

Erratum à l'article *Groupes d'extensions et foncteurs polynomiaux*

Aurélien DJAMENT *

21 février 2018

Une partie de la démonstration des théorèmes 1.13 et 1.14 de l'article [2] n'est pas correcte : l'argument donné page 72 pour justifier que $\mathbf{R}^n p_\infty(X) = 0$ pour tout entier $n > 0$ et tout foncteur analytique $X : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}$ (lorsqu'on suppose que $\mathbf{R}^n p_\infty(F) = 0$ pour tout entier $n > 0$ et tout foncteur analytique $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}$) est inexact. En effet, le diagramme du milieu de la page 72 mettant en jeu le foncteur d'inclusion $u : \mathcal{E}_{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{E}$ ne commute en général pas, parce que le foncteur Ext^* qui apparaît à gauche de ce diagramme n'est pas un bifoncteur équilibré (au sens de Cartan-Eilenberg [1]) dès lors que certains groupes abéliens de morphismes dans \mathcal{A} ont de la p -torsion (ainsi, la phrase *On peut dériver ces bifoncteurs de la même façon que les Hom et produits tensoriels usuels*, en haut de la page 70 de [2], est elle-même à prendre avec précaution).

Nous expliquons ici comment établir le résultat souhaité lorsque \mathcal{E} est la catégorie des modules à gauche sur un anneau k . L'argument que nous allons donner fonctionne de la même façon, si ce n'est des complications typographiques, lorsque la catégorie de Grothendieck \mathcal{E} possède suffisamment d'objets projectifs de type fini. Nous soupçonnons que les théorèmes 1.13 et 1.14 sont vrais dans le degré de généralité indiqué dans [2] (\mathcal{E} catégorie de Grothendieck arbitraire), mais le raisonnement qui suit ne suffit plus.

On note, comme dans le passage en question de [2], σ et τ les foncteurs $\mathcal{E} = k\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{F}_p} \simeq (k \otimes \mathbb{F}_p)\text{-Mod}$ donnés par $- \otimes \mathbb{Z}/p$ et $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -)$ respectivement. L'adjonction entre σ et le foncteur d'oubli u induit une adjonction par postcomposition :

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k \otimes \mathbb{F}_p)}(\sigma_*(T), X) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}(T, u_*(X))$$

où T (resp. X) est un objet de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ (resp. $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k \otimes \mathbb{F}_p)$); en dérivant, cette adjonction induit une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k \otimes \mathbb{F}_p)}^n(\sigma_*(T), X) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}^n(T, u_*(X)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k \otimes \mathbb{F}_p)}^{n-1}(\tau_*(T), X) \rightarrow$$

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k \otimes \mathbb{F}_p)}^{n+1}(\sigma_*(T), X) \rightarrow \cdots$$

En effet, u_* est exact, et les dérivés à gauche de σ_* sont τ_* en degré 1 et nuls en degrés > 1 (la propriété analogue de σ se transporte par postcomposition car les foncteurs projectifs de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ prennent des valeurs k -projectives).

*CNRS, Laboratoire de mathématiques Jean Leray (UMR 6629), aurelien.djament@univ-nantes.fr.

Considérons maintenant les foncteurs de troncature polynomiale $p_d^A : \mathcal{F}(\mathcal{A}; A) \rightarrow \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; A)$ (où $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et A est un anneau) et leurs dérivés : ils sont donnés par

$$\mathbf{R}^n p_d^A(F)(a) = \text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; A)}^n(q_d(A[\mathcal{A}(a, -)]), F)$$

pour d fini, et $\mathbf{R}^n p_\infty^A$ s'obtient comme colimite filtrante sur $d \in \mathbb{N}$ des $\mathbf{R}^n p_d^A(F)$ (cf. [2, § 2.1]). Comme $q_d((k \otimes \mathbb{F}_p)[\mathcal{A}(a, -)]) \simeq \sigma_* q_d(k[\mathcal{A}(a, -)])$, on déduit de ce qui précède une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \mathbf{R}^n p_d^{k \otimes \mathbb{F}_p}(F) \rightarrow \mathbf{R}^n p_d^k(u_* F) \rightarrow h_d^{n-1}(F) \rightarrow \mathbf{R}^{n+1} p_d^{k \otimes \mathbb{F}_p}(F) \rightarrow \mathbf{R}^{n+1} p_d^k(u_* F) \rightarrow \cdots$$

pour F dans $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k \otimes \mathbb{F}_p)$, où h_d^n est défini par

$$h_d^n(F)(a) := \text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k \otimes \mathbb{F}_p)}^n(\tau_*(q_d(k[\mathcal{A}(a, -)])), F) \quad (1)$$

pour d fini, et h_∞^n s'obtient par colimite filtrante sur $d \in \mathbb{N}$ des h_d^n .

Comme, par hypothèse (et grâce aux considérations du paragraphe *Cas d'une catégorie k-linéaire* de [2, p. 70-71]), $\mathbf{R}^n p_\infty^{k \otimes \mathbb{F}_p}(F) = 0$ pour $n > 0$ et F dans $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; k \otimes \mathbb{F}_p)$, on en tire un isomorphisme naturel $\mathbf{R}^n p_\infty^k(u_* F) \simeq h_\infty^{n-1}(F)$ sous ces mêmes conditions. Mais la discussion du début de [2, § 2.3] montre qu'on a $\mathbf{R}^1 p_\infty^k(u_* F) = 0$ (pour F analytique), de sorte que h_∞^0 est nul sur les foncteurs analytiques. Comme

$$h_\infty^0(F)(a) = \text{colim}_{d \in \mathbb{N}} \text{Hom}(\tau_*(q_d(k[\mathcal{A}(a, -)])), F)$$

et que les $\tau_*(q_d(k[\mathcal{A}(a, -)]))$ sont analytiques, on en déduit que pour tout $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$ et tout $d \in \mathbb{N}$, il existe $r > d$ tel que la flèche $\tau_*(q_r(k[\mathcal{A}(a, -)])) \rightarrow \tau_*(q_d(k[\mathcal{A}(a, -)]))$ (induite par la projection canonique $q_r \rightarrow q_d$) soit *nulle*, ce qui entraîne (cf. (1)) que tous les h_∞^n sont identiquement nuls. On en tire donc $\mathbf{R}^n p_\infty^k(u_* F) = 0$ pour tout $n > 0$ et tout F dans $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; k \otimes \mathbb{F}_p)$, comme souhaité.

Références

- [1] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [2] Aurélien Djament. Groupes d'extensions et foncteurs polynomiaux. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 92(1) :63–88, 2015.