Une version sous-structurée de la TVRC pour le traitement de liaisons dissipatives variées en moyennes fréquences

Olivier Dorival, Philippe Rouch, Olivier Allix

▶ **To cite this version:**

Olivier Dorival, Philippe Rouch, Olivier Allix. Une version sous-structurée de la TVRC pour le traitement de liaisons dissipatives variées en moyennes fréquences. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. 6 p. hal-01023403

HAL Id: hal-01023403
https://hal.science/hal-01023403

Submitted on 16 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une version sous-structurée de la TVRC pour le traitement de liaisons dissipatives variées en moyennes fréquences

Olivier Dorival, Philippe Rouch & Olivier Allix

École Normale Supérieure de Cachan
LMT Cachan
61 avenue du Président Wilson 94235 CACHAN Cedex
dorival@lmt.ens-cachan.fr

Résumé :

Dans le domaine des vibrations moyennes fréquences, le comportement des structures est gouverné par l'amortissement qui, dans le cas d'assemblages de sous-structures est le plus souvent localisé dans les liaisons. La description du modèle de jonction dans ce domaine n'étant pas figée, il est intéressant de pouvoir disposer d'une méthode permettant de changer aisément la description des liaisons, notamment en vue de l'identification d'un modèle ad hoc. Ce travail est dédié à la prise en compte aisée de modèles de liaisons complexes en moyennes fréquences : masse, raideur, amortissement hétérogènes. L'outil utilisé pour un calcul moyennes fréquences efficace est la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC), qui, outre le très faible coût de calcul auquel elle conduit, met l'accent sur les jonctions entre sous-structures. Afin de tirer pleinement parti de cette aspect liaison, une version sous-structurée de la TVRC est présentée, dans lequel des modèles de liaisons élaborés sont introduits.

Abstract :

The response of structures under medium frequency vibration load strongly depends on the dissipative phenomena, which, in the case of assemblies, are localized, for the main part, in the joints between substructures. Their modelization is not definitively established, and it is interesting to use a method allowing to easily change de joints models, in order to identify them. This paper is dedicated to a commode strategy to compute different complex joints (including heterogeneous stiffness, mass and damping) in medium frequency vibrations. We use the Variational Theory of Complex Rays (VTCR), which, besides its very low computational cost, emphasizes the modelization of joints between substructures. In order to get the best of this formulation, a substructured version of the VTCR is derived, and elaborate joints model are implemented.

Mots-clefs :

Moyennes Fréquences, TVRC, Sous-Structuration, Liaisons Hétérogènes, Amortissement

1 Introduction

Le comportement vibratoire d'une structure dans le domaine des moyennes fréquences dépend beaucoup des phénomènes dissipatifs, qui sont principalement gouvernés par les conditions de transmission entre les sous-structures. Pour des structures industrielles, ces jonctions - soudures, rivets, boulons - sont très difficiles à modéliser et à identifier[1]. De plus, dans ce domaine de fréquence, la densité modale rend la solution très sensible aux défauts et aux conditions aux limites. Pour affronter ces problèmes, notre stratégie passe par l'utilisation de la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes (TVRC)[2]. Cette méthode adopte une vision par sous-structure, et met ainsi l'accent sur la prise en compte des liaisons à travers l'utilisation d'une formulation variationnelle de toutes les conditions aux limites. Ainsi des modèles élaborés de jonctions peuvent être introduits aisément. Le second ingrédient de cette stratégie est l'utilisation de fonctions de base à fort contenu mécanique, à deux échelles, qui permet

une analyse à très faible coût. Ce n'est pas le cas des méthodes éléments finis qui sont forcées d'adapter la taille du problème à la fréquence de l'étude[3], ce qui conduit à des coûts prohibitifs dans ce domaine de fréquence. C'est pourquoi de nombreux travaux visent à enrichir ces méthodes[4].

La formulation utilisée dans la version classique de la TVRC couple l'ensemble des conditions aux limites et de transmission entre les sous-structures[5], ce qui rend difficile la modification d'un modèle de liaison, par exemple dans le contexte de l'identification. Pour permettre de contourner cette difficulté, nous présentons ici une version sous-structurée de la TVRC, fondée sur la séparation entre interfaces et sous-structures. Un exemple montre le potentiel de la méthode pour introduire dans la TVRC des modèles fins de jonctions.

2 Une version sous-struturée de la TVRC

2.1 Problème modèle

Pour simplifier la présentation, on considère le problème modèle d'une structure composée de deux plaques de Kirchhoff-Love S_1 et S_2, minces, élastiques, isotropes, assemblées le long de l'interface Γ_{12}, dont on étudie les vibrations forcées à une fréquence ω. Sur une partie $\partial_{M^d}S_j$ et $\partial_{T^d}S_j$ de leurs frontières ∂S_1 et ∂S_2 sont imposées des quantités statiques (moment fléchissant, effort tranchant) M_j^d et T_j^d, et sur les parties $\partial_{w^d}S_j$ et $\partial_{w_{\underline{n}}^d}S_j$ sont imposées des quantités cinématiques (flèche, rotation) w_j^d et $w_{\underline{n},j}^d$ (voir Figure (1)).

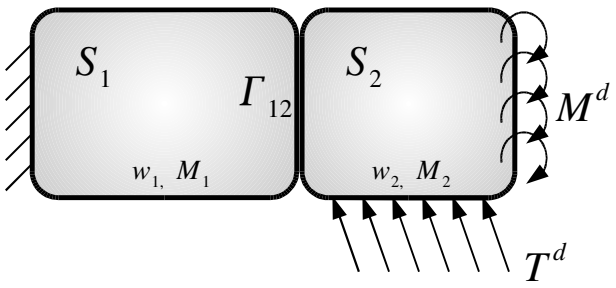

FIG. 1 – Problème modèle.

Notations. Pour $j = 1, 2$, on construit l'espace $\mathcal{S}_{ad}^j$ des couples (flèche-moment fléchissant) admissibles sur S_j, c'est à dire vérifiant l'équation d'équilibre dynamique locale, et la relation de comportement de la sous-structure S_j, soit :

$$s_j = (w_j,\, \mathbf{M}_j) \in \mathcal{S}_{ad}^j \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} w_j \in \mathcal{U} \quad (\text{déplacements à énergie finie } H^1_{(S)}) \\ \mathbf{M}_j \in \mathcal{S} \quad (\text{moments à énergie finie } [L^2_{(S)}]^3) \\ \Delta\Delta w_j - k_j^4 w_j = 0 \quad \text{on } S_j \\ \mathbf{M}_j = \dfrac{2h_j^3}{3}(1+i\eta_j)\,\mathbf{K}_{j,\,PS}\,\mathcal{X}(w_j) \end{cases} \tag{1}$$

où $k_j^4 = \dfrac{3\rho_j\omega^2(1-\nu_j^2)}{(1+i\eta_j)E_jh_j^2}$ est le nombre d'onde de la plaque j, $\mathbf{K}_{j,\,PS}$ est l'opérateur de Hooke en contraintes planes, et $\mathcal{X}$ est l'opérateur de courbure.

2.2 Version sous-structurée de la TVRC

La TVRC propose de construire des fonctions de forme admissibles, c'est à dire appartenant à $(\mathcal{S}_{ad}^{j},\ \forall j)$. Cette étape est abordée plus loin. La solution approchée est ensuite obtenue au moyen d'une formulation variationnelle ad hoc[2] portant sur les conditions aux limites et d'interface, ce qui est adapté la prise en compte de modèles connus de liaisons. Toutefois elle couple l'ensemble des conditions aux limites de toutes les sous-structures, ce qui présente un manque de souplesse dans le cadre de l'identification ou de l'amélioration des modèles de liaisons. Pour briser cette globalité nous proposons ici une version "sous-structurée" de la TVRC. Cette reformulation repose sur l'isolement des interfaces entre sous-structures (voir Figure (2)). A cette fin, la structure est décomposée en sous-structures et interface Γ_{12}, lequel possède ses propres grandeurs $\overline{\overline{M_j}}$ et $\overline{\overline{w_j}}$. On commence par écrire la compatibilité sous-structure/interface ; on résout ensuite le problème entier comprenant le modèle d'interface.

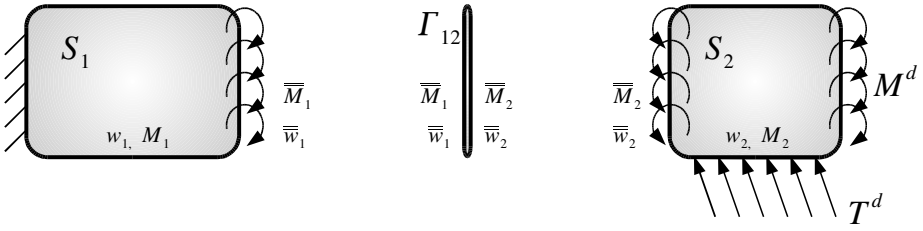

FIG. 2 – Version sous-structurée de la TVRC.

2.2.1 Compatibilité sous-structures/interface

Cette étape consiste à assurer la compatibilité des grandeurs d'interface $\overline{\overline{M_j}}$ et $\overline{\overline{w_j}}$ avec celles de la sous-structure S_j correspondante. Plusieurs approches sont possibles ; nous avons choisi de privilégier une approche basée sur la condensation des quantités des sous-structures, dans laquelle $\overline{\overline{M_j}}$ est imposé sur le bord Γ_{12} de S_j. Ce problème est résolu par la version classique de la TVRC : il s'agit d'une formulation globale des conditions aux limites à la fois en terme d'efforts et de déplacements, à travers l'équilibre global des puissances virtuelles aux limites de la sous-structure, qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_e\Big\{ -i\omega \Big(& -\textstyle\int_{\partial_{w^d}S_j} \delta T_j\,(w_j - w_j^d)^*\,dL + \int_{\partial_{w^d_{\underline{n}}}S_j} \delta M_j\,(w_{j,\underline{n}_j} - w^d_{j,\underline{n}_j})^*\,dL \\ & + \textstyle\int_{\partial_{M_d}S_j} (M_j - M_j^d)\,\delta w^*_{j,\underline{n}_j}\,dL - \int_{\partial_{K^d}S_j} (T_j - T_j^d)\,\delta w_j^*\,dL\Big) \\ & + \textstyle\int_{\Gamma_{12}} (M_j - \overline{\overline{M}}_j)\,\delta w^*_{j,\underline{n}_j}\,dL\Big) \Big\} = 0\end{aligned} \tag{2}$$

d'où on obtient la quantité cinématique d'interface $w_{j,\underline{n}_j}$ qui doit être égale à la quantité $\overline{\overline{w}}_{j,\underline{n}_j}$ de la sous-structure. Ainsi l'admissibilité sous-structure/interface $\mathcal{S}_{ad}^{\Gamma,j}$ s'écrit :

$$\overline{\overline{s}}_j = (\overline{\overline{w}}_{j,\underline{n}_j},\ \overline{\overline{M}}_j) \in \mathcal{S}_{ad}^{\Gamma,j} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{\overline{w}}_{j,\underline{n}_j} = f_j(\overline{\overline{M}}_j) + g_j^d \tag{3}$$

où g_j^d provient des conditions aux limites imposées sur ∂S_j, et f_j résulte de la condensation sur Γ_{12} des quantités de la sous-structure. Cette formulation des conditions aux limites étant

faible, on peut se demander si la prise en compte de modèles fins de liaison grâce à cette méthode est possible. L'exemple présenté dans la suite permettra de valider la méthode.

2.2.2 Problème final

Les équations restant à vérifier sont celles de l'interface. Par exemple dans le cas d'une jonction parfaitement rigide on a :

$$\begin{array}{lll} \text{- Compatibilité} & \overline{\overline{w}}_{1,\underline{n}_1} & = \overline{\overline{w}}_{2,\underline{n}_2} \\ \text{- Equilibre} & \overline{\overline{M}}_1 + \overline{\overline{M}}_2 & = 0 \end{array} \tag{4}$$

Pour les vérifier, on cherche les fonctions de $\mathcal{S}_{ad}^{\Gamma,j}$ minimisant un résidu $E^2_{Interface}$ de ces équations. Une fois les fonctions de forme et les quantités d'interface discrétisées, le problème est donc écrit sous la forme d'une minimisation sous contraintes d'une forme quadratique ; la prise en compte de l'admissibilité sous-structure/interface sera résolue par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange.

$$\begin{array}{c} \text{Trouver } \overline{\overline{s}}_j = (\overline{\overline{w}}_{j,\underline{n}_j}, \overline{\overline{M}}_j) \in \mathcal{S}_{ad}^{\Gamma,j}, \quad \forall j, \quad \text{minimisant :} \\ E^2_{Interface} = \int_{\Gamma_{12}} \|\overline{\overline{w}}_{1,\underline{n}_1} - \overline{\overline{w}}_{2,\underline{n}_2}\|^2 dL + g \int_{\Gamma_{12}} \|\overline{\overline{M}}_1 + \overline{\overline{M}}_2\|^2 dL \end{array} \tag{5}$$

où g permet d'adimesionner les termes. Les contraintes de minimisation des sous-structures sont ainsi assemblées une fois pour toutes, et seule l'écriture du résidu change avec les équations de liaison, ce qui assouplit la modification du modèle en vue d'une démarche d'identification.

2.3 Fonctions de forme

Les fonctions de forme sont recherchées dans l'espace $\mathcal{S}_{ad}^{j}$ sous forme de la superposition de modes à deux échelles : $w_{j\,(\underline{X},\underline{P})} = e^{i\sqrt{\omega}\underline{P}.\underline{X}}\, U_{j\,(\underline{X},\underline{P})}$ où $\underline{P}$, caractéristique du mode de vibration, est choisi de façon à vérifier à la fois la relation de comportement et l'équation d'équilibre local. $e^{i\sqrt{\omega}\underline{P}.\underline{X}}$ constitue la partie rapide de la vibration, qui est connue explicitement, tandis que $U_{j\,(\underline{X},\underline{P})}$ est la partie lente, et devient l'inconnue. Dès lors, la discrétisation qui portera uniquement sur la partie lente conduira à une taille de problème très réduite, et indépendante de la fréquence. La Figure (3) montrent de tels modes concernant la zone intérieure ou la zone bord d'une sous-structure. Pour résoudre le problème de façon numérique, cet espace admissible sera discrétisé en prenant en compte toutes les directions de propagation possibles pour les rayons.

3 Prise en compte de modèles hétérogènes de liaison

3.1 Modèles de liaisons hétérogènes

Afin de donner des simulations réalistes du comportement d'une jonctions, des modèles précis de liaisons ont été incorporés à la TVRC. Les modèles proposés intègrent en effort tran-

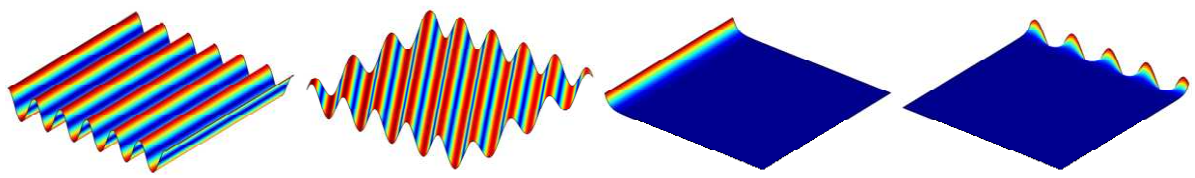

FIG. 3 – Fonctions admissibles au sens de la TVRC.

chant et en flexion des raideurs k_t et k_f, masse m et inertie J, et amortissements η_t et η_f. Chacun de ces paramètres est une quantité distribuée sur l'interface, et peut donc être non constante, de façon à simuler une liaison hétérogène, par exemple boulonnée, rivetée, etc :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{1}{2}(-T_j+T_k) & = & -k_t(1+i\eta_t)(w_j-w_k) & \text{Relation de comportement,} \\ T_j+T_k & = & -\frac{\omega^2 m}{2}(w_j+w_k) & \text{Equilibre dynamique} \\ \frac{1}{2}(-M_j+M_k) & = & -k_f(1+i\eta_f)(w_{j,\underline{n}_j}-w_{k,\underline{n}_k}) & \text{Relation de comportement} \\ M_j+M_k & = & -\frac{J\omega^2}{2}(w_{j,\underline{n}_j}+w_{k,\underline{n}_k}) & \text{Equilibre dynamique} \end{array}\right. \quad (6)$$

qui permettent de construire le résidu suivant :

$$\begin{array}{rcl} E^2_{Interface} = & g_1 \int_{\Gamma_{12}} \|\frac{1}{2}(-T_j+T_k)+k_t(1+i\eta_t)(w_j-w_k)\|^2 dL \\ + & g_2 \int_{\Gamma_{12}} \|T_j+T_k+\frac{\omega^2 m}{2}(w_j+w_k)\|^2 dL \\ + & g_3 \int_{\Gamma_{12}} \|\frac{1}{2}(-M_j+M_k)+k_f(1+i\eta_f)(w_{j,\underline{n}_j}-w_{k,\underline{n}_k})\|^2 dL \\ + & g_4 \int_{\Gamma_{12}} \|M_j+M_k+\frac{J\omega^2}{2}(w_{j,\underline{n}_j}+w_{k,\underline{n}_k})\|^2 dL \end{array} \quad (7)$$

La Figure (4) montre la modélisation et le calcul d'une telle liaison, dans lequel l'encastrement, sur un des cotés de la plaque, est boulonné : la raideur est modélisée de façon discontinue le long de la jonction.

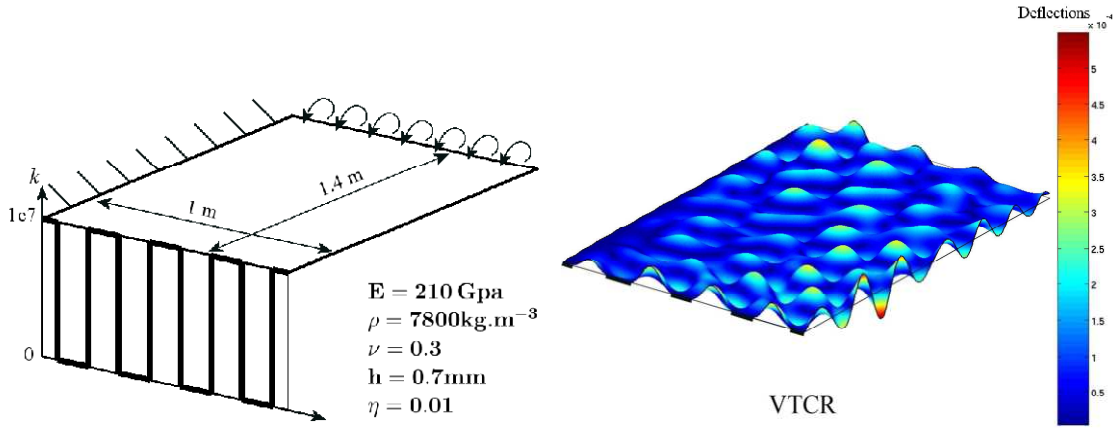

FIG. 4 – Modélisation et calcul d'une interface hétérogène.

3.2 Comparaison avec un code de calcul EF

Pour valider l'approche précédente, un comparaison avec un code de calcul élément finis a été réalisée. La structure précédente a été calculée à la fois avec la TVRC en utilisant 256 d.d.l., et avec NASTRAN, ce qui nécessite 82863 d.d.l. pour avoir dix éléments par longueur d'onde afin de représenter correctement la vibration. La carte des déplacements normaux est présentée sur la Figure (5). Les valeurs maximales obtenues sont correctes : $5.26\,10^{-4}\,m$ avec la TVRC, et $4.96\,10^{-4}\,m$ avec NASTRAN, ce qui représente une différence de $6\,\%$.

Ce calcul permet de valider la méthode sur deux points : tout d'abord la version sous-structurée donne les bons résultats - comme la version classique de la TVRC - tout en fournissant une commodité au niveau de la modélisation des liaisons tout à fait intéressante pour les perspectives à venir. Ensuite il montre que la prise en compte de modèles fins de liaisons, étape nécessaire à des simulations réalistes, est tout à fait envisageable par cette méthode malgré la résolution des conditions de transmission par une formulation variationnelle.

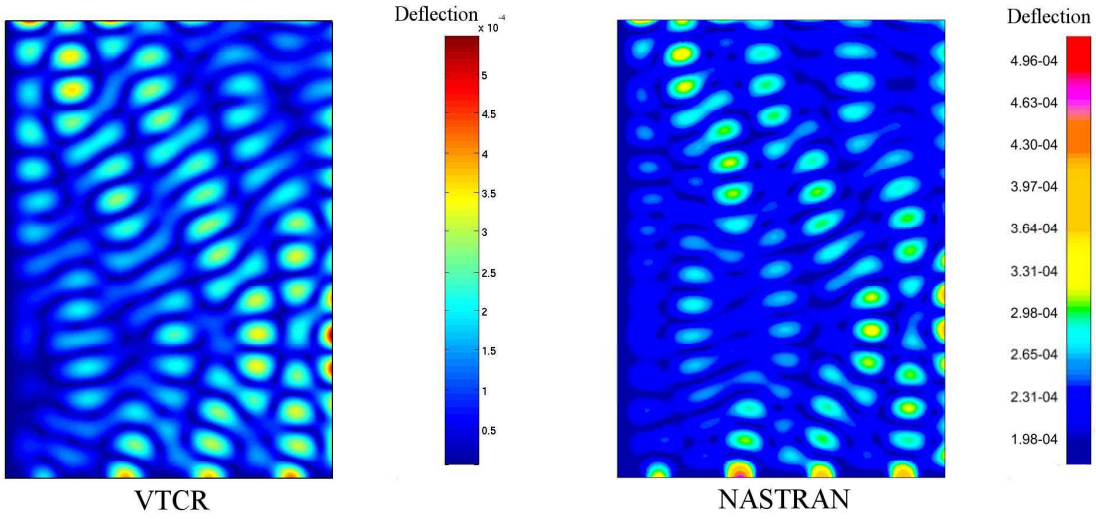

FIG. 5 – Comparaison avec NASTRAN ($245\ Hz$) : (a) solution TVRC, (b) solution NASTRAN.

4 Conclusion

La Théorie Variationnelle des Rayons Complexes est une approche prédictive dédiée au calcul des vibrations dans le domaine des moyennes fréquences. Ses spécificités permettent d'effectuer, avec un coût très réduit, l'analyse d'une structure incluant des liaisons complexes et dissipatives, susceptibles de représenter un comportement réel, ce qui est un enjeu majeur pour la simulation d'une structure de taille industrielle. La version sous-structurée présentée ici permet d'apporter une facilité supplémentaire pour le traitement de ces liaisons. Dans des travaux futurs, les avantages de cette formulation seront pleinement utilisés pour mener à bien l'identification des paramètres de liaison à partir d'essais expérimentaux.

Références

[1] O. Dorival P. Rouch and O. Allix. A substructured version of the variational theory of complex rays dedicated to dissipative joint computations. *Engineering Computations*, Submited.

[2] P. Ladevèze L. Arnaud P. Rouch and C. Blanzé. The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations. *Engineering Computations*, 18(1/2) :193–214, 2001.

[3] A. Deraemaeker I. Babuska and P. Bouillard. Dispersion and pollution of the fem solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 46 :471–499, 1999.

[4] C. Farhat I. Harari and L. P. Franca. A discontinuous finite element method for the helmholtz equation. Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS), Barcelona, Spain, September 11-14, 2000.

[5] P. Rouch and P. Ladevèze. The variational theory of complex rays : a predictive tool for medium-frequency vibrations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 192 :3301–3315, 2003.