



**HAL**  
open science

## Calcul des vibrations induites par un impact sur une structure

Christophe Rouzaud, Fabrice Gatuingt, Olivier Dorival, Guillaume Hervé

► **To cite this version:**

Christophe Rouzaud, Fabrice Gatuingt, Olivier Dorival, Guillaume Hervé. Calcul des vibrations induites par un impact sur une structure. 32e rencontres universitaires de Génie Civil, AUGC 2014, 2014, Orléans, France. pp.1. hal-01023547

**HAL Id: hal-01023547**

**<https://hal.science/hal-01023547>**

Submitted on 14 Jul 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



---

## Calcul des vibrations induites par un impact sur une structure.

**Christophe Rouzaud<sup>1,2</sup>, Fabrice Gatuingt<sup>1</sup>, Olivier Dorival<sup>1</sup>,  
Guillaume Hervé<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> LMT-Cachan (ENS Cachan/CNRS/PRES UniverSud Paris), 61, avenue du  
Président Wilson, Cachan 94235, France, {rouzaud, gatuingt, dorival}@lmt.ens-  
cachan.fr

<sup>2</sup> ESTP Paris, 28, Avenue du Président Wilson, Cachan 94235, France, {crouzaud,  
gherve}@adm.estp.fr

---

*RÉSUMÉ. Déterminer les vibrations induites dans une structure soumise à un impact requiert une étude dynamique. Si on utilise un calcul aux EF associé à une résolution temporelle explicite, on est conduit à avoir des temps de calculs extrêmement long, surtout pour décrire la phase transitoire. C'est pourquoi nous proposons d'utiliser la TVRC pour résoudre ce problème de vibration aux moyennes fréquences.*

*ABSTRACT. The determination of the shaking induced by an aircraft impact on an industrial structure requires dynamic studies. The determination of the response by using classical finite element method associated with explicit numerical schemes requires significant calculation time, especially during the transient stage. That is why we proposed to use the VTCR to solve this vibration problem due to mid-frequencies.*

*MOTS-CLÉS: impact, béton armé, moyennes fréquences, vibrations induites.*

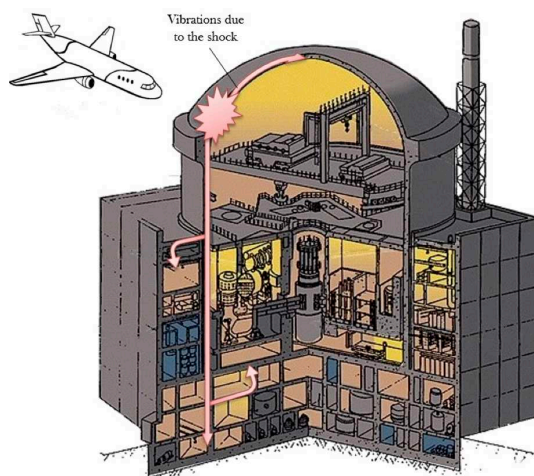
*KEYWORDS: impact, reinforced concrete, medium frequencies, induced vibrations*

---

## 1. Introduction

Dans le processus de conception d'une Installation Nucléaire de Base, la sûreté des structures présente un aspect primordial. Les dimensionnements du génie-civil, des supports des chemins de câbles électriques et des tuyauteries, des ancrages ainsi que la qualification des matériels aux sollicitations dynamiques doivent tenir compte des accélérations qu'ils subissent. Ces accélérations doivent intégrer les mouvements sismiques dont la fréquence de coupure pour les planchers est de l'ordre de 30 à 50 Hz mais également des mouvements d'ébranlement consécutifs à l'impact d'un avion commercial (voir Figure 1). La fréquence de coupure de ce type de sollicitation peut être très supérieure, on peut alors parler de moyenne fréquence (40 à 100Hz).

Les méthodologies actuelles permettant d'évaluer les effets d'ébranlement d'une structure de génie civil reposent sur des analyses EF transitoires par intégration directe ou projection sur la base modale, rarement non linéaires. Les accélérations induites servent à établir les spectres de réponse d'oscillateurs simples. Dans les deux cas, pour parvenir à représenter de manière pertinente un contenu de moyenne fréquence, il convient de mettre en place un raffinement de maillage difficilement compatible avec la taille des modèles de ces structures de génie civil.



**Figure 1.** *Impact d'un avion commercial sur une installation nucléaire*

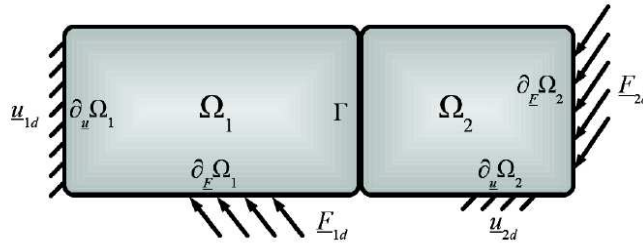
Une démarche découplée d'analyse, consistant à traiter dans une première phase les aspects non linéaires de la zone de choc par une étude la plus précise possible à l'aide de simulations aux éléments finis. Cela nous permet de distinguer la partie non linéaire de la zone impactée et d'en déduire un chargement temporelle (déplacements imposés) à appliquer au reste de la structure qui aura un comportement linéaire. A l'issue de cette étape, la mise en œuvre d'une méthode de traitement de l'ébranlement par l'utilisation de la TVRC (Théorie Variationnelle des Rayons Complexes) est

entreprise. Une description de cette théorie est détaillée dans la seconde partie de ce papier. Dans le cadre de la validation de la programmation de la TVRC, nous nous appliquerons à comparer dans une troisième partie quelques résultats de cas tests avec un calcul aux éléments finis.

## 2. Description de la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC)

Dans notre cas d'étude, le problème sera résolu dans le domaine fréquentiel et pour cela nous devons résoudre un problème de vibration forcée qui devra inclure les basses et moyennes fréquences. Nous utiliserons dans ce cas là la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes développée au LMT Cachan autour des travaux de l'équipe de P. Ladevèze [LAD 96, LAD 01, CHE 05, DOR 06].

Dans le but de simplifier la présentation, nous ne présentons le problème (voir Figure 2) que pour un assemblage de deux sous-structures  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (aisément généralisable à n sous-structures).



**Figure 2.** Problème de référence pour deux sous-structures

La structure est soumise aux forces  $\underline{F}_d$  imposées au bord  $\partial_{\underline{F}}\Omega = \partial_{\underline{F}}\Omega_1 \cup \partial_{\underline{F}}\Omega_2$  et aux déplacements  $\underline{U}_d$  imposés sur la partie complémentaire  $\partial_{\underline{U}}\Omega = \partial_{\underline{U}}\Omega_1 \cup \partial_{\underline{U}}\Omega_2$ . La densité d'efforts volumique  $\underline{f}_d$  est considérée comme nulle sur chaque sous-structure. Ici, l'interface  $\Gamma$  est considérée comme parfaitement rigide. En posant l'hypothèse des petites perturbations, les solutions en déplacements/contraintes sont  $(\underline{U}_1; \underline{\sigma}_1) \times (\underline{U}_2; \underline{\sigma}_2)$ .

Le premier ingrédient de la TVRC est une formulation faible globale des conditions aux limites écrites en efforts et en déplacements :

$$\mathcal{A} \left( \begin{matrix} |S_1 \\ |S_2 \end{matrix}, \begin{matrix} |\delta S_1 \\ |\delta S_2 \end{matrix} \right) = \mathcal{L} \left( \begin{matrix} |\delta S_1 \\ |\delta S_2 \end{matrix} \right), \quad \forall (\delta S_1, \delta S_2) \in \mathcal{S}_{ad,1}^0, \mathcal{S}_{ad,2}^0 \quad [1]$$

Avec :

$$\mathcal{A} \left( \begin{matrix} |S_1 \\ |S_2 \end{matrix}, \begin{matrix} |\delta S_1 \\ |\delta S_2 \end{matrix} \right) = \text{Re} \left\{ -i\omega \left[ \int_{\partial_{\underline{U}}\Omega_1} \delta \underline{\sigma}_1 \underline{n}_1 \cdot \underline{U}_1^* dS + \int_{\partial_{\underline{F}}\Omega_1} \underline{\sigma}_1 \underline{n}_1 \cdot \delta \underline{U}_1^* dS + \int_{\partial_{\underline{U}}\Omega_2} \delta \underline{\sigma}_2 \underline{n}_2 \cdot \underline{U}_2^* dS + \int_{\partial_{\underline{F}}\Omega_2} \underline{\sigma}_2 \underline{n}_2 \cdot \delta \underline{U}_2^* dS + \right. \right.$$

$$\mathcal{L} \left( \begin{matrix} \delta s_1 \\ \delta s_2 \end{matrix} \right) = \mathcal{Re} \left\{ -i\omega \left[ \int_{\partial_{\underline{u}}\Omega_1} \delta \underline{\sigma}_1 \underline{n}_1 \cdot \underline{U}_{1d}^* d\mathcal{S} + \int_{\partial_{\underline{F}}\Omega_1} \underline{F}_{1d} \cdot \delta \underline{U}_1^* d\mathcal{S} + \int_{\partial_{\underline{u}}\Omega_2} \delta \underline{\sigma}_2 \underline{n}_2 \cdot \underline{U}_{2d}^* d\mathcal{S} + \int_{\partial_{\underline{F}}\Omega_2} \underline{F}_{2d} \cdot \delta \underline{U}_2^* d\mathcal{S} \right] + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ \begin{matrix} (\delta \underline{\sigma}_1 \underline{n}_1 - \delta \underline{\sigma}_2 \underline{n}_2) \cdot (\underline{U}_1 - \underline{U}_2)^* \\ + (\underline{\sigma}_1 \underline{n}_1 - \underline{\sigma}_2 \underline{n}_2) \cdot (\delta \underline{U}_1 - \delta \underline{U}_2)^* \end{matrix} \right\} d\mathcal{S} \right\}$$

où  $\mathcal{Re}$  désigne la partie réelle d'une quantité complexe et \* son conjugué.

- Les parties rouges vérifient les déplacements imposés sur  $\Omega_1$
- Les parties vertes vérifient le chargement sur  $\Omega_1$
- Les parties violettes vérifient les déplacements imposés sur  $\Omega_2$
- Les parties bleus vérifient le chargement sur  $\Omega_2$
- La partie orange vérifie la condition sur  $\Gamma$

Elle est aussi fondée sur des approximations *a priori*, indépendantes des sous-structures. Les relations d'équilibre et de comportement sont satisfaites exactement sur chaque sous-structure  $\Omega_i$  pour former le sous-espace  $\mathcal{S}_{ad,i}$  :

$$\mathcal{S}_{ad,i} = \left\{ (\underline{U}_i; \underline{\sigma}_i) \in \mathcal{U}_i \times \mathcal{S}_i, \begin{cases} \text{div } \underline{\sigma}_i = -\rho_i \omega^2 \underline{U}_i & \text{dans } \Omega_i \\ \underline{\sigma}_i = \underline{K}_i : \underline{\varepsilon}(\underline{U}_i) & \text{dans } \Omega_i \end{cases} \right\} \quad [2]$$

Les opérateurs  $K_1 + (1+i\eta_1)K^{01}$  et  $K_2 + (1+i\eta_2)K^{02}$  sont les opérateurs de Hooke relatifs à chaque partie,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  leurs densités,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont l'amortissement structurel de chaque sous-domaine. On peut démontrer facilement que cette formulation variationnelle est équivalente au problème de référence.

Le second ingrédient de la TVRC est d'utiliser une approximation à deux échelles de  $(\underline{U}^h, \sigma^h)$ , qui a un fort contenu mécanique. Ainsi la solution est supposée être décrite localement comme la superposition d'un nombre infini de modes de vibration qui peuvent être écrit de la façon suivante :

$$\underline{U}(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{P}) = \underline{W}(\underline{X}, \underline{P}) \cdot e^{i\omega \cdot \underline{P} \cdot \underline{Y}} \quad [3]$$

$$\sigma(\underline{X}, \underline{Y}, \underline{P}) = \underline{C}(\underline{X}, \underline{P}) \cdot e^{i\omega \cdot \underline{P} \cdot \underline{Y}} \quad [4]$$

où  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  représentent le vecteur position.  $\underline{X}$  est associé aux variations lentes et  $\underline{Y}$  aux variations rapides.  $\underline{P}$  est un vecteur caractérisant le mode de vibration local. Afin que ces modes locaux  $(\underline{U}^h, \sigma^h)$  soient admissibles, ils doivent être dans  $S$  et satisfaire les conditions d'équilibre et de comportement. En cherchant des solutions sous forme d'ondes [3] on peut identifier 3 types de solutions qui sont relatives à la plaque, au bord de la plaque et au coin de celle-ci comme illustré à la Figure 3. Le déplacement de n'importe quel point de la sous-structure est ainsi généré à l'aide d'une base de rayon complexe définie par ces 3 types de solutions suivant toutes les

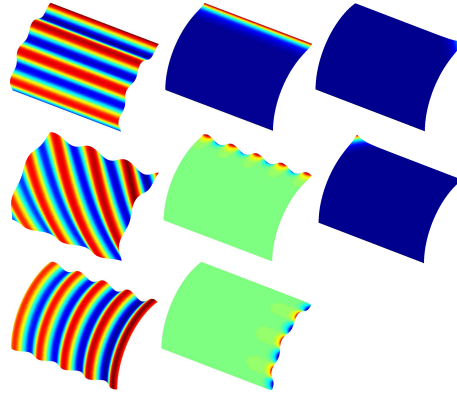
Calcul des vibrations induites par un impact sur une structure.

directions de propagation possibles. Les inconnues sont alors l'amplitude généralisée  $\underline{w}^h(\underline{X}, P)$  de chaque vecteur de la base ainsi obtenue.

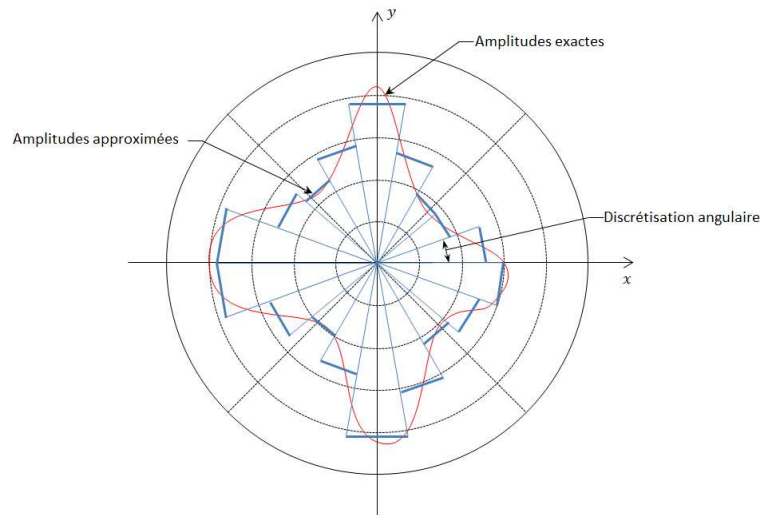
Toutes les directions de propagation devant être explorées, nous obtenons la forme intégrale suivante :

$$w(\underline{x}) = \int_{\varphi \in C_{int}} W_{int}^h(\underline{x}, \varphi) e^{k_{int}(\varphi) \cdot \underline{x}} d\varphi + \int_{\varphi \in C_{bord}} W_{bord}^h(\underline{x}, \varphi) e^{k_{bord}(\varphi) \cdot \underline{x}} d\varphi + \int_{\varphi \in C_{coin}} W_{coin}^h(\underline{x}, \varphi) e^{k_{coin}(\varphi) \cdot \underline{x}} d\varphi \quad [5]$$

Cette intégrale peut être discrétisée et on considère alors que l'amplitude approchée  $\underline{w}^h(\underline{X}, P(\varphi))$  est constante sur un secteur angulaire (Figure 4).



**Figure 3.** Modes intérieurs, de bord et de coin pour une plaque homogène.

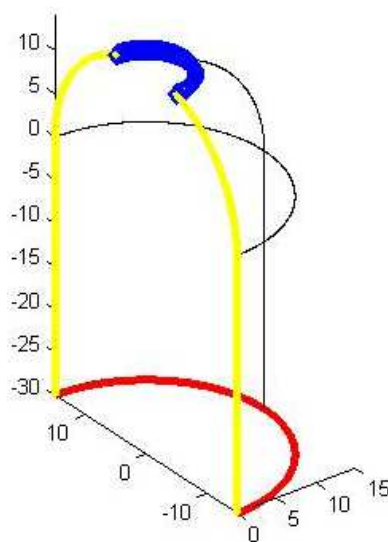


**Figure 4.** Amplitudes continues (rouge) et discrétisées (bleue).

### 3. Exemples numériques

Considérons un exemple de structure en béton avec les propriétés mécaniques suivantes : Module d'Young de  $34 \text{ GPa}$ , coefficient de Poisson de  $0,2$ , masse volumique de  $2500 \text{ kg/m}^3$  et un coefficient d'amortissement structural de  $0,04$ .

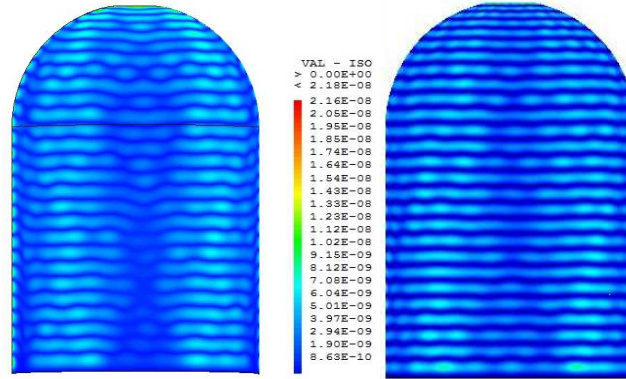
La structure est composée d'assemblage de « plaques » de  $0,15 \text{ m}$  d'épaisseur. Elle est chargée par un déplacement imposé perpendiculaire à la plaque à une fréquence de  $50 \text{ Hz}$  sur un de ces deux bords libres (ligne bleu sur la Figure 5), l'autre étant encasturé (ligne rouge). Une solution de référence est calculée à l'aide de CAST3M en considérant pour le maillage EF 15 éléments par longueur d'onde pour des questions de précision de la solution [OHA 98, ZIE 00].



**Figure 5.** Description du problème étudié.

La Figure 6 montre une comparaison entre la solution EF et la solution TVRC en terme de déplacement hors plan des plaques. Nous pouvons voir que la solution TVRC est très proche de la solution EF alors qu'elle a été obtenues avec beaucoup moins de DDL. On voit ici l'efficacité numérique de la méthode proposée.

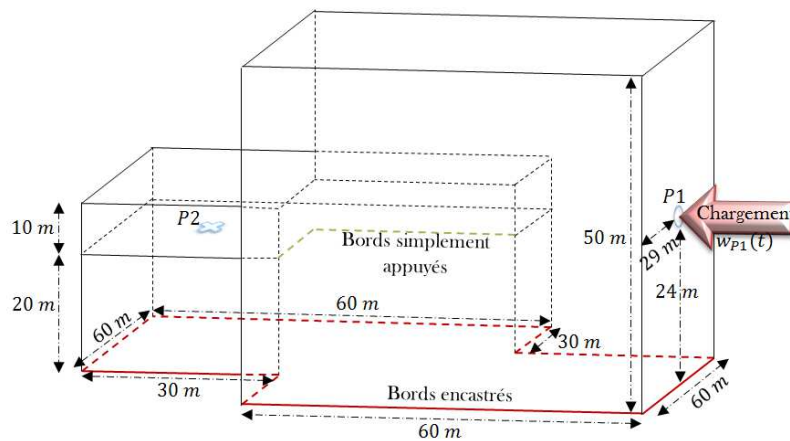
Calcul des vibrations induites par un impact sur une structure.



**Figure 6.** Solution EF (gauche) avec 36400 DDL comparée à la solution TVRC (droite) avec 1200 DDL.

Un deuxième exemple a été traité avec les mêmes propriétés en considérant cette fois ci un chargement temporel sur une des faces de la structure (voir Figure 7). Les lignes rouge et verte représentent les conditions aux limites de la structure, encastree et simplement appuyée respectivement.

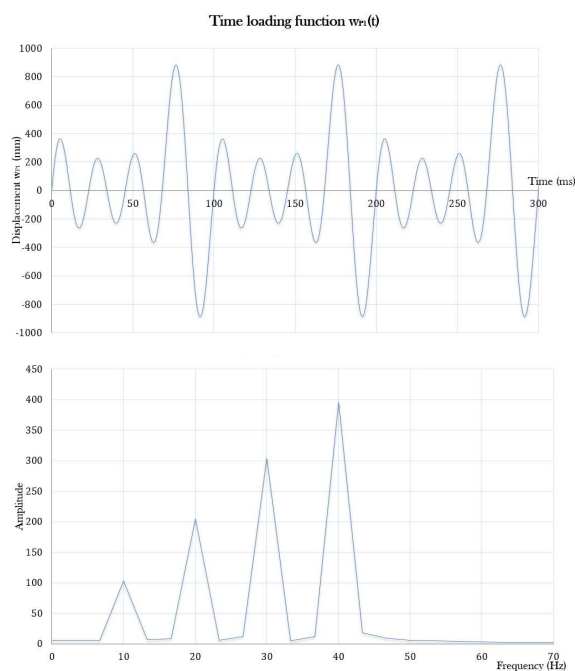
La stratégie numérique est alors la suivante. Nous commençons par calculer la FFT du chargement temporel pour obtenir les fréquences qui vont solliciter la structure. A l'aide de la TVRC nous pouvons calculer la réponse de celle-ci pour chaque fréquence sollicitant la structure. La réponse temporelle en un point donné (P2) est alors calculée en appliquant une  $FFT^{-1}$  aux réponses fréquentielles obtenues en ce point.



**Figure 7.** Structure BA impactée sur une face

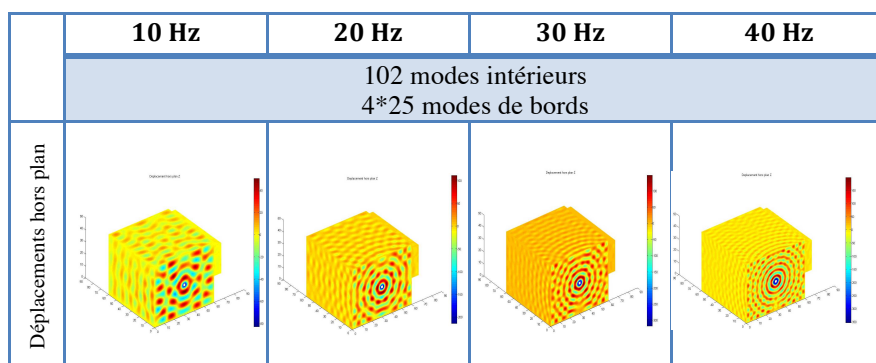


Considérons un chargement temporel académique de la forme suivante (Figure 8) qui permet de solliciter la structure avec 4 fréquences données (10, 20, 30 et 40 Hz) :



**Figure 8.** Chargement temporel appliqué et FFT associée

200 rayons (intérieurs et de bord) sont suffisants pour décrire correctement la réponse en fréquence (Figure 9). Les conditions aux limites sont bien vérifiées.



**Figure 9.** Réponse vibratoire de la structure aux quatre fréquences de sollicitation

Calcul des vibrations induites par un impact sur une structure.

La Figure 10 compare les temps de calcul obtenus avec un calcul aux EF réalisé avec CAST3M et la TVRC. Afin de comparer des choses comparables, seul les temps d'inversion de matrice ont été comptabilisés. La matrice de rigidité EF est réelle et symétrique mais de grande taille tandis que la matrice TVRC est complexe et non symétrique mais de taille réduite. On peut voir très nettement sur cette figure l'intérêt de la méthode proposée par rapport aux méthodes usuelle. C'est d'autant plus vrai à mesure que la fréquence augmente et que le maillage aux EF doit être de plus en plus fin pour correctement représenter les ondes tandis que la discrétisation TVRC reste la même.

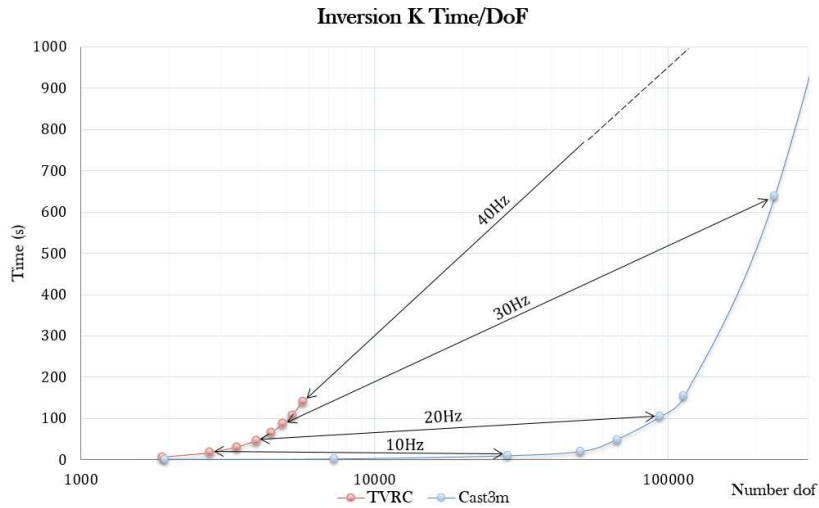


Figure 10. Comparaison des temps de calcul EF et TVRC

#### 4. Conclusions

Une nouvelle méthodologie a été présentée pour étudier le problème des vibrations induites dans une structure suite à un impact. Des comparaisons avec des solutions EF nous ont permis d'arriver aux conclusions suivantes. L'utilisation de la TVRC conduit à une solution riche en contenu fréquentiel avec peu de DDL contrairement à un calcul aux éléments finis. Le processus complet FFT-TVRC-FFT<sup>-1</sup> est une solution efficace et précise pour résoudre un problème d'impact temporellement long.

## 5. Références

- [LAD 96] LADEVEZE P., « A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range. », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIB.*, 332(12), pp 849-856, 1996.
- [LAD 01] LADEVEZE P., ARNAUD L., ROUCH P. and BLANZE C., « The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations », *Engineering Computations*, Vol. 18, pp 193-214, 2001.
- [CHE 05] CHEVREUIL M., « Sur une nouvelle approche en calcul dynamique transitoire, incluant les basses et les moyennes fréquences », PhD thesis, ENS Cachan, 2005.
- [DOR 06] DORIVAL O., «Vers la modélisation et le recalage des liaisons sur les structures en vibrations moyennes fréquences.», PhD thesis, ENS Cachan, 2006.
- [OHA 98] OHAYON R., SOIZE C., « Structural acoustics and vibrations. » Academic Press. 1998.
- [ZIE 00] ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R., « The finite element method. », Butterworth-Heinemann, 5th édition, 2000.