représente ainsi un sous-ensemble de l'ensemble des particules constituant le système $\mathcal{S}$.

Rappelons par ailleurs que ψ désigne un état vectoriel du système quantique considéré, autrement dit $\psi \in \bigotimes_{i \in I} H_i$, avec ψ unitaire.

Définition 16. On dit que l'état ψ est *globalement intriqué sur* J si

$$\forall M \in \mathcal{M}_{\neg J}, M_J[\psi] \subset \neg \mathcal{D}_J.$$

Autrement dit, l'état ψ du système est globalement intriqué sur $J \subset I$ lorsque toute expérience déterminante effectuée sur les autres particules que celles indexées par J conduit nécessairement ce sous-système à un état globalement intriqué.

Remarque 26. L'état ψ est globalement intriqué sur I lui-même si et seulement si $\psi \in \neg \mathcal{D}$, c'est-à-dire si l'état ψ est intriqué.

Définition 17. On dit que ψ est *mélangé*, ou qu'il est *semi-intriqué*, ou encore qu'il est *semi-séparable* sur J si et seulement si

$$\exists (M, P) \in (\mathcal{M}_{\neg J})^2, \exists (\varphi, \phi) \in M_J[\psi] \times P_J[\psi], (\varphi \in \neg \mathcal{D}_J) \text{ et } (\phi \in \mathcal{D}_J).$$

Autrement dit, lorsque ψ est mélangé sur J, le résultat sur J d'une expérience de mesure faite sur les autres sous-systèmes peut, selon les cas, conduire aussi bien à un état globalement intriqué sur J qu'à un état partiellement séparable sur J.

Définition 18. On dit que ψ est *totalement mélangé* sur J si et seulement si

$$\forall M \in \mathcal{M}_{\neg J}, \exists^{\bullet} \varphi \in M_J[\psi], \varphi \in \mathcal{D}_J.$$

Ainsi, ψ est totalement mélangé lorsque *toute* expérience déterminante effectuée sur les autres sous-systèmes conduit parfois à un état sur J partiellement séparable, et parfois à un état globalement intriqué.

Définition 19. On dit que ψ est *partiellement bien intriqué* sur J si

$$\exists^{\bullet} M \in \mathcal{M}_{\neg J}, M_J[\psi] \subset \neg \mathcal{D}_J.$$

Autrement dit, ψ est partiellement bien intriqué sur J s'il y est mélangé mais qu'il y a au moins une expérience de mesure sur les autres sous-systèmes conduisant, selon toutes probabilités, à un état globalement intriqué sur J. Dans ce cas, ψ n'est donc pas totalement mélangé sur J.

Définition 20. On dit que ψ est *partiellement bien séparable* sur J si

$$\exists^{\bullet} M \in \mathcal{M}_{\neg J}, M_J[\psi] \subset \mathcal{D}_J.$$

Autrement dit, ψ est partiellement bien séparable sur J s'il est mélangé sur J mais qu'il y a au moins une expérience de mesure sur les autres sous-systèmes conduisant, selon toutes probabilités, à un état partiellement séparable sur J. Dans ce cas non plus ψ n'est pas totalement mélangé sur J.

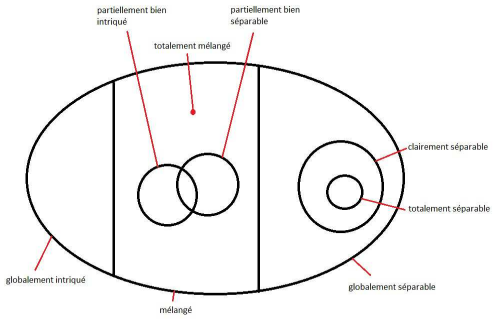

FIGURE 1 – Types d'intrication d'un état vectoriel ψ sur une partie $J \subset I$

Définition 21. On dit que ψ est *globalement séparable sur* J si

$$\forall M \in \mathcal{M}_{\neg J}, M_J[\psi] \subset \mathcal{D}_J.$$

Définition 22. On dit que ψ est *clairement séparable sur* J s'il existe une partition de J en deux parties non vides disjointes $J = J_1 \cup J_2$ telles que

$$\forall M \in \mathcal{M}_{\neg J}, M_J[\psi] \subset \mathcal{D}_{(J_1,J_2)}.$$

Alors que le fait, pour ψ, d'être globalement séparable sur J conduit à des états qui peuvent se factoriser différemment selon les expériences de mesure réalisées et, pour chaque expérience, selon les résultats obtenus, la claire séparabilité demande une possibilité de factorisation selon la même partition pour tous les états ainsi obtenus.

Définition 23. On dit que ψ est *totalement séparé sur* J si, pour toute partition de J en deux parties non vides disjointes $J = J_1 \cup J_2$, on a

$$\forall M \in \mathcal{M}_{\neg J}, M_J[\psi] \subset \mathcal{D}_{(J_1,J_2)}.$$

On vérifie facilement que les définitions précédentes conduisent à classer la situation d'intrication de ψ sur J dans l'une des huit situations mutuellement incompatibles suivantes : ψ y est soit globalement intriqué, soit totalement mélangé, soit partiellement bien intriqué mais non partiellement bien séparable, soit partiellement bien séparable mais non partiellement bien intriqué, soit à la fois partiellement bien intriqué et partiellement bien séparable, soit globalement séparable mais non clairement séparable, soit clairement séparable mais non totalement séparé, soit enfin totalement séparé.

Cette classification résulte immédiatement de la proposition suivante, elle-même facile à vérifier.

Proposition 2. *Sur $J \subset I$, ψ est soit globalement intriqué, soit mélangé, soit globalement séparable. Si ψ est mélangé sur J, il y est*

— *soit totalement mélangé,*
— *soit partiellement bien intriqué sans être partiellement bien séparable,*
— *soit partiellement bien séparable sans être partiellement bien intriqué,*
— *soit à la fois partiellement bien intriqué et partiellement bien séparable.*

Enfin, on a les implications : ψ *totalement séparé sur* $J \Rightarrow \psi$ *clairement séparable sur* $J \Rightarrow \psi$ *globalement séparable sur* J.

3.1.7 Structures de désintrication de ψ

Sur la base de la classification précédente, nous pouvons maintenant associer à l'état ψ différentes structures connectives, que nous appellerons les structures de désintrication de ψ.

Dans ce but, notant $\mathcal{Q}(I)$ l'ensemble des parties $J \subset I$ telles que $card(J) \geqslant 2$, nous introduisons les ensembles suivants de parties de I :

— $GI(\psi)$: ensemble des $J \in \mathcal{Q}(I)$ telles que ψ est globalement intriqué sur J,
— $BIP(\psi)$: ensemble des $J \in \mathcal{Q}(I)$ telles que ψ est globalement intriqué ou partiellement bien intriqué sur J,
— $MT(\psi)$: ensemble des $J \in \mathcal{Q}(I)$ telles que ψ est globalement intriqué ou totalement mélangé sur J,
— $IP(\psi)$: ensemble des $J \in \mathcal{Q}(I)$ telles que ψ est globalement intriqué ou partiellement bien intriqué ou totalement mélangé sur J,
— $ML(\psi)$: ensemble des $J \in \mathcal{Q}(I)$ telles que ψ est globalement intriqué ou mélangé sur J,
— $NCS(\psi)$: ensemble des $J \in \mathcal{Q}(I)$ telles que ψ n'est pas clairement séparable sur J.

Définition 24 (Structures de désintrications de l'état ψ)**.** On définit sur l'ensemble I les structures connectives intègres suivantes, associées à l'état quantique global $\psi \in \bigotimes_{i \in I} H_i$:

— structure d'intrication globale [23] : $\kappa_{GI}(\psi) = [GI(\psi)]_1$,
— structure de bonne intrication partielle : $\kappa_{BIP}(\psi) = [BIP(\psi)]_1$,
— structure de mélange total : $\kappa_{MT}(\psi) = [MT(\psi)]_1$,
— structure d'intrication partielle : $\kappa_{IP}(\psi) = [IP(\psi)]_1$,
— structure de mélange : $\kappa_{ML}(\psi) = [ML(\psi)]_1$,
— structure de non claire séparabilité : $\kappa_{NCS}(\psi) = [NCS(\psi)]_1$.

Par construction, on a de façon immédiate, pour tout état $\psi \in \bigotimes_{i \in I} H_i$, les relations de finesse suivante entre les structures connectives définies ci-dessus :

$$\kappa_{GI}(\psi) \subset \kappa_{BIP}(\psi) \subset \kappa_{IP}(\psi),$$

$$\kappa_{GI}(\psi) \subset \kappa_{MT}(\psi) \subset \kappa_{IP}(\psi),$$

$$\kappa_{IP}(\psi) \subset \kappa_{ML}(\psi) \subset \kappa_{NCS}(\psi).$$

23. Rappelons que la notation $[\mathcal{A}]_1$ désigne la structure connective intègre engendrée par $\mathcal{A}$: voir la section 1.4, page 5.

3.1.8 Exemples : états EPR, GHZ et O_2

Exemple 7 (État EPR). Le système quantique considéré est composé de deux particules $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, chacune ayant pour espace d'états un plan $H_i \simeq \mathbf{C}^2$, engendré par des états notés $|0>$ et $|1>$:

$$H_i = \mathrm{Vect}(|0>, |1>) = \{\alpha|0> + \beta|1>, (\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2\},$$

et se trouve dans l'état

$$EPR = \frac{|00> + |11>}{\sqrt{2}}. \tag{14}$$

Puisque $card(I) = 2$, la seule partie de I à considérer est $J = I$. Or, d'après la remarque 26, l'état EPR étant intriqué (non factorisable), EPR est globalement intriqué sur I. Par conséquent, toutes les structures de désintrications de EPR coïncident avec la structure connective grossière sur l'ensemble I.

Exemple 8 (État GHZ). Reprenons l'exemple principal considéré par Aravind [1] : un système de trois qubits est préparé dans l'état $\psi = GHZ$ défini par la formule (9)

$$GHZ = \frac{|000> + |111>}{\sqrt{2}}.$$

C'est un état intriqué, donc GHZ est globalement intriqué sur $I = \{1, 2, 3\}$.

Par contre, GHZ n'est pas globalement intriqué sur $J = \{2, 3\}$, puisque une mesure de l'observable[24] $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sur la première particule transforme de façon équiprobable l'état du système global soit en $|000>$, soit en $|111>$, donc dans tous les cas en des états totalement désintriqués. D'un autre coté, comme le remarque Aravind, une mesure également sur la première particule de l'observable $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dont nous notons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs propres unitaires orthgonaux, conduit à partir de l'état GHZ à deux états possibles équiprobables, $\vec{u} \otimes \frac{|00> + |11>}{\sqrt{2}}$ et $\vec{v} \otimes \frac{|00> + |11>}{\sqrt{2}}$, d'où $(X \otimes Id_J)_J[GHZ] = \{\frac{|00> + |11>}{\sqrt{2}}\}$, qui est intriqué. On en déduit que GHZ est à la fois partiellement bien intriqué et partiellement bien séparable sur J. Par symétrie, on aboutit à la même conclusion pour $\{1, 3\}$ et $\{1, 2\}$, de sorte que les structures connectives de désintrication pour l'état GHZ sont les suivantes :

— les structures d'intrication globale et de mélange total sont borroméennes,
— les autres structures de désintrication sont totalement connectées (structures grossières),

autrement dit :

$$\kappa_{GI}(GHZ) = \kappa_{MT}(GHZ) = \mathcal{B}_3,$$

$$\kappa_{BIP}(GHZ) = \kappa_{IP}(GHZ) = \kappa_{ML}(GHZ) = \kappa_{NCS}(GHZ) = \mathcal{P}(I).$$

Exemple 9 (L'état O_2). On vérifie que la structure d'intrication globale $\kappa_{GI}(O_2)$ de l'état

$$O_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}(|000> + |011> + |100> - \frac{1}{2}|111>) \tag{15}$$

24. Observable dont les états propres sont précisément ceux notés $|0>$ et $|1>$.

est

$$\kappa_{GI}(O_2) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Autrement dit, dans un système de trois particules intriquées selon l'état O_2, les particules 2 et 3 sont (globalement) intriqués dans le système, et la particule 1 est globalement intriquée à $\{2,3\}$, mais sans être globalement intriquée spécifiquement ni à 2 seule, ni à 3 seule.

Remarquons que cette structure est d'ordre connectif égal à 2. En section 3.3, cela nous conduira à dire que l'état O_2 lui-même est d'ordre connectif 2.

3.2 Structures connectives de densité

3.2.1 L'idée de Sugita

En 2007, Ayumu Sugita [16], s'appuie sur le formalisme des opérateurs de densité pour montrer que le nœud borroméen exprime intrinsèquement la structure d'intrication de l'état GHZ, indépendamment du choix d'une base que constitue le fait de mesurer une observable plutôt qu'une autre, comme l'avait fait Aravind [1].

Comme nous l'avons rappelé précédemment (section 2.3.3), le système composé considéré étant supposé être dans un état quantique donné, le formalisme des opérateurs de densité permet en effet d'attribuer un état de densité à tout sous-système de celui-ci. Pour le dire simplement, il est possible dans ce formalisme d'oublier certains sous-systèmes et de regarder l'état dans lequel se trouve le reste.

Nous nous proposons dans la présente section 3.2 de prolonger l'idée de Sugita à tout état quantique de tout système composé d'un nombre fini de sous-systèmes. Comme dans les sections précédentes, on note $I = \{1, 2, ..., k\}$ un ensemble fini d'indices, $\mathcal{S}$ est un système quantique d'espace des états $H = \otimes_{i\in I} H_i$, composé d'une famille $(\mathcal{S}_i)_{i\in I=\{1,...,k\}}$ de sous-systèmes ayant chacun pour espaces d'états un espace de Hilbert H_i, et l'on supposera que $\mathcal{S}$ se trouve dans un état de densité $\rho \in \mathcal{T}(H)$.

3.2.2 Corrélation et intrication de ρ sur une partie $J \subset I$

Dans tout ce qui suit, J désigne une partie de I possédant au moins deux éléments. Comme précédemment, on note $\neg J$ le complémentaire de J dans I et, pour toute partie L de I, on désigne par H_L l'espace de Hilbert

$$H_L = \bigotimes_{l\in L} H_l.$$

En nous appuyant sur les définition 10 et 12, nous posons d'abord celle-ci :

Définition 25. Nous dirons que ρ est *complètement corrélé sur* J, et l'on notera

$$\rho \in corr(J),$$

si la réduction ρ^J de ρ à J est complètement corrélée. Nous dirons en outre que ρ est *complètement intriqué sur* J, et l'on écrira

$$\rho \in intr(J),$$

si ρ^J est complètement intriqué.

3.2.3 Structures connectives de densité de ρ

Définition 26. On appelle *structure connective de densité par corrélation* de ψ, la structure connective intègre $\kappa_{corr}(\rho)$ engendrée par les parties J de I sur lesquelles ρ est complètement corrélé :

$$\kappa_{corr}(\rho) = [\{J \in \mathcal{P}I, \rho \in corr(J)\}]_1.$$

On appelle *structure connective de densité par intrication* de ψ, ou plus simplement *structure de Sugita* de ρ, la structure connective intègre $\kappa_S(\rho)$ engendrée par les parties J de I sur lesquelles ρ est complètement intriqué :

$$\kappa_S(\rho) = [\{J \in \mathcal{P}I, \rho \in intr(J)\}]_1.$$

Exemple 10. On vérifie facilement que l'état GHZ décrit à l'exemple 8 vérifie

$$\kappa_S(GHZ) = \mathcal{B}_3.$$

C'est précisément ce que remarque Sugita dans son article [16].

On trouvera d'autres exemples de structures connectives de dispositifs multilocaux dans la présentation placée sur la page web
`https://sites.google.com/site/logiquecategorique/Contenus/CSQE`.

Exercice 1. Déterminer $\kappa_{corr}(GHZ)$.

3.3 Ordre connectif d'un état quantique intriqué

Définition 27. Étant donné ψ un état quantique pur d'un système quantique composé, on appelle *ordre connectif de désintrication de* ψ, et l'on note $\Omega_c(\psi)$, le maximum des ordres connectifs des diverses structures connectives de désintrication de ψ données dans la définition 24. Autrement dit, $\Omega_c(\psi)$ est égal à :

$$\max\{\Omega(\kappa_{GI}(\psi)), \Omega(\kappa_{BIP}(\psi)), \Omega(\kappa_{MT}(\psi)), \Omega(\kappa_{IP}(\psi)), \Omega(\kappa_{ML}(\psi)), \Omega(\kappa_{NCS}(\psi))\}.$$

Étant donné ρ un état quantique (éventuellement mixte) d'un système quantique composé, état donné par un opérateur de densité ρ, on appelle *ordre connectif de densité de* ρ, et l'on note $\Omega_f(\psi)$, le maximum des ordres connectifs des deux structures connectives de densité de ρ données dans la définition 26 :

$$\Omega_f(\rho) = \max\{\Omega(\kappa_{corr}(\rho)), \Omega(\kappa_S(\rho))\}.$$

Enfin, on appelle *ordre connectif d'un état pur* ψ, et l'on note $\Omega(\psi)$, le maximum de son ordre connectif de désintrication et de son ordre connectif de densité :

$$\Omega(\psi) = \max(\Omega_c(\psi), \Omega_f(|\psi >< \psi|)). \tag{16}$$

Exemple 11. On vérifie sans peine que les états EPR et GHZ sont d'ordre connectif égal à 1. Pour trois particules intriquées, l'ordre connectif est nécessairement inférieur ou égal à 2. Un exemple d'état quantique intriquant trois particules et d'ordre connectif 2 est donné par l'état O_2 défini par la formule (15) de l'exemple 9.

3.4 Conjectures brunnienne

Nous conjecturons que toutes les structures connectives définies précédemment satisfont la conjecture brunnienne correspondante, à savoir, comme nous l'avons indiqué dans la section 1.3 page 4 :

Pour toute structure connective finie κ, il existe un système quantique $\mathcal{S}$ composé et un état quantique e de ce système, tel que la structure connective de e soit précisément κ.

4 Structures relationnelles des dispositifs multi-locaux

Reprenant, avec quelques changement terminologiques, le point de vue de Christophe Chalons dans son travail sur les degrés ludiques (voir [4]), nous formalisons par la notion de *dispositif multilocal* les expériences de mesure portant sur un système quantique intriqué, de telles expériences étant identifiées à des familles de questions *locales* posées au système par des expérimentateurs distants les uns des autres.

Regroupées sous l'appellation générale de *structures connectives relationnelles*, nous définissons ensuite plusieurs types de structures connectives pour les dispositifs multilocaux, à savoir diverses structures qualifiées de *tensorielles*, et plusieurs structures dites *domaniales*. Renvoyant à un travail ultérieur, nous signalons également la notion de structure connective ludique.

À la fin de la présente section 4, nous introduisons la notion d'ordre connectif d'un dispositif multi-local.

4.1 Définition des dispositifs multilocaux

4.1.1 Relations binaires vues comme applications multivalentes

Étant donnée une relation binaire R d'un ensemble A vers un ensemble B, nous noterons $(a, b) \in R$ pour exprimer que a est en relation avec b, notation qui revient à identifier R avec son graphe.

En outre, nous identifierons couramment R à l'application $A \to \mathcal{P}B$ qui à tout $a \in A$ associe l'ensemble $R(a)$ — éventuellement vide — de tous les $b \in B$ tels que $(a, b) \in R$:

$$R(a) = \{b \in B, (a, b) \in R\}.$$

Pour souligner ce point de vue multivalent sur les relations binaires, nous écrirons

$$R : A \rightsquigarrow B \tag{17}$$

pour exprimer que R est une telle relation binaire.

4.1.2 Dispositifs expérimentaux (globaux)

Définition 28 (Dispositif expérimental (global))**.** Nous appellerons *dispositif expérimental global*, ou simplement *dispositif global*, ou encore plus simplement *dispositif*, toute relation binaire $D : Q \rightsquigarrow R$, l'ensemble Q, supposé non vide, étant appelé l'ensemble des *expériences* ou des *questions* du dispositif, tandis

que R est l'ensemble des *résultats* ou des *réponses* du dispositif. Nous dirons qu'un dispositif D est cohérent si pour tout $q \in Q$, on a $D(q) \neq \varnothing$.

Dans la suite, tous les dispositifs considérés seront implicitement (et parfois explicitement) supposés cohérents.

Définition 29 (Descriptions et réalisations d'un dispositif expérimental)**.** Étant donnée $D : Q \rightsquigarrow R$ un dispositif expérimental, on appelle *garantie* ou *description* de D toute relation binaire $G : Q \rightsquigarrow R$ telle que $D \subset G$, au sens où pour tout $q \in Q$, on ait $D(q) \subset G(q)$. Dans ce cas, nous dirons aussi que D est une *réalisation partielle* de G.

Remarque 27. Puisque nous utilisons le symbole $\subset$ au sens large — il a donc pour nous exactement la même signification que le symbole $\subseteq$ — il est clair que, les ensembles Q et R étant donnés, la relation $D \subset G$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des dispositifs $Q \rightsquigarrow R$. En particulier, cette relation est réflexive, de sorte que D se décrit lui-même, constituant ce que nous appellerons la *description exacte* de D.

Intuitivement, la différence entre une description quelconque d'un dispositif expérimental et la description exacte de ce dispositif, est qu'une description quelconque indique des possibilités qui pourraient ne jamais se réaliser, tandis que toutes les possibilités données par la description exacte doivent effectivement pouvoir se réaliser.

Étant donnée $\mathcal{D}$ un ensemble de dispositifs expérimentaux portant sur les mêmes expériences Q et à valeur dans le même ensemble de résultats R, nous noterons $\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$, ou plus simplement $\bigcup_{\mathcal{D}}$, la borne supérieure de la famille $\mathcal{D}$ pour la relation d'ordre $\subset$, autrement dit le dispositif expérimental $S : Q \rightsquigarrow R$ défini pour tout $q \in Q$ par $S(q) = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D(q)$.

Définition 30. On dit qu'un dispositif expérimental $f : Q \rightsquigarrow R$ est *déterministe* si pour tout $q \in Q$ l'ensemble $f(q)$ est un singleton. Dans ce cas, on identifiera f avec l'application $f : Q \to R$ qui à tout $q \in Q$ associe l'unique élément r de $f(q)$, et nous noterons souvent, s'il n'y a pas de risque de confusion, $f(q) = r$.

Conformément aux notations précédentes, si $\mathcal{F}$ est un ensemble de dispositifs expérimentaux *déterministes* portant sur les mêmes expériences Q et à valeur dans le même ensemble de résultats R, $\bigcup_{\mathcal{F}}$ désignera le dispositif expérimental D défini pour toute expérience $q \in Q$ par $D(q) = \{r \in R, \exists f \in \mathcal{F}, f(q) = r\}$.

Proposition 3. *Si on admet l'axiome du choix (ou si l'ensemble des questions Q est fini), alors pour tout dispositif expérimental cohérent $D : Q \rightsquigarrow R$, on a $\bigcup_{\mathcal{F}} = D$, où $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des réalisations partielles déterministes de D.*

4.1.3 Dispositifs multilocaux

Définition 31. Etant donné k un entier, on appelle *dispositif expérimental multilocal d'uplicité k*, ou simplement *dispositif*, tout dispositif expérimental $D : Q \rightsquigarrow R$ avec Q de la forme $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_k$ et R de la forme $R = R_1 \times \cdots R_k$, où Q_1, $\cdots$, Q_k sont des ensembles non vides, de même que R_1, $\cdots$, R_k.

Posant $I = \{1, \cdots, k\}$, nous noterons q_i la $i^{\text{ème}}$ composante de tout $q \in Q = \prod_{i \in I} Q_i$, de sorte que $q = (q_1, \cdots, q_k)$. Plus généralement, pour $J \subset I$, nous noterons $q_{|J}$, ou simplement q_J, la famille extraite de q en ne retenant que les

composantes d'indices $j \in J$:

$$q_{|J} = (q_j)_{j \in J}.$$

Définition 32 (Sous-dispositifs)**.** Soit $D : \prod_{i \in I} Q_i = Q \rightsquigarrow R = \prod_{i \in I} R_i$ un dispositif d'uplicité k, où $I = \{1, \cdots, k\}$, et soit $J \subset I$ un ensemble non vide d'indices. On appelle *sous-dispositif* de D pour J le dispositif $\prod_{j \in J} Q_j \rightsquigarrow \prod_{j \in J} R_j$ noté $D_{[J]}$ et défini pour tout $(q_j)_{j \in J}$ par

$$D_{[J]}((q_j)_{j \in J}) = \{(r_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} R_j, \exists \tilde{q} \in Q, \exists \tilde{r} \in D(\tilde{q}), (q_j)_{j \in J} = \tilde{q}_{|J} \text{ et } (r_j)_{j \in J} = \tilde{r}_{|J}\}$$

En particulier, lorsque J est un singleton $J = \{j\}$, $D_{[j]}$ est le sous-dispositif local de D en j.

Remarque 28. En général, un sous-dispositif d'un dispositif déterministe n'est pas lui-même déterministe[25]. On fera par ailleurs attention au fait que, pour tout dispositif déterministe $f : \prod_{i \in I} Q_i = Q \to R = \prod_{i \in I} R_i$ et tout indice i, la $i^{\text{ème}}$ composante f_i de f est une application $f_i : Q \to R_i$ qu'il s'agit de ne pas confondre avec le dispositif local $f_{[i]} : Q_i \rightsquigarrow R_i$. On a en effet

$$f_i(q) = f(q)_{|i},$$

tandis que

$$f_{[i]}(q_i) = \{r_i \in R_i, \exists \tilde{q} \in Q, q_i = \tilde{q}_{|i} \text{ et } r_i = f(\tilde{q})_{|i}\}.$$

La seule connaissance des dispositifs locaux ne permet pas, en général, de retrouver le dispositif multilocal d'où ils proviennent. Lorsque néanmoins cela se produit, nous dirons que le dispositif multilocal en question est *complètement local*, ou encore, si $k \geqslant 2$, *complètement séparable*. Pour préciser, à la section suivante, ce type de notions, nous aurons d'abord besoin de définir le produit tensoriel[26] de plusieurs dispositifs multilocaux :

Définition 33. Étant donnée une famille $(D_i : Q_i \rightsquigarrow R_i)_{i \in I}$ de dispositifs cohérents, où $I = \{1, \cdots, k\}$, on appelle *produit tensoriel* de cette famille le dispositif multi-local $D = \bigotimes_{i \in I} D_i : \prod_{i \in I} Q_i \rightsquigarrow \prod_{i \in I} R_i$ défini par $D((q_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} D_i(q_i)$, où l'expression $\prod_{i \in I} D_i(q_i)$ désigne le produit cartésien des ensembles $D_i(q_i)$.

Bien entendu, si $D = \bigotimes_{i \in I} D_i$, les sous-dispositifs locaux $D_{[i]}$ de D coïncident avec les D_i.

4.2 Expériences quantiques en termes de dispositifs multilocaux

La structure relationnelle des dispositifs de mesure de systèmes quantiques intriqués peut être décrite, au moins partiellement, en termes de dispositifs multilocaux : un système quantique constitué de k sous-systèmes ayant été préparé dans un état donné d'intrication, on imagine que chacun de ces sous-systèmes $\mathcal{S}_i$ est expédié vers un expérimentateur qui se trouve en un lieu i distant des

25. C'est bien ce qui légitime de partir à la recherche de variables cachées lorsqu'on cherche à rendre compte de façon déterministe d'un processus qui n'apparaît pas tel.

26. L'expression *tensoriel* fait ici référence notamment au fait que ce produit se traduit par l'augmentation du nombre des variables.

autres et qui peut réaliser sur $\mathcal{S}_i$ une expérience q_i appartenant à un ensemble donné d'expériences Q_i, obtenant une réponse r_i appartenant à un ensemble R_i de réponses possibles. Le dispositif multilocal D décrivant cette expérience est alors, pour chaque famille $(q_1, \cdots, q_i, \cdots, q_k)$ d'expériences locales, l'ensemble $D((q_i)_{i\in I})$ de toutes les familles $(r_1, \cdots, r_k)$ de réponses possibles.

Bien entendu, le dispositif multilocal D ne décrit qu'un aspect du système intriqué $\mathcal{S}$, à savoir la manière dont celui-ci répond, dans des conditions données, à des expériences locales, alors même que l'on a fait l'hypothèse simplificatrice d'une non-évolution continue des états du systèmes.

Remarque 29 (Respect de la contrainte relativiste). Soulignons que, d'après Chalons [4], les dispositifs multilocaux définis par des expériences de mesure portant sur des systèmes quantiques intriqués sont toujours compatibles avec la contrainte relativiste sur la transmission d'information : ils ne permettent en aucun cas de transmettre une information d'un expérimentateur à un autre. Par contre, une réalisation déterministe f d'un tel dispositif peut ne pas respecter la contrainte relativiste. Tout se passe donc comme si, à chaque fois que l'on fait l'expérience décrite par un tel dispositif, une réalisation déterministe était choisie aléatoirement par la nature, sans que les expérimentateurs puissent jamais savoir laquelle.

Exemple 12 (D_{EPR}). On considère le système quantique à deux particules intriquées décrit à l'exemple 7 page 24.

Dans la suite, nous utiliserons les notations alternatives suivantes :

$$\vec{x} = |0>$$

et

$$\vec{y} = |1>,$$

en distinguant en outre par un indice le vecteur $\vec{x}_1 \in H_1$ du vecteur $\vec{x}_2 \in H_2$, et de même pour $\vec{y}$.

Conformément à la formule (14), le système se trouve dans l'état $\psi = EPR$ défini par

$$\psi = \frac{|00> + |11>}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 + \vec{y}_1 \otimes \vec{y}_2}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{x}_1\vec{x}_2 + \vec{y}_1\vec{y}_2}{\sqrt{2}},$$

Le dispositif que nous noterons D_{EPR} correspond alors à l'expérience suivante : une fois éloignées l'une de l'autre, on mesure pour chacune des deux particules une observable représentée par la « matrice de Pauli » traditionnellement notée Z (parce qu'elle correspond à une mesure de spin dans la direction de l'axe des z), à savoir $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On pourra éventuellement préciser Z_1 ou Z_2 selon que l'observable Z se rapporte au sous-système $\mathcal{S}_1$ ou au sous-système $\mathcal{S}_2$.

Pour fixer les idées, commençons[27] par examiner l'effet de cette mesure (partielle) sur la particule $\mathcal{S}_1$. En tant que mesure globale, il s'agit de celle définie par l'opérateur $Z_1 \otimes Id_2$, où Id_2 désigne l'identité de H_2. Les sous-espaces propres de $Z_1 \otimes Id_2$ sont $\vec{x}_1 \otimes H_2$ et $\vec{y}_1 \otimes H_2$, de valeurs propres respectives 1 et -1. Lors de la mesure correspondante, le vecteur ψ est projeté

27. Du fait de la relativité, cela n'a en fait pas de sens de dire que l'une des deux mesures serait faite avant l'autre (voir à ce sujet la remarque 30).

— soit, avec une probabilité $\frac{1}{2}$, sur $\frac{|00>}{\sqrt{2}}$ — donc après renormalisation sur l'état $|00>$ — en donnant comme résultat de mesure la valeur propre 1,
— soit, également avec une probabilité $\frac{1}{2}$, sur $\frac{|11>}{\sqrt{2}}$ — donc après renormalisation sur l'état $|11>$ — avec comme résultat la valeur propre -1.

Considérons ensuite [28] l'effet d'une mesure de l'observable Z sur la deuxième particule, autrement dit d'une mesure de l'opérateur $Id_1 \otimes Z_2$. Les sous-espaces propres de cet opérateur étant $H_1 \otimes \vec{x}_2$ et $H_1 \otimes \vec{y}_2$ avec comme valeurs propres respectives 1 et -1, on a finalement le résultat suivant :
— si cette seconde mesure est effectuée sur l'état global $|00>$, celui-ci reste inchangé avec une probabilité égale à 1, produisant comme résultat la valeur propre 1,
— si elle est effectuée sur l'état global $|11>$, celui-ci reste également inchangé avec une probabilité égale à 1, produisant comme résultat la valeur propre -1.

Récapitulatif. Finalement, en réponse à l'unique question posée par chacun des deux expérimentateurs, le dispositif D_{EPR} donne pour réponse soit $(1,1)$, soit $(-1,-1)$. Autrement dit, *avec un codage légèrement différent*, nous avons obtenu le dispositif multilocal D_{EPR} défini par

$$Q_1 = Q_2 = \{*\},$$

$$R_1 = R_2 = \{0,1\}$$

et

$$D_{EPR}(**) = \{00, 11\}.$$

Remarque 30 (Sur l'aspect fictif de la chronologie des mesures). Comme indiqué dans les notes 27 et 28, le fait de *commencer* par examiner l'impact d'une mesure sur la particule 1 *puis* de considérer celui d'une autre mesure sur la particule 2 ne saurait traduire une chronologie réelle dont la Relativité conteste d'ailleurs l'existence. La même remarque vaut pour toute description de l'effet d'une mesure quantique qui ferait, ne serait-ce qu'implicitement, appel à une notion de simultanéïté incompatible avec la relativité. Certes, les mesures effectuées peuvent conduire à une désintrication du système, mais il n'est pas possible de dire, lorsque plusieurs mesures distantes sont effectuées sur les parties d'un système intriqué, que l'une de ces mesures serait davantage qu'une autre la cause de cette désintrication. On peut néanmoins vérifier que l'ordre fictif que nous utilisons pour décrire l'ensemble du processus n'a pas d'incidence sur le résultat obtenu, de sorte que nous pouvons toujours introduire arbitrairement un tel ordre. En effet, la projection orthogonale successive d'un vecteur d'état sur des sous-espaces propres de l'espace H associés à une suite d'observables partielles A_1, A_2, A_3,..., sous-espaces de la forme $E_{\lambda_1} \otimes H_2 \otimes H_3$..., puis $H_1 \otimes E_{\lambda_2} \otimes H_3$..., puis $H_1 \otimes H_2 \otimes E_{\lambda_3}$..., etc., revient finalement à projeter orthogonalement sur les sous-espaces de la forme $E_{\lambda_1} \otimes E_{\lambda_2} \otimes E_{\lambda_3}$..., à savoir les sous-espaces propres d'une unique observable $A = \bigotimes_{i \in I} A'_i$ rassemblant toutes les observables partielles A_i considérées, quitte à avoir remplacé chaque opérateur A_i par un opérateur A'_i de mêmes sous-espaces propres mais dont les valeurs propres soient telles qu'on puisse les retrouver arithmétiquement à partir de celles de A.

28. Mêmes remarques que dans la note 27.

Exemple 13 ($D_{EPR,2}$ Dispositif EPR à deux questions). Le système quantique considéré est le même que dans l'exemple 12 ci-dessus, mais cette fois chaque expérimentateur aura le choix entre *deux* mesures différentes : outre celle de l'observable $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, il pourra également choisir de mesurer l'observable définie par la « matrice de Pauli »traditionnellement notée X, à savoir : $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aux notations de l'exemple 12, nous ajoutons les suivantes pour désigner les vecteurs propres de X de valeurs propres respectives 1 et -1 :

$$\vec{u} = \frac{\vec{x} + \vec{y}}{\sqrt{2}}$$

et

$$\vec{v} = \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\sqrt{2}},$$

de sorte que l'on a $\vec{x} = \dfrac{\vec{u} + \vec{v}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{y} = \dfrac{\vec{u} - \vec{v}}{\sqrt{2}}$.

En examinant l'effet d'une mesure de Z sur le sous-système 1 « suivi »[29] soit d'une mesure de Z sur le sous-système 2 soit d'une mesure de X sur le sous-système 2, et en remarquant que les deux autres cas de figure se ramènent à celui-ci par symétrie, on obtient une description de cette expérience de mesure en termes d'un dispositif multilocal que nous noterons EPR_2, à savoir, après un changement de code évident[30] :

$$Q_1 = Q_2 = \{0, 1\},$$
$$R_1 = R_2 = \{0, 1\},$$

$$D_{EPR,2}(00) = D_{EPR,2}(11) = \{00, 11\}$$

et

$$D_{EPR,2}(01) = D_{EPR,2}(10) = R_1 \times R_2.$$

Remarque 31. Au lieu d'effectuer, pour des raisons pratiques de lisibilité, le changement de code précisé dans la note 30, on aurait pu d'emblée utiliser, au lieu des matrices de Pauli Z et X, les matrices suivantes, de mêmes sous-espaces propres : $Z' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X' = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Apparemment, bien que rien ne l'interdise dans le formalisme, l'habitude n'est pas d'utiliser, dans la définition des observables donnant lieu à mesures projectives, des matrices non régulières, et pour le moment nous nous en tiendrons à cette habitude.

Exemple 14 (D_{GHZ}, un dispositif pour l'état GHZ). On considère le système quantique de l'exemple 8 page 24, constitué de trois qubits intriqués dans l'état GHZ défini par la formule 9, et, comme pour l'exemple 13, on suppose que

29. Voir la remarque 30.

30. Qui consiste d'une part à coder le fait que l'on mesure l'observable Z par un 0, et l'observable X par un 1, et d'autre part, en ce qui concerne les valeurs obtenues pour ces mesures, à remplacer la valeur propre -1 par le code 0.

chaque expérimentateur a le choix entre deux requêtes locales, à savoir la mesure soit de l'observable $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, soit de l'observable $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dont les vecteurs propres sont notés comme précédemment (voir la figure 2 page 34).

On vérifie facilement que le choix de mesurer les trois observables (Z_1, Z_2, Z_3) conduit, avec équiprobabilité :

— soit à l'état $|000>$, les résultats de mesure étant $(+1, +1, +1)$,

— soit à l'état $|111>$, les résultats de mesure étant $(-1, -1, -1)$,

résultats que, conformément à la remarque 31, nous coderons respectivement par 111 et 000.

De même, le choix de mesurer soit les trois observables (Z_1, Z_2, X_3), soit (Z_1, X_2, Z_3), soit (X_1, Z_2, Z_3) conduit à un ensemble de quatre résultats possibles, à savoir, dans le cas de (Z_1, Z_2, X_3) et toujours avec le même codage (la valeur propre -1 est codée par un 0) :

$$\{000, 001, 110, 111\},$$

les résultats pour les deux autres jeux d'expériences étant obtenus par rotations.

On vérifie enfin que le choix de mesurer trois observables contenant au moins deux fois celle notée X conduit, de façon équiprobable, à l'ensemble des huit résultats possibles $\{0, 1\}^3$.

Remarque 32. Attention de ne pas confondre le *résultat* des mesures, donné par les valeurs propres des observables, avec l'*état quantique final* dans lequel se retrouve le système intriqué au terme de ces mesures. Par exemple, pour une mesure de (Z_1, Z_2, X_3), le résultat est 111 si le système se retrouve dans l'état $|00u> = \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_2 \otimes \vec{u}_3$.

Exemple 15 (Dispositif D_K pour l'état K). On appelle D_K le dispositif consistant à faire les *mêmes* expériences de mesure que celles de l'exemple 14, le système étant cette fois préparé dans l'état quantique K suivant :

$$K = \frac{|111> - |001> - |010> - |100>}{2}, \tag{18}$$

On vérifie sans difficulté que le dispositif D_K ainsi défini répond, à des variantes de codage près, à la description donnée par Christophe Chalons ([4], chapitre 5) de ce qu'il appelle *téléphone GHZ* [31] à savoir :

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \{0, 1\},$$
$$R_1 = R_2 = R_3 = \{0, 1\},$$
$$D_K(111) = \{001, 010, 100, 111\},$$
$$D_K(001) = D_K(010) = D_K(100) = \{000, 011, 101, 110\}$$

et, pour les autres expériences $(abc) \in \prod_i Q_i$:

$$D_K(abc) = \prod R_i.$$

31. Le dispositif en question, malgré cette appellation, ne semble pas entretenir de relation particulière avec l'état GHZ défini ici par la formule 9.

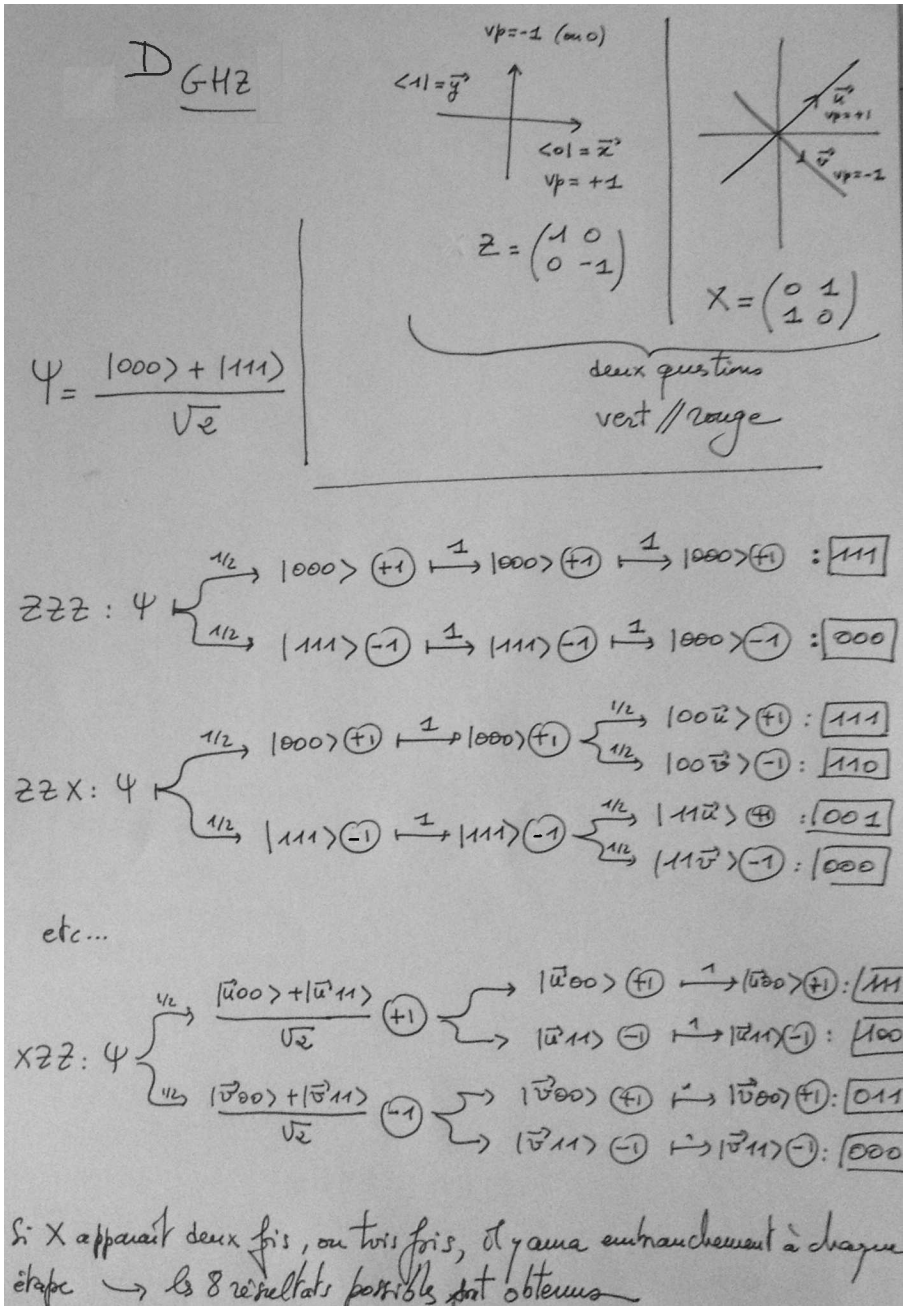

FIGURE 2 – Fonctionnement du dispositif D_{GHZ}

4.3 Notions de localité (ou de séparabilité) pour les dispositifs

4.3.1 Définitions

Le cas de l'uplicité $k = 1$ est laissé de coté dans les définitions qui suivent, puisque dans ce cas particulier les dispositifs pourraient être dits à la fois locaux, globaux et non séparables.

Définition 34 (Notions de localité)**.** Soit $G : \prod_{i\in I} Q_i = Q \rightsquigarrow R = \prod_{i\in I} R_i$ un dispositif multilocal cohérent, avec $I = \{1, \cdots, k\}$, où k est un entier donné supérieur ou égal à 2.

— On dit que G est *local* ou *complètement local* ou *complètement séparable* s'il existe une famille de dispositifs (nécessairement cohérents) $(L_i : Q_i \rightsquigarrow R_i)_{i\in I}$ dont G soit le produit tensoriel :

$$G = L_1 \otimes L_2 \otimes \cdots \otimes L_k,$$

autrement dit si l'on a

$$G = G_{[1]} \otimes G_{[2]} \otimes \cdots \otimes G_{[k]},$$

— On dit que G est *quasi-local* s'il peut s'écrire comme la borne supérieure, autrement dit comme l'union, d'une famille de réalisations partielles cohérentes complètement locales, ou, de façon équivalente [32], s'il peut s'écrire comme l'union d'une famille de réalisations partielles déterministes complètement locales,

— On dit que G est *partiellement local* s'il admet une réalisation partielle cohérente D qui soit complètement locale, ou, de façon équivalente [33], s'il admet une réalisation partielle déterministe complètement locale.

Peut-être plus utiles sont les définitions suivantes de semi-localité, que nous exprimerons également en terme de séparabilité.

Définition 35. G désignant toujours un dispositif multilocal cohérent $\prod_{i\in I} Q_i = Q \rightsquigarrow R = \prod_{i\in I} R_i$ avec $I = \{1, \cdots, k\}$ et $k \geqslant 2$,

— On dit que G est *séparable* ou *semi-local* s'il existe une partition [34] $J_1 \cup J_2$ de I telle que G s'exprime, à l'ordre des facteurs près, comme le produit tensoriel $G = L_1 \otimes L_2$ de deux dispositifs $L_1 : \prod_{i\in J_1} Q_i \rightsquigarrow \prod_{i\in J_1} R_i$ et $L_2 : \prod_{i\in J_2} Q_i \rightsquigarrow \prod_{i\in J_2} R_i$, autrement dit si l'on a, à l'ordre des facteurs près :

$$G = G_{[J_1]} \otimes G_{[J_2]}.$$

— On dit que G est *quasi-séparable* ou *quasi-semi-local* s'il existe une partition $J_1 \cup J_2$ de I telle que G soit l'union d'une famille de réalisations partielles L séparables selon J_1 et J_2, autrement dit vérifiant toutes $L = L_{[J_1]} \otimes L_{[J_2]}$,

— On dit que G est *pseudo-séparable* ou *pseudo-semi-local* s'il peut s'écrire comme l'union d'une famille de réalisations partielles cohérentes séparables (mais non nécessairement séparables selon la *même* partition),

32. Du fait la proposition 3.
33. Du fait la proposition 3.
34. Voir la note 20.

— On dit que G est *partiellement séparable* ou *partiellement semi-local* s'il admet une réalisation partielle cohérente $D : \prod_{i=1}^{i=k} Q_i \rightsquigarrow \prod_{i=1}^{i=k} R_i$ qui soit séparable, ou, de façon équivalente, s'il admet une réalisation déterministe séparable.

Proposition 4. *On a les implications suivantes :*

$$\begin{array}{ccccc} \textit{local} & \Rightarrow & \textit{quasi-local} & \Rightarrow & \textit{partiellement local} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \textit{séparable} & \Rightarrow & \textit{quasi-séparable} & \Rightarrow & \textit{partiellement séparable} \end{array}$$

De plus, quasi-séparable ⇒ pseudo-séparable ⇒ partiellement séparable.

Proposition 5. *Les dispositifs locaux associés à un dispositif multi-local le caractérisent si et seulement si celui-ci est local.*

4.3.2 Cas des dispositifs multilocaux déterministes

On a déjà indiqué, au sein même de la définition 34, le fait que la proposition 3 entraine la suivante :

Proposition 6. *Un dispositif multilocal est partiellement local (resp. partiellement séparable) si et seulement s'il possède une réalisation* déterministe *locale (resp. partiellement séparable).*

Examinons donc de plus près les dispositifs déterministes du point de vue de la localité. On sait qu'un dispositif multilocal déterministe $f : \prod_{i\in I} Q_i = Q \to R = \prod_{i\in I} R_i$ peut toujours s'écrire sous la forme $f = (f_1, \cdots, f_k)$, chacune des fonctions f_i étant *a priori* définie sur $Q = \prod_{i\in I} Q_i$, donc étant une fonction de k variables. La définition suivante permet de préciser les variables dont ces fonctions dépendent effectivement.

Définition 36 (Domaine indicial de dépendance)**.** Étant donné un entier $j \in I = \{1, ..., k\}$, on dit qu'une application $g : \prod_{i\in I} Q_i = Q \to S$ *ne dépend pas de* j si pour tout $\hat{q} = (q_1, q_2, ..., q_{j-1}, q_{j+1}, ..., q_k) \in \prod_{i\neq j} Q_i$, l'application

$$g_{\hat{q}} : Q_j \ni q_j \mapsto g_{\hat{q}}(q_j) = g(q_1, ..., q_j, ..., q_k) \in S$$

est constante. Dans le cas contraire — autrement dit s'il existe

$$\hat{q} = (q_1, q_2, ..., q_{j-1}, q_{j+1}, ..., q_k) \in \prod_{i\neq j} Q_i$$

et deux éléments q_j et q'_j de Q_j tels que $g(q_1, ..., q_j, ..., q_k) \neq g(q_1, ..., q'_j, ..., q_k)$ — nous dirons que g dépend de j. On appelle *domaine indicial de dépendance* de g, et l'on note $\mathrm{do}(g)$, l'ensemble des indices j dont g dépend.

Remarque 33. Un dispositif multilocal déterministe est constant si et seulement si son domaine indicial de dépendance est vide.

On a alors les propriétés suivantes :

Proposition 7. *Pour un dispositif multilocal déterministe* $f : \prod_{i\in I} Q_i = Q \to R = \prod_{i\in I} R_i$*, il n'y a pas de différence entre le fait d'être local, quasi-local ou partiellement local, et cela se produit si et seulement si pour tout* $i \in I$, $\mathrm{do}(f_i) \subset$

$\{i\}$, autrement dit si et seulement s'il existe une famille d'applications $(g_i : Q_i \to R_i)_{i\in I}$ telle que pour tout $(q_i)_{i\in I} \in Q$ on ait

$$f((q_i)_{i\in I}) = (g_i(q_i))_{i\in I}.$$

De même, pour un tel dispositif déterministe, il y équivalence entre le fait d'être partiellement semi-local, pseudo-semi-local, quasi-semi-local et semi-local, et cela se produit si et seulement s'il existe une partition $I = J_1 \cup J_2$ et deux dispositifs déterministes $g_1 : \prod_{i\in J_1} Q_i \to \prod_{i\in J_1} R_i$ et $g_2 : \prod_{i\in J_2} Q_i \to \prod_{i\in J_2} R_i$ tels que, à réorganisation près de l'ordre des variables dont dépendent g_1 et g_2, on ait $f = g_1 \otimes g_2$.

Proposition 8. *Un dispositif multilocal déterministe $f : \prod_{i\in I} Q_i = Q \to R = \prod_{i\in I} R_i$ est local si et seulement si chacun des sous-dispositifs locaux f_i est déterministe. Un dispositif multilocal déterministe $f : \prod_{i\in I} Q_i = Q \to R = \prod_{i\in I} R_i$ est semi-local si et seulement s'il existe une partition $I = J_1 \cup J_2$ telle que les sous-dispositifs f_{J_1} et f_{J_2} soient déterministes.*

4.4 Structures connectives relationnelles

Nous regroupons sous l'appellation générale de *structures connectives relationnelles* toutes les structures connectives qui peuvent être associées aux dispositifs multilocaux. Nous définissons dans cette section plusieurs types de structures connectives relationnelles, à savoir :

— diverses structures qualifiées de *tensorielles*,

— deux structures dites *domaniales*,

et, renvoyant à un travail ultérieur, nous signalons également, sans en donner ici la définition, la notion de structure connective ludique.

4.4.1 Structures connectives tensorielles

Notons respectivement par NPS, NOS, NPL, NQS, NQL, NS et NL les classes de dispositifs multilocaux d'uplicité $k \geqslant 2$ qui

— ne sont pas partiellement séparables : NPS,

— ne sont pas pseudo-séparables : NOS,

— ne sont pas partiellement locaux : NPL,

— ne sont pas quasi-séparables : NQS,

— ne sont pas quasi-locaux : NQL,

— ne sont pas séparables : NS,

— ne sont pas locaux : NL.

Ainsi, nous écrirons par exemple $D \in NOS$ pour exprimer que D est un dispositif multilocal d'uplicité $\geqslant 2$ et qui n'est pas pseudo-séparable.

Soit maintenant α l'une des classes définies ci-dessus.

Définition 37. Pour tout dispositif multilocal D, on appelle structure connective tensorielle de classe α de D, et on note $\kappa_\alpha(D)$, la structure connective *intègre* sur l'ensemble $I = \{1, \cdots, k\}$ des indices de D engendrée par les parties $J \subset I$ telles que $D_{[J]} \in \alpha$:

$$\kappa_\alpha(D) = [\{J \in \mathcal{P}(I), D_{[J]} \in \alpha\}].$$

On pourra nommer la structure connective κ_α de la même manière que sont nommés les sous-dispositifs $D_{[J]}$ appartenant à α. Par exemple $\kappa_{NPS}(D)$ sera appelée *la structure connective non partiellement semi-locale du dispositif multilocal D.*

Remarque 34. Par définition des classes considérées, l'ensemble

$$\mathcal{J} = \{J \in \mathcal{P}(I), D_{[J]} \in \alpha\}$$

ne contient aucune partie de I de cardinal inférieur ou égal à 1, mais la structure connective *intègre* engendrée par cet ensemble, que désigne la notation $[\mathcal{J}]_1$, contient d'office la partie vide et les singletons $\{j\}$, ce qui correspond à l'intuition selon laquelle chaque lieu est connecté à lui-même. S'il a fallu traiter séparément le cas de l'uplicité $k = 1$, c'est que dans ce cas particulier la localité n'est pas distincte d'une inséparable globalité.

L'implication logique indiquée à la proposition 4 entre les propriétés de localité de la définition 34 entraîne immédiatement les relations de finesse suivantes entre structures connectives :

Proposition 9. *Pour tout dispositif multilocal D, on a les inclusions suivantes :*

$$\kappa_{NPS}(D) \subset \kappa_{NPL}(D) \subset \kappa_{NQL}(D) \subset \kappa_{NL}(D),$$

$$\kappa_{NPS}(D) \subset \kappa_{NOS}(D) \subset \kappa_{NQS}(D) \subset \kappa_{NS}(D) \subset \kappa_{NL}(D),$$

et

$$\kappa_{NQS}(D) \subset \kappa_{NQL}(D).$$

Exemple 16.

4.4.2 Structures connectives domaniales

Chaque réalisation déterministe f d'un dispositif multilocal $D : \prod_{i\in I} Q_i = Q \rightsquigarrow R = \prod_{i\in I} R_i$ donne lieu à une famille d'applications $(f_i : Q \to R_i)_{i\in I}$ dont chacune exprime, par son domaine de dépendance[35] $\mathrm{do}(f_i)$, une certaine connectivité entre les variables concernées vis-à-vis de f. Toutefois, cette connectivité peut être une sorte d'artefact propre à la fonction f et non au dispositif D dans son ensemble, d'où l'idée de prendre l'intersection pour toutes les réalisations déterministes de toutes les structures connectives correspondantes. C'est l'objet des deux définitions suivantes.

Définition 38 (Structure connective domaniale d'un dispositif déterministe)**.** Soit $f : \prod_{i\in I} Q_i = Q \to R = \prod_{i\in I} R_i$ un dispositif déterministe d'uplicité $k = card(I)$, on appelle *structure connective domaniale de f*, et l'on note $\kappa_{do}(f)$, la structure connective intègre engendrée par les domaines de dépendance $\mathrm{do}(f_i)$:

$$\kappa_{do}(f) = [\{\mathrm{do}(f_i), i \in I\}]_1.$$

Exercice 2. Préciser, pour un dispositif déterministe f, les relations de finesse entre $\kappa_{do}(f)$ et les structures de la forme $\kappa_\alpha(f)$ avec $\alpha \in \{NPS, NOS, NPL, NQS, NQL, NS, NL\}$.

35. Voir la définition 36 page 36.

Définition 39 (Structure connective domaniale)**.** Soit $D : \prod_{i\in I} Q_i = Q \to R = \prod_{i\in I} R_i$ un dispositif d'uplicité $k = card(I)$. Notant $\mathcal{F}(D)$ l'ensemble des réalisations déterministes de D, on appelle *structure connective domaniale de* D, et l'on note $\kappa_{do}(D)$, l'intersection des structures connectives domaniales des applications $f \in \mathcal{F}(D)$:

$$\kappa_{do}(D) = \bigcap_{f\in\mathcal{F}(D)} \kappa_{do}(f).$$

Dans les définitions précédentes, la non-localité liée au fait qu'une réponse r_i serait totalement indépendante de la variable q_i de même indice i n'est pas du tout prise en compte. Par exemple, pour le dispositif déterministe $f : \mathbf{N}^3 \to \mathbf{N}^3$ défini pour tout triplet $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbf{N}^3$ par $f(q_1, q_2, q_3) = (q_2, q_3, q_1)$, on obtient pour $\kappa_{do}(f)$ la structure connective discrète sur $I = \{1, 2, 3\}$, alors même que f est non locale. D'où l'idée d'introduire une autre structure connective, que nous appellerons la structure connective pointée, définie comme la structure connective domaniale à ceci près que les domaines de dépendances sont augmentés de l'indice i concerné :

Définition 40 (Structure connective pointée)**.** Soit $f : \prod_{i\in I} Q_i = Q \to R = \prod_{i\in I} R_i$ un dispositif déterministe d'uplicité $k = card(I)$. On appelle *domaine indicial de dépendance pointé* de f l'ensemble d'indices noté $\mathrm{dp}(f)$ et défini par

$$\mathrm{dp}(f) = \mathrm{do}(f) \cup \{i\},$$

et on appelle *structure connective pointée de* f, notée $\kappa_{dp}(f)$, la structure connective intègre engendrée par les domaines de dépendance pointés $\mathrm{dp}(f_i)$:

$$\kappa_{dp}(f) = [\{\mathrm{dp}(f_i), i \in I\}]_1.$$

Plus généralement, pour tout dispositif multilocal $D : \prod_{i\in I} Q_i = Q \to R = \prod_{i\in I} R_i$ d'uplicité $k = card(I)$, on appelle *structure connective pointée de* D, et l'on note $\kappa_{dp}(D)$, l'intersection des structures connectives pointées des applications $f \in \mathcal{F}(D)$:

$$\kappa_{dp}(D) = \bigcap_{f\in\mathcal{F}(D)} \kappa_{dp}(f),$$

où comme précédemment $\mathcal{F}(D)$ désigne l'ensemble des réalisations déterministes de D

4.4.3 Structure connective ludique

Étant donnés $D : Q = Q_1 \times ... \times Q_k \rightsquigarrow R_1 \times ... \times R_k = R$ et $D' : Q' = Q'_1 \times ... \times Q'_k \rightsquigarrow R'_1 \times ... \times R'_k = R'$ deux dispositifs de même uplicité k, une réduction de Chalons est une 2-réduction locale telle que définie par exemple dans [3] ou, plus récemment, dans [4]. Deux tels dispositifs seront dit ludiquement équivalents s'il existe entre eux une réduction de Chalons dans chaque sens. Ceci définit une relation d'équivalence sur la classe des dispositifs d'uplicité k, dont les classes d'équivalence sont appelées les degrés ludiques d'uplicité k, et la réduction de Chalons donne lieu à une relation d'ordre entre ces degrés ludiques. La classe ordonnée ainsi définie contient notamment les degrés de Tukey, qui contiennent notamment tous les ordinaux. Entre deux ordinaux quelconques, les degrés ludiques contiennent également une classe propre de degrés intermédiaires. Dans

son travail, Chalons soutient que les degrés ludiques constituent un outil bien adapté à la description et à l'étude des propriétés locales et non locales de la physique quantique, en particulier de l'intrication quantique.

Or, dans un travail en cours de réalisation, Anatole Khélif associe de façon naturelle une structure connective à tout degré ludique appartenant à une classe assez large, qui contient en particulier tous les exemples qui nous intéressent ici : il y aurait donc là un procédé « quantique » pour associer à tout dispositif multilocal, via le degré ludique auquel il appartient, une structure connective dont il faudra déterminer si elle coïncide ou non avec l'une de celle que nous avons définies précédemment.

4.5 Ordre connectif d'un dispositif multi-local

De manière analogue à la définition 27 de l'ordre connectif d'un état quantique, nous posons la définition suivante pour l'ordre connectif d'un dispositif multi-local.

Définition 41. Etant donné D un dispositif multi-local, on appelle
- *ordre connectif tensoriel de D* le maximum des ordres connectifs des structures tensorielles [36] associées à D,
- *ordre connectif domanial de D* le maximum entre l'ordre connectif de sa structure domaniale et l'ordre connectif de sa structure pointée [37],
- *ordre connectif ludique de D* l'ordre connectif de sa structure connective ludique [38],
- *Ordre connectif de D* le maximum entre son ordre connectif tensoriel, son ordre connectif domanial et son ordre connectif ludique.

4.6 Exemples de structures connectives de dispositifs

Exemple 17 (Dispositif D_{EPR}). Comme nous l'avons vu dans l'exemple 12, ce dispositif est défini par $Q_1 = Q_2 = \{*\}$, $R_1 = R_2 = \{0,1\}$ et $D_{EPR}(**) = \{00, 11\}$. Pour ce dispositif, toutes les structures connectives sont discrètes, sauf $\kappa_{NS}(D_{EPR})$ et $\kappa_{NL}(D_{EPR})$. En effet, on vérifie que D_{EPR} est quasi-séparable mais non-séparable.

Exemple 18 (Dispositif D_K). On vérifie que pour ce dispositif, décrit dans l'exemple 15 page 33, on a $\kappa_{NPS}(D_K) = \kappa_{NL}(D_K) = \mathcal{B}_3$, de sorte que toutes les structures connectives tensorielles coïncident avec la structure borroméenne.

Proposition 10. *$\kappa_{do}(D_K)$ est la structure connective discrète.*

Preuve. Cela découle de l'existence de réalisations déterministes de D_K qui ne dépendent que de deux quelconques des trois variables en jeu. C'est par exemple le cas de l'application définie de la façon suivante :

$$f(00q_3) = 000, f(01q_3) = 011, f(10q_3) = 101, \text{ et } f(11q_3) = 111,$$

pour laquelle $\mathrm{do}(f_1) = \mathrm{do}(f_2) = \mathrm{do}(f_3) = \{1,2\}$.

CQFD

36. Voir la section 4.4.1.
37. Voir la section 4.4.2.
38. section 4.4.3.

Proposition 11. $\kappa_{dp}(D_K) = \mathcal{B}_3$.

Preuve. La fonction f considérée dans la preuve de la proposition 10 montre que $\{1,3\}$ et $\{2,3\}$ n'appartiennent pas à $\kappa_{dp}(GHZ)$. On vérifie de même que $\{2,3\}$ n'y est pas non plus. On vérifie par l'absurde que $I \in \kappa_{dp}(D_K)$ car sinon il existerait nécessairement une réalisation déterministe f de D_K pour laquelle il existerait un singleton dans I tel que chacun des domaines pointés des f_i soient soit inclus soit dans ce singleton, soit inclus dans son complémentaire. Si, par exemple, un tel singleton pouvait être pris égal à $\{3\}$, on devrait nécessairement avoir avoir $do(f_1) \subset \{1,2\}$, $do(f_2) \subset \{1,2\}$ et $do(f_3) \subset \{3\}$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'aucune réalisation déterministe du dispositif D_K ne peut en fait vérifier cette condition.

CQFD

On trouvera d'autres exemples de structures connectives de dispositifs multilocaux dans la présentation placée sur la page web
`https://sites.google.com/site/logiquecategorique/Contenus/CSQE`.

5 Structures connectives des dispositifs probabilistes

Dans les considérations précédentes, nous avons laissé de coté les aspects proprement probabilistes des expériences de mesure d'un système quantique, puisque ce que nous avons appelé un dispositif multilocal est défini par l'ensemble des réponses *possibles* du système, indépendamment de leur probabilité.

Grâce à la notion de structure connective d'une famille finie de variables aléatoires, dont nous devons l'idée à Anatole Khélif, tout *dispositif multi-local probabiliste* associé à une expérience de mesure sur un système intriqué donne également lieu à une structure connective. Dans le présent article, nous ne définirons pas formellement les dispositifs multi-locaux probabilistes, nous contentant de donner la définition de la structure connective d'une famille finie de variables aléatoires. L'idée consiste à définir, pour toute famille finie $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω, P) et à valeurs dans des espaces mesurables R_i :

$$X_i : \Omega \to R_i,$$

le fait d'être séparable :

Définition 42. $(X_i)_{i\in I}$ est *séparable* s'il existe une partition $I = I_1 \cup I_2$ en deux parties disjointes non vides, telle que les deux variables aléatoires $Y_n : \Omega \to \prod_{i\in I_n} R_i$, avec $n \in \{1,2\}$, soient indépendantes, où chaque Y_n est définie par

$$Y_n = (X_i)_{i\in I_n}.$$

Autrement dit, pour toute partie mesurable $A_1 \subset \prod_{i\in I_1} R_i$ et toute partie mesurable $A_2 \subset \prod_{i\in I_2} R_i$, on doit avoir

$$P((X_i)_{i\in I} \in A_1 \times A_2) = P((X_i)_{i\in I_1} \in A_1)P((X_i)_{i\in I_2} \in A_2).$$

Définition 43. La *structure connective de la famille de variables aléatoires* $(X_i)_{i\in I}$ est la structure connective sur I engendrée par les parties $J \subset I$ pour lesquelles $(X_j)_{j\in J}$ est une famille non séparable de variables aléatoires.

Pour une expérience de mesure sur un système intriqué, il s'agit alors d'appliquer la définition ci-dessus à une certaine famille de variables aléatoires associée au dispositif quantique concerné.

Exercice 3. L'ensemble des parties J pour lesquelles $(X_j)_{j\in J}$ est une famille non séparable de variables aléatoires forme-t-il une structure connective ? Autrement dit, dans la définition précédente, aurait-on pu remplacer le mot « engendrée » par « constituée » ?

Exemple 19 (Trois variables aléatoires borroméennement connectées). Étant donné un entier $n \geqslant 2$, étant données deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes prenant avec des probabilités uniformes leurs valeurs dans $\{0, 1, \cdots, n-1\}$, appelons X_3 la variable aléatoire obtenue en faisant la somme dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de X_1 et X_2. On vérifie facilement que ces trois variables aléatoires sont deux à deux séparables, mais que la famille qu'elles forment toutes trois ne l'est pas. Par conséquent, la structure connective de (X_1, X_2, X_3) est borroméenne. Par exemple, pour $n = 2$, on peut prendre $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ muni de la probabilité uniforme, X_1 telle que $X_1(a,b) = a$, X_2 tel que $X_2(a,b) = b$, et $X_3(a,b) \equiv a + b\,[\mod 2]$.

Exemple 20 (Familles de variables aléatoires à structure connective brunnienne). Plus généralement, pour tout entier $k \geqslant 1$, il suffit de prendre k variables aléatoires X_1, $\cdots$, X_k indépendantes et identiquement distribuées selon la loi uniforme sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et de poser $X_{k+1} \equiv \sum_{i=1}^{i=k} X_i\,[\mod n]$ pour obtenir une famille $(X_1, \cdots, X_{k+1})$ de structure brunnienne : ces variables sont globalement connectées, mais à part les singletons toute sous-famille non vide est séparable.

En formant des vecteurs aléatoires avec ces structures brunniennes, on vérifie facilement qu'on peut construire des familles de variables aléatoires admettant n'importe quelle structure connective donnée :

Proposition 12. *Toute structure connective finie est celle d'une famille de variables aléatoires.*

6 Conclusion et remerciements

Une grande diversité de structures connectives a été associée dans le présent travail aux états quantiques intriqués et aux dispositifs de mesure portant sur ces états, permettant en particulier de leur associer un ordinal, l'ordre connectif, constituant ainsi autant d'outils de description et de classification de l'intrication quantique. L'étude approfondie de ces structures, et en particulier des relations entre elles, reste à mener. Il reste également à prouver les diverses *conjectures brunniennes*[39] associées à ces structures.

Remerciements. Je remercie les participants du séminaire de logique catégorique de Paris 7, en particulier Anatole Khélif, Saab Abou-Jaoudé, Christophe Chalons ainsi que Jean-Jacques Rozenbaum, Marc Lachièze-Rey et Jean-Jacques Szczeciniarz, ceux du *Workshop on Diffeology, etc.* qui s'est tenu à Aix-en-Provence en juin 2014, en particulier Patrick Iglesias-Zemmour et Pierre Cartier,

39. Voir la section 1.3 page 4.

et les organisateurs du séminaire Quartz-LISMMA (Supméca Paris, juillet 2014) pour les échanges d'idées et les encouragements reçus.

7 Index des notations

— $[\mathcal{A}]$ ou $[\mathcal{A}]_1$, structure connective intègre engendrée par un ensemble $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble de points : section 1.4 page 5,
— b_J, projection sur $J \subset I$ d'un état b $(J, \neg J)$-séparable, section 3.1.4 page 20,
— $\exists^\bullet$, quantificateur « certains mais pas tous », formule (13) page 20,
— $\neg\mathcal{D}_J$, ensemble des J-états intriqués, formule (11) page 19,
— $\mathcal{D}_J$, ensemble des J-états séparables, définition 14 page 19,
— $\mathcal{D}_{(J_1,J_2)}$, ensemble des J-états (J_1, J_2)-séparables : définition 13 page 19,
— H_J, espace des J-états, formule (10) page 19,
— $\neg J$, complémentaire de J dans I, section 3.1.4 page 20,
— $\mathcal{L}(H)$, espace des endomorphismes de H,
— $M[a]$, ensemble des états accessibles à partir de a après une mesure M, formule (3) page 10,
— $M_J[a]$ ensemble des projections sur J des états accessibles à partir de a après une expérience M déterminante sur $\neg J$, formule (12) page 20,
— $\mathcal{M}_L$, ensemble des expériences déterminantes sur $L \subset I$, section 3.1.4 page 20,
— $R : A \rightsquigarrow B$, relation binaire de A vers B vue comme application multivalente, formule (17) page 27,
— $\widetilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{F}}$, ensemble des états du système $\mathcal{S}$ (dans le formalisme $\mathcal{F}$), définition 3 page 6,
— $\mathcal{T}(H)$, ensemble des opérateurs positifs sur H et de trace 1, définition 8 page 12,
— $< v|A|w >$: remarque 8 page 7,
— $\Omega(\kappa)$, ordre connectif de la structure connective intègre κ : section 1.5, page 5,
— $\Omega(\psi)$, ordre connectif de l'état quantique (pur) ψ : formule (16) page 26.

Références

[1] PK Aravind. Borromean entanglement of the GHZ state. In *Potentiality, Entanglement and Passion-at-a-Distance*, pages 53–59. Springer, 1997.

[2] Hermann Brunn. Ueber verkettung. *Sitzungsberichte der Bayerische Akad. Wiss., MathPhys. Klasse*, 22 :77–99, 1892.

[3] C. Chalons and JP Ressayre. Degrés ludiques : une introduction, 1999-2012.

[4] Christophe Chalons. Le paradigme téléphonique. *HAL*, 2014. `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00976493`.

[5] Hans Debrunner. Über den Zerfall von Verkettungen. *Mathematische Zeitschrift*, 85 :154–168, 1964. http ://www.digizeitschriften.de.

[6] Stéphane Dugowson. Connectivity structures of quantum entanglement (exposé du 18 juin 2014 au séminaire de logique catégorique etc., paris 7),. `https://sites.google.com/site/logiquecategorique/Contenus/CSQE`.

[7] Stéphane Dugowson. On connectivity spaces. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, LI(4) :282–315, 2010. http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00446998/fr.

[8] Stéphane Dugowson. *Dynamiques connectives (Une introduction aux notions connectives : espaces, représentations, feuilletages et dynamiques catégoriques)*. Éditions Universitaires Européennes, 2012.

[9] Stéphane Dugowson. Espaces connectifs : représentations, feuilletages, ordres et difféologies. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégorique*, LIV, juin 2013.

[10] Daniel M Greenberger, Michael A Horne, and Anton Zeilinger. Going beyond Bell's theorem. In *Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe*, pages 69–72. Springer, 1989.

[11] Taizo Kanenobu. Satellite links with Brunnian properties. *Arch. Math.*, 44(4) :369–372, 1985.

[12] Taizo Kanenobu. Hyperbolic links with Brunnian properties. *J. Math. Soc. Japan*, 38 :295–308, 1986.

[13] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.

[14] Dale Rolfsen. *Knots and links*. Publish or Perish, Inc., Houston, 1976, sec. ed. 1990.

[15] Abner Shimony, Robert S Cohen, Michael Horne, and John J Stachel. *Potentiality, Entanglement and Passion-at-a-Distance : Quantum Mechanical Studies for Abner Shimony, Volume Two*, volume 2. Springer, 1997.

[16] Ayumu Sugita. Borromean entanglement revisited. *arXiv preprint arXiv :0704.1712*, 2007.

Table des matières

1 Rappels sur les structures connectives **3**
1.1 Structures connectives intègres 3
1.2 Exemples 3
1.3 Théorème de Brunn-Kanenobu et conjectures brunniennes 4
1.4 Engendrement de structures connectives 5
1.5 Ordre connectif 5

2 Quantique : deux formalismes de base **5**
2.1 Notions communes aux deux formalismes 6
2.1.1 Notion de système quantique 6
2.1.2 À propos des espaces de Hilbert, des bras et des kets . . . 7
2.1.3 Expériences de mesure, observables 7
2.1.4 Systèmes composés 8
2.2 Formalisme $\mathcal{FV}$ des vecteurs d'état 9
2.2.1 États (vectoriels) d'un système quantique 9
2.2.2 Mesures projectives 9
2.2.3 Systèmes composés et intrication 10
2.3 Formalisme $\mathcal{FD}$ des opérateurs de densité 12
2.3.1 États (de densité) d'un système quantique 12
2.3.2 Mesure projective 13
2.3.3 Systèmes composés et intrication 14
2.4 Passage d'un formalisme à l'autre 16
2.4.1 Des vecteurs d'état aux opérateurs de densité 16
2.4.2 Des opérateurs de densité aux vecteurs d'état 17

3 Structures connectives des états quantiques intriqués **17**
3.1 Structures connectives de désintrication 18
3.1.1 L'analogie d'Aravind entre systèmes intriqués et entrelacs 18
3.1.2 Un éventail de structures connectives 18
3.1.3 J-états 19
3.1.4 Expériences déterminantes et projections sur J 20
3.1.5 Le quantificateur $\exists^\bullet$ 20
3.1.6 Types d'intrication de ψ sur $J \subset I$ 21
3.1.7 Structures de désintrication de ψ 23
3.1.8 Exemples : états EPR, GHZ et O_2 24
3.2 Structures connectives de densité 25
3.2.1 L'idée de Sugita 25
3.2.2 Corrélation et intrication de ρ sur une partie $J \subset I$ 25
3.2.3 Structures connectives de densité de ρ 26
3.3 Ordre connectif d'un état quantique intriqué 26
3.4 Conjectures brunnienne 27

4 Structures relationnelles des dispositifs multi-locaux **27**
4.1 Définition des dispositifs multilocaux 27
4.1.1 Relations binaires vues comme applications multivalentes 27
4.1.2 Dispositifs expérimentaux (globaux) 27
4.1.3 Dispositifs multilocaux 28
4.2 Expériences quantiques en termes de dispositifs multilocaux . . . 29

4.3 Notions de localité (ou de séparabilité) pour les dispositifs 35
4.3.1 Définitions 35
4.3.2 Cas des dispositifs multilocaux déterministes 36
4.4 Structures connectives relationnelles 37
4.4.1 Structures connectives tensorielles 37
4.4.2 Structures connectives domaniales 38
4.4.3 Structure connective ludique 39
4.5 Ordre connectif d'un dispositif multi-local 40
4.6 Exemples de structures connectives de dispositifs 40

5 Structures connectives des dispositifs probabilistes 41

6 Conclusion et remerciements 42

7 Index des notations 43