



Génération de modèles pour la synthèse modale

Pirouz Djoharian

► To cite this version:

Pirouz Djoharian. Génération de modèles pour la synthèse modale. Colloque Modèles physiques, 1990, Grenoble, France. pp.119-146. hal-01022588

HAL Id: hal-01022588

<https://hal.science/hal-01022588>

Submitted on 10 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GENERATION DE MODELES POUR LA SYNTHESE MODALE

Pirouz DJOHARIAN

ACROE - LIFIA

INPG - 46 av. Félix Viallet - 38000 Grenoble - France

RESUME

Dans le cadre de la synthèse sonore par modèle physique, la modélisation modale des systèmes vibrants s'introduit comme un pont entre la représentation structurelle (géométrie / mécanique) des objets et leurs propriétés perceptuelles. Nous abordons ici le problème de la construction des modèles modaux à l'intérieur d'un outil de création musicale par ordinateur. L'outil doit permettre au musicien, en s'appuyant sur son appréhension physique des objets sonores, de créer, à l'intérieur du champ d'expérimentation qui lui est offert, ses modèles modaux. En d'autres termes, il faut disposer d'autres procédés de construction que ceux utilisant des mesures sur des objets matériels concrets (tests modaux) ou ceux fondés sur l'analyse d'une abstraction mathématique de ces objets.

Un moyen naturel de générer des modèles complexes à partir des modèles plus simples est l'assemblage des objets représentés par des liaisons visco-élastiques. Ici se pose le problème du calcul du modèle de l'objet assemblé connaissant les modèles des composants. Certains types d'assemblage, que l'on qualifiera d'orthogonaux, sont compatibles avec la structure modale des modèles de base. Ceci permet d'évaluer simplement les perturbations introduites par l'assemblage sur chacun des modèles et de calculer directement le modèle résultant. Il est possible de combiner additivement plusieurs assemblages ; l'utilisateur peut donc expérimenter les assemblages orthogonaux par combinaisons des éléments d'une base. Il peut ainsi explorer, avec un certain degré d'abstraction, des combinaisons variées de modes des deux structures assemblées.

Une extension naturelle consiste à considérer des complexes de modèles assemblés deux à deux orthogonalement. Cette extension permet, entre autres, d'obtenir des modèles représentant des structures fibrées.

ABSTRACT

In sound synthesis by physical models, the modal modelisation of vibrating systems is one way to bridge the structural (geometric/mechanical) representation of the objects and their perceptual properties. In this instance, we shall be tackling the problem of constructing modal models as part of a computer musical creation tool. The musician should be able to use the latter to create his own modal models from his physical appropriation of sound objects within the experimentation field that is open to him. In other words, other construction procedures must be available than those using measurements on concrete material objects (i.e. modal testing), or those based on the analysis of a mathematical abstraction of these objects.

A natural means of generating complex models from simpler ones is assembling the represented objects by visco-elastic liaisons. The problem here is how to calculate the assembled object model from component models. Some assembly types, that we shall qualify as orthogonal, are compatible with the modal structure of the basic models. This enables simple evaluation of the perturbations introduced by assembly onto each of the models and to directly calculate the resultant model. It is possible to additively combine several assemblies; the user can therefore experiment with several orthogonal assemblies by combinations of the elements of a basis, and in this way he can explore varied combinations of the modes of the two assembled structures.

A natural extension consists in considering complexes of models assembled two by two orthogonally. Amongst other things, this extension enables models representing fibred structures to be obtained.

I - CONTEXTE GLOBAL ET MOTIVATIONS GENERALES

Ce travail se situe dans le cadre de la conception et la réalisation d'un outil de création musicale par ordinateur [Cadoz 1988]. En particulier, il s'agit de créer, par la synthèse, des sons musicaux, tout en restituant à l'utilisateur musicien les différents aspects auditifs et sensori-moteurs du jeu instrumental. Cette exigence nous conduit naturellement à recourir à la synthèse par modèle physique. L'universalité des lois physiques et la neutralité de l'ordinateur permettent d'envisager une certaine universalité de l'outil, au-delà d'une référence à un contexte idiomatique particulier.

Le modèle physique pour la synthèse sonore se justifie non seulement par son aptitude à restituer des interactions physiques entre le musicien et l'instrument, mais aussi parce qu'il réintroduit l'axe de la *référence* dans la création musicale par ordinateur [Cadoz 1989]. Le musicien peut ainsi, par référence à son appréhension de l'univers des objets sonores concrets, construire des sons, en décrivant à l'aide d'un certain langage les objets qui les produiront. Ce langage de description est spécifique à un système de modélisation donné des systèmes vibrants SV. Dans ce cadre, la *modélisation modale* s'introduit comme un pont entre la représentation structurelle (géométrique et dynamique) des objets SV et leurs propriétés perceptuelles.

Globalement, un modèle modal (cf. II - 2) est une boîte fermée ("la chambre modale") contenant un ensemble d'oscillateurs harmoniques amortis, munie d'une fenêtre prismatique de changement de repère géométrique. Les oscillateurs représentent les modes vibratoires et la fenêtre les déformations d'un objet vibrant modélisé. Cette décomposition des objets en oscillateurs élémentaires permet de transposer l'analyse de Fourier de la vibration (l'effet) au niveau de la structure qui en est le siège (la cause). Nous verrons dans la suite que les modèles modaux présentent d'autres avantages qui apparaissent dans le domaine opératoire de la simulation sur ordinateur.

Un dispositif de conception et de construction d'objets sonores virtuels ne répond au critère d'outil de création que s'il offre un champ de possibilités, structuré par ses propres systèmes et lois internes, à l'intérieur duquel le musicien puisse explorer l'univers sonore ; ces lois doivent se définir, entre autres, conformément aux lois universelles de la mécanique. Le caractère "physique" de ces modèles permet alors de munir ce champ d'un repère bidimensionnel (référence, artifice).

A partir de là, l'univers des modèles, c'est-à-dire celui des "objets modaux", peut acquérir une certaine autonomie par rapport à l'univers des SV, donnant ainsi au créateur une autonomie et une liberté par rapport au physicien ou à l'ingénieur. Il faut donc que l'outil dispose d'un système de production d'objets régi par une logique interne (de création), allant au-delà des procédés utilisant des mesures sur des objets concrets ou ceux fondés sur l'analyse d'une abstraction mathématique de ceux-ci.

Dans cette optique, nous abordons ici le problème de génération de modèles modaux. Nous passerons en revue diverses possibilités en nous attardant spécialement sur la notion de génération par assemblage (i.e. construction d'objets complexes à partir d'objets plus simples). Nous mettrons en évidence un caractère particulier de certains assemblages que l'on qualifiera d'"orthogonaux". Cette notion se justifie à la fois par des considérations calculatoires, conceptuelles ou même, on le suppose, perceptuelles.

La suite de l'article est ainsi organisée :

- La partie B est une discussion générale sur les modèles modaux et la synthèse modale. Nous soulignerons le problème de l'existence du modèle modal associé à un objet SV. Nous concluerons alors par un rappel sur la synthèse modale, un algorithme de simulation des objets SV.
- La partie C traite du problème de la génération formelle de modèles modaux. Nous définirons d'abord la propriété d'orthogonalité pour les assemblages de modèles, en donnant une expression simple du modèle résultant, ensuite nous discuterons du problème d'existence et de caractérisation des liaisons orthogonales en termes de modes "équilibrés". Cette dernière section se termine par une extension de l'assemblage binaire à un ensemble quelconque de composants. Nous présenterons au passage un algorithme de diagonalisation de matrice, inspiré de celui de Jaccobi, permettant de traiter les matrices diagonales par blocs qui se présentent lors de l'analyse de telles structures. Une application particulière des complexes orthogonaux de modèles est la construction simple de modèles de structures fibrées, pour lesquelles il est possible d'exprimer directement les caractéristiques du modèle résultant en fonction de celles des composants.

Signalons que cette discussion ne concerne que la modélisation des systèmes vibrants. En effet, pour produire du son un système vibrant doit être sollicité par un excitateur (percussion, pincement, etc). Pour une étude globale de la modélisation des mécanismes instrumentaux on pourra consulter [Cadoz & Florens 1990].

II - MODELISATION DE LA STRUCTURE VIBRANTE ET SYNTHESE MODALE

La structure vibrante désigne un objet rigide déformable qui par ses attributs d'inertie et d'élasticité est le siège de vibrations (oscillations autour d'une position d'équilibre stable). La viscosité de l'objet provoque l'amortissement de cette vibration. D'autres attributs structurels (forme, répartition spatiale) interviennent dans la nature de celle-ci. On exclut ici les dissipations non-visqueuses.

1 - L'objet matériel et ses modélisations

Appelons "univers des modèles physiques" (de la structure vibrante) l'ensemble des objets mathématiques modélisant structurellement les objets de référence. Parmi ces modèles certains soulignent la structure intrinsèque de l'objet de référence tandis que d'autres mettent en avant la fonctionnalité vibratoire de celui-ci. Nous énumérons ici, dans l'ordre de cette fonctionnalité croissante, les principaux types de modèles que l'on peut associer à un objet de référence (cf Figure 5).

- les modèles non-finis : le qualificatif non-fini deviendra plus clair par la suite, par opposition aux types qui suivent ; ce type de modèle considère l'objet plongé dans un espace tridimensionnel et utilise le formalisme de la mécanique des milieux continus. Il représente ses propriétés géométriques (par exemple sa continuité spatiale) et physiques

par des champs de tenseurs de déformation et de contrainte, ainsi que sa masse volumique. Une équation différentielle aux dérivées partielles reliant ces fonctions décrit l'évolution des différents points de l'objet. En dehors des cas simples, ces modèles ne sont pas opératoires pour les calculs effectifs et donc pour la synthèse numérique. Ceci est dû à la complexité de l'information mathématique qu'ils comportent.

- les modèles finis : on entend par là que le modèle décrit l'objet avec un nombre fini (qui peut être très grand) de degré de liberté. En effet, une approximation permet de représenter l'état de l'objet par un système fini de coordonnées holonomes p . Si on décrit les caractéristiques physiques de l'objet à l'aide des fonctions d'énergie cinétique T , de potentiel V et de la fonction de dissipation D , l'équation lagrangienne du mouvement s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p'_i}{\partial p'_i} T + \frac{\partial p_i}{\partial p'_i} V + \frac{\partial p'_i}{\partial p'_i} D = F_i$$

où F_i est une force extérieure et p'_i désigne la vitesse de déplacement selon la coordonnée d'indice i . Dans le cas des vibrations à faibles amplitudes, par linéarisation autour de la position d'équilibre, cette équation se ramène à l'équation matricielle :

$$M p'' + Z p' + K p = F \quad (1)$$

les matrices M , Z et K étant symétriques et représentant respectivement l'inertie, la viscosité et l'élasticité du système. La matrice M est toujours non-dégénérée définie positive, alors que K et Z sont définies non-négatives. Ce type de modèle se prête plus simplement au calcul effectif et à la simulation. Parmi ces modèles on peut distinguer trois types particuliers :

- Le modèle spatial discret : on peut présenter ce type de modèle comme une approximation spatialement discrète des objets continus. En effet, un tel modèle est constitué à partir de combinaisons des éléments structuraux de base : masse ponctuelle, ressort et frein sans masse. L'objet est représenté par un réseau de n points matériels reliés par des liaisons visco-élastiques (liaisons internes) ; chaque masse est également reliée à un point fixe de l'espace par une liaison (externe). En relation avec l'équation linéaire (1), pour interpréter les matrices K et Z comme des matrices d'interconnexion, on peut représenter l'objet comme un réseau mécanique où les nœuds sont les masses ponctuelles et les arêtes des ressorts et freins en parallèles.

La donnée d'un tel réseau équivaut alors à la donnée de :

- n masses
- n positions d'équilibre O_i
- $n(n+1)/2$ ressorts et freins caractérisés par leurs constantes de raideur et de frottement k et z , des réels positifs ou nuls.

Pour donner plus de réalisme physique à cette représentation, on peut aussi munir chaque ressort d'une longueur à vide l_0 et introduire par là un coefficient de précontrainte $n = 1 - l_0/l$ où l est sa longueur à l'équilibre.

Après la linéarisation, les forces élastiques et visqueuses de cette liaison s'écrivent en fonction du déplacement relatif d des extrémités de la façon suivante :

$$f_{elas} = - [k (1 - n) p(d) + k n d]$$

$$f_{visq} = - z p(d)$$

où $p(d)$ est la projection orthogonale du vecteur d sur l'axe défini par les positions d'équilibre. L'équation du mouvement est une équation matricielle du type (1) où la matrice M est une matrice diagonale d'ordre $3n$. Ajoutons que les coefficients de précontrainte peuvent être positifs ou négatifs et sont déterminés par l'état d'équilibre du système. Cependant l'hypothèse de la stabilité de l'état d'équilibre nécessite que la matrice K reste définie non-négative.

- le modèle topologique : le modèle topologique est une abstraction du modèle précédent. La donnée d'un tel modèle est celle de trois matrices M , K et Z où M est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, K et Z des matrices symétriques d'élasticité et de viscosité, définies non-négatives. Ceci revient à considérer un réseau d'interconnexion dont les nœuds sont des masses ponctuelles et les arêtes des ressorts/freins en parallèles, où les ressorts sont de longueur à vide nulle mais d'une raideur de signe quelconque. Il n'y a plus de notion géométrique telle que la position, la longueur ou la projection orthogonale (cf Figure 1). Le modèle topologique, en tant que modèle physique et par rapport aux types de modèle précédents, est d'une inspiration fonctionnelle. Cependant, la vision en réseau dont nous l'avons doté, permet de définir des points d'accès et d'écoute définis par différents nœuds masses. Pour avoir un support visuel on peut alors le munir d'une forme spatiale (discrète), même si celle-ci n'a aucune pertinence.

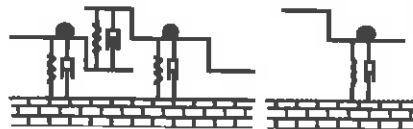


Figure 1

Représentation d'un modèle topologique

Il est clair qu'à tout modèle spatial discret (à n masses) on peut associer un modèle topologique (à $3n$ masses) fonctionnellement équivalent. Dans certains cas, le modèle topologique associé peut se décomposer en trois modèles topologiques parallèles correspondant chacun à une projection du modèle géométrique sur un des axes de coordonnées. Il suffit, par exemple, que toute liaison effective (i.e. avec des constantes de visco-élasticité non-nulles) soit parallèle à l'un des axes de coordonnées. Réciproquement, tout modèle topologique peut être réalisé par un modèle spatial discret (cf. Figure 1) fonctionnellement équivalent.

Nous étendons la définition du modèle topologique au cas où la matrice M n'est pas nécessairement diagonale en exigeant uniquement qu'elle soit non-dégénérée et définie positive (on parlera alors de modèle topologique généralisé). Cette matrice M peut être interprétée comme une matrice d'inertie qui exprime les connexions par inertie. Cependant, il est facile de voir qu'une simple transformation permet de se ramener à un réseau topologique à masses unitaires et dont les matrices d'élasticité et de viscosité sont $K_1 = M^{-1/2} K M^{-1/2}$ et $Z_1 = M^{-1/2} Z M^{-1/2}$. Nous définissons ainsi le réseau topologique normalisé associé à un modèle topologique généralisé.

- Le modèle modal : le modèle modal représente la structure vibrante sous forme d'une boîte munie de deux fenêtres d'entrée et de sortie définies par une matrice et sa transposée et contenant une série d'oscillateurs simples indépendants (Figure 2). En ce sens, ce type de modèle présente un caractère fonctionnel encore plus marqué que les modèles précédents. En effet, les oscillateurs représentent les différents modes caractéristiques de vibration de la structure vibrante et les fenêtres représentent les déformées modales associées aux modes.

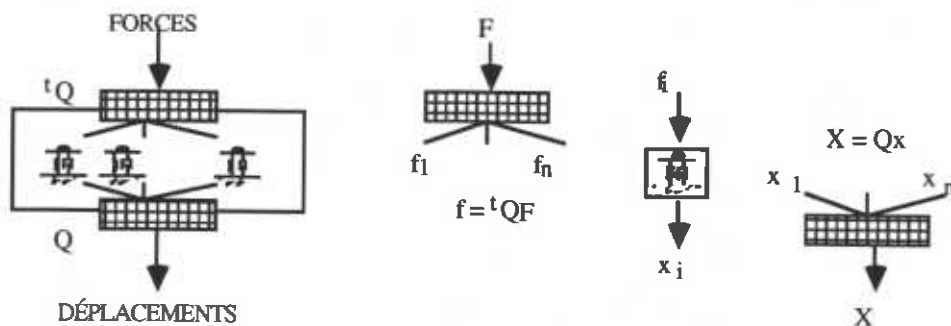


Figure 2

Représentation fonctionnelle d'un modèle modal

Dans la Figure 2, la matrice Q des déformées distribue les forces à l'entrée sur chaque oscillateur et recombine les déplacements de ceux-ci pour les fournir à la sortie. Nous verrons dans la section suivante pourquoi le modèle modal est un modèle structurel et comment il correspond aux modèles précédents.

2 - Le modèle modal

Une *n-cellule modale* (ou *mode*) χ est un couple (μ, q) où μ est un oscillateur harmonique de masse unitaire caractérisé par ses constantes de raideur et de viscosité k et z et q un vecteur non-nul de l'espace réel n -dimensionnel ; le vecteur q est la déformée modale de χ .

Un mode χ est oscillant si $z^2 - 4k < 0$, auquel cas sa pulsation propre est le réel $(4k - z^2)^{1/2}$; il est stable si $z > 0$.

Un *modèle modal* de dimension n est un ensemble fini de n -cellules modales χ_i telles que les déformées q_i soient linéairement indépendantes.

On peut associer canoniquement un modèle topologique généralisé t à un modèle modal m , de façon que les deux systèmes (entrée forces, sortie déplacements) soient équivalents (si même entrée alors même sortie). Posons en effet, K_m et Z_m les matrices diagonales définies par les constantes de raideur et de viscosité des différents modes et Q la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont les déformées modales. La matrice Q est donc inversible, notons P son inverse. Le modèle topologique généralisé associé à c est alors défini par les matrices M , K et Z telles que :

$$\begin{array}{lll} M = {}^t P P, & K = {}^t P K_m P & \text{et } Z = {}^t P Z_m P \\ {}^t Q M Q = 1 & K_m = {}^t Q K Q & \text{et } Z_m = {}^t Q Z Q. \end{array} \quad \text{alors}$$

Remarquons que ce modèle topologique représente un réseau (resp. réseau uniforme), i.e. M est diagonale (resp. multiple de l'identité) si et seulement si les lignes de Q sont deux à deux orthogonales (resp. et de plus de même norme). Dans le cas où le modèle représente un réseau, la matrice $M = (m_k)$ est diagonale et les égalités suivantes sont connues sous le nom de propriétés d'orthogonalité

$$\begin{aligned} \sum_k m_k Q_{ki}^2 &= 1 \\ \sum_k m_k Q_{ki} Q_{kj} &= 0 \quad \text{si } i \neq j. \end{aligned}$$

Notons aussi que, si l'on pose $L = M^{1/2} Q$, les matrices du modèle topologique normalisé s'écrivent :

$$\begin{aligned} K_1 &= M^{-1/2} K M^{-1/2} = L K_m L^{-1} \quad \text{et} \\ Z_1 &= M^{-1/2} Z M^{-1/2} = L Z_m L^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

On en déduit que K_1 et Z_1 sont diagonalisables sur la même base de vecteurs propres.

Réciproquement, on peut dans certains cas associer à un modèle topologique généralisé un modèle modal fonctionnellement équivalent. Soit donc un modèle topologique t caractérisé par ses matrices M , K et Z selon les notations précédentes. Soit K_1 et Z_1 les matrices du réseau normalisé. Ces deux matrices sont symétriques, donc diagonalisables et les éléments propres sont réels. Supposons de plus qu'elles se diagonalisent sur la même base, il existe donc des matrices diagonales K_m et Z_m et une matrice orthogonale L telle que le système (2) soit vérifié. Le modèle modal associé m est alors la donnée des matrices K_m , Z_m et $Q = M^{-1/2} L$. Notons que, L étant orthogonale, ${}^t Q M Q$ est la matrice unité.

Il est clair que les deux correspondances ainsi définies entre l'ensemble des modèles modaux et celui des modèles topologiques sont symétriques. Rappelons que deux matrices diagonalisables se diagonalisent sur la même base si et seulement si elles commutent.

Nous n'avons défini le modèle modal associé m que dans le cas où les matrices d'élasticité et de viscosité du modèle topologique normalisé commutent.

$$K_1 Z_1 = Z_1 K_1 \quad (3)$$

Ce critère est donc une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du modèle modal associé. Nous dirons alors que le modèle est à viscosité compatible. Cependant, l'interprétation physique de cette égalité matricielle est délicate. Un cas particulier est celui où il y a une dépendance linéaire entre M , K et Z

$$Z = \alpha M + \beta K$$

$$\text{auquel cas } Z_1 = \alpha 1 + \beta K_1 \text{ et donc } Z_m = \alpha 1 + \beta K_m.$$

Nous dirons de ce type de modèles qu'ils sont à viscosité proportionnelle (VP). Cette propriété a une interprétation physique simple : la viscosité est composée d'une viscosité externe (ou de friction) proportionnelle aux masses et d'une viscosité interne proportionnelle aux raideurs. Le coefficient β garantit qu'un mode de vibration est d'autant plus amorti que sa fréquence est plus élevée : ce qui, du point de vue pratique, représente une hypothèse plausible.

Ajoutons encore que l'on peut introduire une autre version du modèle modal pour doter une classe éventuellement plus grande de modèles topologiques d'équivalents modaux. Il faut pour cela complexifier (au sens algébrique) la notion de mode et de déformée modale : un mode, caractérisé par le nombre complexe l , est un système qui prend à l'entrée une force (complexe) $f(t)$ et rend à la sortie le déplacement (complexe) $z(t)$, solution de l'équation différentielle scalaire du premier ordre

$$z' + \lambda z = f. \quad (4)$$

L'ensemble des solutions complexes de l'équation du mouvement :

$$M x'' + Z x' + K x = F \quad (5)$$

(plus précisément, de l'équation homogène associée) est un espace de dimension $2n$. Dans certaines conditions cet ensemble est engendré par des vecteurs du type $q e^{\lambda t}$ où λ et q (réels ou complexes) sont tels que :

$$(\lambda^2 M + \lambda Z + K) q = 0. \quad (6)$$

Nous dirons alors que le système (5) est *simple* [Lancaster 1966]. Il existe alors un changement de base défini par la matrice Q dont les colonnes sont les vecteurs q réduisant l'équation (5) à un système d'équations indépendantes du type (4). Noter que, M , Z et K étant réels, les λ et q dans cette décomposition sont réels ou appartiennent à des paires complexes conjugués. Le système peut donc être représenté par le schéma suivant.

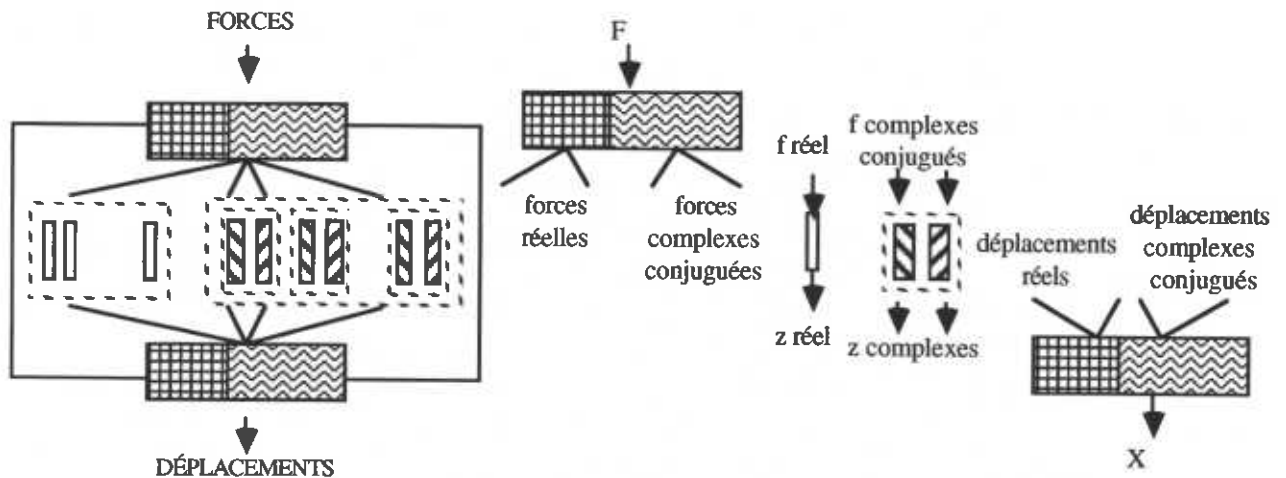


Figure 3

Modèle modal complexe.

A gauche, on représente les modes réels non-oscillants, à droite les modes complexes par paires conjuguées.

Notons que les matrices de changements de base étant complexes, les déformées indiquent l'amplitude et la phase de chaque mode.

Le modèle modal complexe permet de représenter un domaine plus large de systèmes vibrants, cependant la caractérisation des systèmes simples, en termes de caractéristiques physiques est difficile. Par exemple une condition nécessaire et suffisante peut s'énoncer ainsi (cf. [Lancaster 1966] theorem 4.6) :

pour tout (λ, q) vérifiant (6) il existe un vecteur r tel que

$$(\lambda, r) \text{ vérifie (6)} \quad \text{et} \\ {}^t r (2 \lambda M + Z) q \neq 0.$$

En particulier, un simple calcul permet de vérifier qu'un modèle topologique à viscosité compatible est simple si et seulement si tous ses modes caractéristiques sont oscillants ou sur-amortis (chaque cellule vérifie $z^2 - 4k \neq 0$).

Par exemple, un réseau conservatif avec un mode d'inertie ($k = 0$) n'est pas simple. Il existe donc des structures élémentaires qui n'admettent pas de modèle modal complexe, ce qui limite considérablement son intérêt dans le cadre de notre étude. D'autre part, l'algèbre complexe alourdit les calculs pour la synthèse modale. Pour ces raisons, dans ce qui suit nous ne considérons que les modèles (modaux ou topologiques) à viscosité proportionnelle.

RESEAUX	SYSTEME SIMPLE Existence d'un modele modal complexe	VISCOSITE PROP. Existence d'un modele modal en oscillateurs independants	VISCOSITE COMP. Existence d'un modele modal en oscillateurs independants
	OUI	OUI	OUI
	NON	OUI	OUI
	OUI	NON	OUI
	NON	NON	OUI
	OUI	NON	NON
	NON	NON	NON

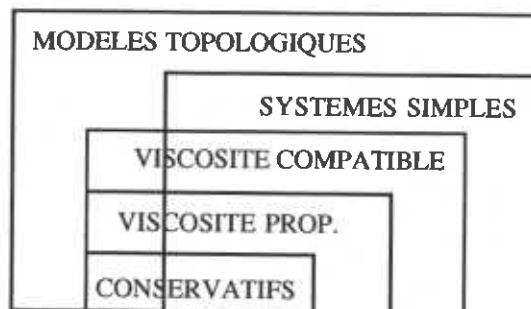


Figure 4

Exemples de réseaux élémentaires et classification des modèles topologiques selon l'existence d'un modèle modal (réel ou complexe) associé.

3 - La synthèse modale

Le modèle modal défini précédemment donne lieu à un algorithme de synthèse sonore par simulation numérique dont le principe se dégage en considérant le schéma de la Figure 2. En effet, l'algorithme de simulation se décompose en une itération des trois opérations pour chaque échantillon du temps kT :

1. Transfert de l'excitation $F(kT)$ à l'intérieur de la chambre modale: distribution des forces modales $f_i(k)$ sur chaque mode ;

2. Simulation numérique de chaque mode χ_i : calcul du déplacement modal par un algorithme $x_i(k) = \text{Algo}(\chi_i, f_i(k), x_i(k-1), x_i(k-2))$;
3. Calcul du déplacement des masses à partir des déplacements modaux.

Cet algorithme permet de détourner divers problèmes qui apparaissent dans la synthèse par simulation directe. Pour plus de détails sur cet algorithme, ainsi que pour une étude comparative on pourra consulter [Florens & al. 1986], [Florens & Cadoz, 1991] où la communication de J.L. Florens dans ce même volume.

Nous concluons cette section en signalant que les vertus de la modélisation modale de la structure vibrante pour la synthèse sonore apparaissent aussi lors de l'utilisation dans un contexte de création. En effet, la représentation spectrale de la structure permet un contrôle direct des caractères acoustiques (fréquences, amortissements, amplitudes). L'utilisateur peut donc, par une "opération chirurgicale", adapter le modèle à ses exigences particulières. Dans le même ordre d'idées, grâce à la distribution de l'excitation sur les différents modes, on peut envisager une intrusion dans la chambre modale pour appliquer directement un exciteur sur chaque mode d'une structure : on peut jouer ainsi, simultanément mais de façon indépendante, des modes des différents instruments.

III - GENERATION DES MODELES MODAUX

Nous avons évoqué dans la section précédente quelques types de modélisation des systèmes vibrants en soulignant la position particulière du modèle modal. La question que l'on pose ici est comment se procurer ces objets ? Le tableau de la Figure 5 récapitule divers possibilités de filiation plus ou moins directes des modèles modaux.

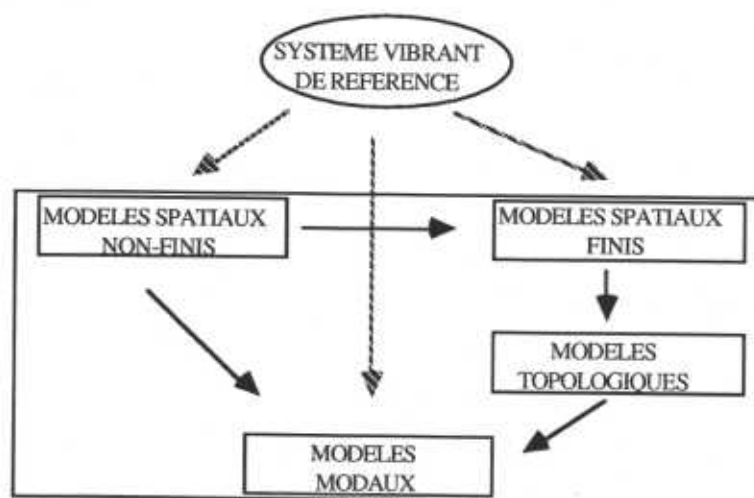


Figure 5

Tableau des différents modèles de la structure vibrante et leur filiation

En accord avec les considérations évoquées dans la section A, nous exposons ici une méthode de construction formelle de modèles modaux à partir d'autres modèles modaux de provenances variées. On se restreint au cadre des modèles à VP. Rappelons qu'un tel modèle peut être calculé à partir de son équivalent topologique en diagonalisant les matrices d'élasticité et de viscosité normalisées.

Cependant le modèle modal n'est pas défini de manière unique (dans le cas de modes multiples les déformées modales peuvent être arbitrairement choisies dans un espace de déformation). Nous dirons que deux modèles topologiques sont (formellement) équivalents s'ils se déduisent l'un de l'autre par une réindexation des masses ; de même deux modèles modaux seront équivalents si les modèles topologiques associés sont équivalents. Moyennant ces identifications il y a un isomorphisme entre l'ensemble des modèles modaux et celui des modèles topologiques (à VP).

1 - Assemblages de modèles modaux

Une liaison entre deux réseaux topologiques τ_1 et τ_2 est la donnée d'un ensemble d'éléments de liaison (visco-élastique) entre les masses des deux réseaux. Formellement, une liaison L est définie par la donnée de deux matrices K_{12} et Z_{12} décrivant l'élasticité et la viscosité de la liaison. L'assemblage de τ_1 et τ_2 par la liaison L est le modèle topologique caractérisé par la donnée des matrices M , K et Z définies comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_1 & -K_{12} \\ -K_{21} & K_2 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_2 \end{bmatrix}$$

où $K_1 = K_1 + \Delta_{12}$ et $K_2 = K_2 + \Delta_{21}$, avec Δ_{12} (resp. Δ_{21}), est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les sommes ligne par ligne (resp. colonne par colonne) des coefficients de K_{12} .

Il en résulte que, pour que le modèle résultant soit également à VP, il faut que la viscosité de chaque composant soit définie par les mêmes coefficients de proportionnalité. La liaison est donc caractérisée par la donnée de la matrice K_{12} . De la même façon, l'assemblage de deux modèles modaux m_1 et m_2 par une liaison L est le modèle modal (défini à une équivalence près), noté (m_1, L, m_2) , associé à l'assemblage des modèles topologiques correspondants.

Soit Q_1 et Q_2 les matrices définies par les déformées des deux modèles et Q la somme directe des deux matrices. La matrice tQKQ se décompose en quatre blocs :

$$Q^T K Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

où $A = K_{1m} + {}^t Q_1 \Delta_{12} Q_1$, $B = {}^t Q_1 K_{12} Q_2 = {}^t C$ et $D = K_{2m} + {}^t Q_2 \Delta_{12} Q_2$.

Cette décomposition permet d'évaluer la perturbation apportée par l'assemblage sur la structure modale de chacun des modèles. Ceci nous conduit à poser la définition suivante :

Définition 1

Une liaison L entre les modèles μ_1 et μ_2 est *orthogonale* si et seulement si

1. la matrice Δ_{12} (resp. Δ_{21}) est multiple de M_1 (resp. M_2)
2. la matrice B est quasi-diagonale (i.e. chaque ligne et chaque colonne contient au plus un seul coefficient non-nul).

Notons que, les matrices B et C étant transposées, dans la condition (2) on peut remplacer B par C . D'autre part la condition (1) est équivalente à ${}^t Q_1 \Delta_{12} Q_1$ (resp. ${}^t Q_2 \Delta_{21} Q_2$) est multiple de la matrice unité. Il est facile de vérifier dans un premier temps que la condition (2) est indépendante du choix de l'indexation des modes de l'un ou l'autre des modèles. En effet, une réindexation q des modes du premier réseau, entraîne une permutation des lignes de B , ce qui laisse invariant la condition (2). Remarquer aussi que la matrice ${}^t Q K Q$ (et donc la matrice B) est indépendante du choix de l'indexation des masses de chaque réseau topologique. L'orthogonalité est donc indépendante de l'ordre des modes et de celui des masses. La permutation θ est la configuration modale définie par la liaison orthogonale L (cf. § C.2).

La condition (1) exprime qu'en chaque masse la somme des raideurs des ressorts est proportionnelle à cette masse. La condition (2) exprime que chaque mode perturbé du premier réseau est couplé à au plus un mode du second modèle et inversement.

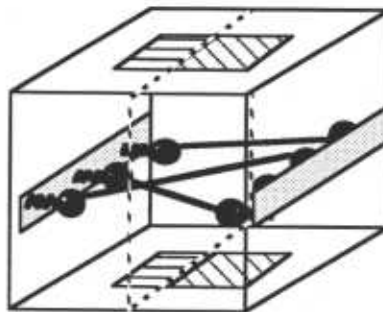


Figure 6

L'assemblage orthogonal des deux chambres modales.

Les oscillateurs représentent les modes perturbés de chacun des modèles.

Le modèle modal d'un assemblage orthogonal peut être calculé simplement à partir des données des modèles de base. En effet, on peut annuler un coefficient non-nul b_{ij} de B (et C) par une rotation dans le plan défini par les modes i et j des deux modèles (cf [Wilkinson 1965] §5). L'hypothèse de l'orthogonalité garantit que cette rotation perturbe uniquement les modes i et j sans introduire de nouveaux couplages.

Plus précisément, si

$$\Delta_{12} = \sigma_1 M_1 \text{ et } \Delta_{21} = \sigma_2 M_2,$$

posons :

$$\begin{aligned} v &= (k_1^1 - k_2^2 + \sigma_1 - \sigma_2) / 2 b_{ij} \\ t_{ij} &= -v + (1 + v^2)^{1/2} \quad \text{si } v > 0 \\ &= -v - (1 + v^2)^{1/2} \quad \text{si } v < 0 \\ &= 1 \quad \text{si } v = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Alors, t_{ij} est la tangente de l'angle de rotation. Les modes correspondant de l'assemblage sont caractérisés par

$$\begin{aligned} k_i &= k_1^1 + \sigma_1 + t_{ij} b_{ij} \\ k_j &= k_2^2 + \sigma_2 - t_{ij} b_{ij} \end{aligned} \quad (8)$$

L'expression précédente reste valide pour les modes non-couplés auquel cas il faut annuler la correction $t_{ij} b_{ij}$. Si on note s_{ij} et c_{ij} les sinus et cosinus de l'angle de rotation, la déformée modale associée au mode i (resp. j) est le vecteur dont les coordonnées sont celles de $c_{ij} q_1^1$ (resp. $s_{ij} q_1^1$) suivies de celles de $-s_{ij} q_2^2$ (resp. $c_{ij} q_2^2$).

Un cas particulier d'assemblage orthogonal est l'assemblage *canonique* : les deux modèles sont égaux et la liaison est un ensemble de ressorts de même raideur r reliant chaque masse à son homologue (en toute rigueur, les raideurs sont proportionnelles aux masses qu'elles relient). La matrice B est alors diagonale et $\sigma_1 = \sigma_2 = r$. Pour trouver le modèle résultant, il suffit d'effectuer autant de rotations que de modes, chaque rotation étant d'angle $\pi/4$. Dans le modèle assemblé on retrouve les anciens modes k_i de chaque modèle et de nouveaux modes $k_i + 2r$, correspondant respectivement aux oscillations en phase et en opposition de phase des deux réseaux.

Soit L une liaison orthogonale entre deux réseaux topologiques (à VP) $\tau_1 = (M_1, K_1, Z_1)$ et $\tau_2 = (M_2, K_2, Z_2)$. Soit $\tau_3 = (M_3, K_3, Z_3)$ le réseau topologique tel que $M_3 = \mu M_2$ et $K_3 = \kappa K_2$.

Les modèles modaux de τ_2 et τ_3 peuvent être choisis tels que

$$Q_3 = \mu^{-1/2} Q_2 \text{ et } K_{m3} = \kappa/\mu K_{m2}$$

Il en résulte que la liaison L entre τ_1 et τ_3 est aussi orthogonale et pour obtenir les caractéristiques modales de l'assemblage, il suffit de remplacer dans les expressions (7) et (8) σ_2 par σ_2/μ , k^2_j par $\kappa k^2_j/\mu$ et b_{ij} par $\mu^{-1/2} b_{ij}$. L'orthogonalité est donc stable par dilatation homogène de la masse et de la raideur ; la structure modale des composants n'intervient que par l'intermédiaire de leurs déformées modales.

2 - Orthogonalité - Existence et caractérisation

Nous présentons maintenant une méthode algébrique pour déterminer et décrire les assemblages orthogonaux. Remarquons d'abord que pour tout assemblage orthogonal, il existe une réindexation des modes du plus grand modèle pour laquelle la matrice B est diagonale (i.e. les coefficients non-nuls sont situés sur la diagonale). Dans ce cas nous dirons que la liaison orthogonale est conforme à la représentation (indexation) donnée des deux modèles. De façon plus précise, si on note I_1 et I_2 les ensembles d'indices respectifs des deux modèles, une *configuration modale* est une application injective $f: I_1 \rightarrow I_2$ (ou $I_2 \rightarrow I_1$ selon la dimension des modèles).

A toute liaison orthogonale L correspond donc une configuration modale unique qui est définie par une réindexation q du plus grand modèle rendant la matrice B diagonale, θ est une permutation qui factorise f en une inclusion ; nous dirons alors que la liaison est conforme à la configuration f . Définissons A_f comme l'ensemble des liaisons orthogonales conformes à f ou, autrement dit, des liaisons orthogonales qui couplent le mode d'indice i du plus petit modèle à celui d'indice $f(i)$ du plus grand. Cet ensemble est muni naturellement d'une structure d'espace vectoriel. La suite de cette section est consacrée à l'étude de celui-ci. Introduisons d'abord les définitions suivantes (avec les notations de B.2)

Définition 2

Etant donné un modèle modal $M = \{\chi_i\}$,

1. la *trace* $T(\chi_i)$ du mode χ_i est le réel $\sum_k m_k Q_{ki}$;
2. un mode χ_i est *équilibré* si sa trace est nulle;
3. le *degré d'équilibrage*, $DE(M)$, du modèle est son nombre de modes équilibrés.

Pour un réseau à masses unitaires, la trace d'un mode peut être interprétée comme la force appliquée sur ce mode lorsque l'on applique une force unitaire sur chacune des masses du réseau. Le mode est équilibré si cette force est nulle. Algébriquement, un mode est équilibré si sa déformée appartient à l'hyperplan H , l'orthogonal du vecteur $(1, \dots, 1)$ relativement à la métrique définie par les masses.

La trace est donc indépendante de l'indexation du réseau, par contre le degré d'équilibrage dépend du choix de la représentation modale (dans le cas de l'existence d'un élément propre multiple). On peut néanmoins définir le degré d'équilibrage d'un réseau topologique comme

$$\sum_i \dim(HUV_i),$$

les V_i étant les sous-espaces propres du réseau (noter que dans cette somme, soit $V_i \subset H$ auquel cas tous les modes sont équilibrés et $\dim(HUV_i) = \dim(V_i)$, soit $V_i \not\subset H$ et alors $\dim(HUV_i) = \dim(V_i) - 1$; le degré d'équilibrage est alors un entier strictement inférieur à la dimension du réseau.

Soient n_1 et n_2 les dimensions respectives des deux modèles et supposons que $n_1 \leq n_2$. Notons aussi E_1 (resp. E_2) l'ensemble des indices des modes équilibrés des deux modèles. Les conditions de l'orthogonalité conforme à une configuration f des deux modèles se traduisent par le système linéaire homogène de $n_1 + n_2$ équations à $n_1 + 2$ inconnues $(b_1, \dots, b_{n_1}, \sigma_1, \sigma_2)$ où les b_i sont les coefficients diagonaux de B :

$$\begin{aligned} \sum_k T(\chi_{1k}) m_{2j} Q_{2jf(k)} b_k &= \sigma_2 & \text{pour } 1 \leq j \leq n_2 \\ \sum_k T(\chi_{2f(k)}) m_{1j} Q_{1jk} b_k &= \sigma_1 & \text{pour } 1 \leq j \leq n_1 \end{aligned}$$

L'examen détaillé de ce système permet de dégager la proposition 1 suivante qui caractérise l'espace A_f . Introduisons d'abord la définition suivante généralisant la liaison canonique au cas de deux réseaux différents.

Définition 3

Une configuration modale f est *proportionnelle* si les conditions suivantes sont satisfaites:

1. $I_2 - E_2 \subset f(I_1)$
2. $E_1 = f^{-1}(E_2)$
3. il existe $a \neq 0$ tel que pour tout $i \in I_1$, $T(\chi_{1i}) = a T(\chi_{2f(i)})$.

A toute configuration modale proportionnelle f on peut associer une liaison orthogonale (définie à une constante multiplicative près) définie par la matrice de liaison K telle que :

$$K_{ij} = m_{1i} m_{2j} \sum_k Q_{1ik} Q_{2jf(k)}$$

Dans le cas où les deux modèles sont identiques, les lignes de la matrice des déformées étant deux à deux orthogonales (d'après B.2), on retrouve la liaison canonique définie plus haut. La figure suivante représente deux types d'assemblages canoniques : à gauche l'auto-assemblage canonique du chapelet homogène circulaire à 8 masses ; à droite l'assemblage canonique d'une masse libre et du chapelet.

Ce dernier rajoute au chapelet un mode différentiel résultant du couplage du fondamental du chapelet (le seul non-équilibré) avec l'inertie de la masse et translate les autres modes (qui sont équilibrés).

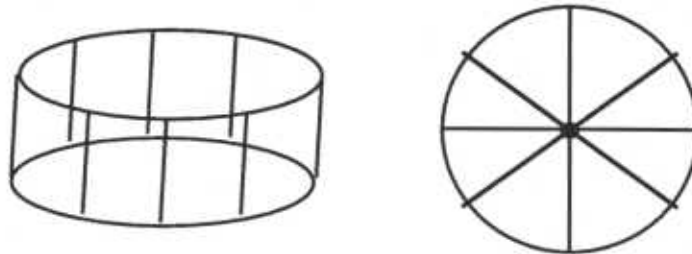


Figure 7

Assemblages canoniques

L'assemblage canonique, lorsqu'il existe, affecte donc de la même façon (par translation) tous les modes équilibrés des deux réseaux. La définition suivante introduit une liaison orthogonale n'affectant qu'un mode équilibré.

Définition 4

Si la configuration f associe deux modes équilibrés (i.e. χ_{1i} et $\chi_{2f(i)}$ sont équilibrés), alors la liaison définie par la matrice K telle que

$$K_{uv} = m_{1u} m_{2v} Q_{1ui}^t Q_{2vf(i)}$$

est orthogonale ; c'est la *liaison orthogonale élémentaire* définie par le couple $(\chi_{1i}, \chi_{2f(i)})$.

Un assemblage orthogonal élémentaire n'affecte que le couple de modes auquel il est associé. La représentation de l'interconnexion d'une telle liaison n'est pas très simple en général. Cependant, dans le cas où les deux réseaux sont identiques et f est la configuration identique, la matrice de liaison K s'exprime simplement par

$$K = M q_i q_i^t M$$

où la matrice $q_i q_i^t$ est le projecteur orthogonal sur le vecteur déformé q_i du mode $\chi_i = (k_i, q_i)$.

Si le réseau est homogène (en masse), K est exactement la matrice de constituant associée à la valeur propre k_i apparaissant dans la décomposition spectrale de la matrice d'élasticité du réseau. Cette matrice est donc symétrique et admet 1 comme valeur propre ayant pour direction propre q_i et zéro comme valeur propre dont le sous espace propre associé est le

sous-espace orthogonal à q_i . On peut dire alors que les modes du réseau assemblé sont une combinaison des modes des deux réseaux et des "modes" de la liaison.

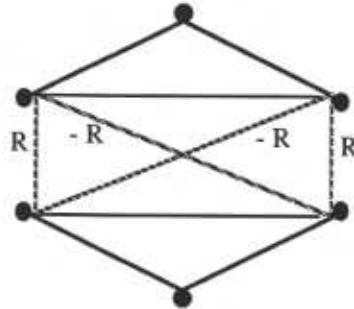


Figure 8

Un auto-assemblage orthogonal élémentaire d'un chapelet homogène à 3 masses ; seul le second partiel est affecté.

Une liaison orthogonale quelconque est une combinaison de liaisons orthogonales élémentaires et de la liaison canonique, lorsque celles-ci existent. La proposition suivante précise la situation générale

Proposition 1

Etant donnée une configuration modale f , l'espace A_f des liaisons orthogonales est engendré par les liaisons orthogonales élémentaires et la liaison canonique, si f est proportionnelle. Autrement dit :

$$\begin{aligned} \dim(A_f) &= 1 + \# (E_1 \cup f^{-1}(E_2)) && \text{si } f \text{ est proportionnelle,} \\ &= \# (E_1 \cup f^{-1}(E_2)) && \text{sinon} \end{aligned}$$

(le symbole $\#$ désigne le cardinal ou le nombre d'éléments d'un ensemble). En particulier, si les deux modèles sont identiques et f est la configuration identique

$$\dim(A_f) = 1 + DE(M).$$

L'existence d'assemblages orthogonaux dépend donc fortement de l'existence de modes équilibrés dans les réseaux que l'on veut assembler. La détection des modes équilibrés peut se réaliser par un simple calcul, mais il existe des cas où, en se référant à la structure topologique du réseaux, on peut les identifier sans calcul. La suite de cette section donne quelques éléments relatifs à ce problème, ainsi que quelques considérations générales sur la topologie des réseaux mécaniques.

Dans la suite de cette section, nous supposons que les réseaux sont connexes. Nous commençons d'abord par donner une définition généralisant l'idée de la symétrie existant dans les réseaux spatiaux aux réseaux topologiques et aux modèles modaux.

Définition 5

Un réseau topologique $\tau = (M, K, Z)$ est *stable* par une permutation des indices θ , si les matrices M , K et Z vérifient les relations

$${}^tP_\theta K P_\theta = K, {}^tP_\theta Z P_\theta = Z \text{ et } {}^tP_\theta M P_\theta = M,$$

P_θ étant la matrice de permutation définie par θ . La permutation θ est alors une *symétrie* pour τ . De même un mode (μ, q) est stable par θ si les vecteurs $(q_1, \dots, q_n)$ et $(q_{\theta(1)}, \dots, q_{\theta(n)})$ sont colinéaires.

L'ensemble des symétries d'un réseau est un sous-groupe du groupe symétrique S_n . La relation entre les symétries d'un réseau topologique et les symétries de ses modes n'est pas simple. Examinons d'abord un cas pour lequel d'ailleurs le problème de l'identification des modes équilibrés est immédiat. Remarquons d'abord que la matrice d'élasticité K d'un réseau se décompose en une somme d'une matrice diagonale K_{ext} et une matrice symétrique à diagonale dominante K_{int} dont la somme des coefficients de chaque ligne est nulle.

Ces deux matrices représentent respectivement les élasticités *externes* et *internes* du réseau. Un réseau libre (sans point fixe) est donc à élasticité externe nulle. Son mode fondamental est donc le mode d'inertie (à fréquence nulle). Plus généralement, nous dirons qu'un réseau est à élasticité externe homogène si la matrice K_{ext} est multiple de la matrice des masses M (lorsque le réseau est homogène cela revient à dire que toutes les masses sont reliées avec la même raideur au sol). Il est facile de vérifier que dans ce cas ($K_{ext} = k M$), le mode fondamental est le mode (k, q) où q est le vecteur $(m^{-1/2}, \dots, m^{-1/2})$ et m la masse totale du réseau ; d'après la propriété d'orthogonalité il en résulte que tous les autres modes d'un tel réseau sont équilibrés.

Proposition 2

Un réseau topologique de dimension n est à élasticité externe homogène si et seulement si tous ses modes autres que le mode fondamental sont équilibrés (i.e. son degré d'équilibrage est $n-1$).

Pour un réseau à élasticité externe homogène et pour la configuration identique, la dimension de l'espace des auto-assemblages est donc n . Pour un tel réseau, il existe aussi un auto-assemblage orthogonal élémentaire (défini à une constante multiplicative près) qui affecte le mode fondamental ; la liaison est telle que chaque masse est reliée à toutes les autres par la même raideur. Il est donc possible, par des liaisons orthogonales, de réaliser des couplages mode par mode ; ceci à l'aide de la liaison orthogonale homogène pour la fondamental et des liaisons orthogonales élémentaires pour les autres modes. Le problème pour un réseau à élasticité externe quelconque reste ouvert, néanmoins pour un réseau à

élasticité interne positive, la proposition 4 énonce une condition suffisante. Rappelons d'abord que pour un tel réseau, une adaptation facile du théorème de Perron-Frobenius ([Lancaster 1969] theorem 9.2.1) permet d'établir la proposition suivante qui caractérise le mode fondamental :

Proposition 3

Un réseau (connexe) τ à élasticité interne positive possède un mode unique (μ, q) tel que les coordonnées de q soient toutes positives ; ce mode vérifie de plus

- μ est de multiplicité 1,
- μ est le mode fondamental de τ ,
- μ est stable pour toute les symétries de τ .

La généralisation de cette proposition à un réseau à élasticité interne de signe quelconque reste un problème ouvert.

Proposition 4

Soit τ un réseau à élasticité interne positive et θ une symétrie de τ . Alors tout mode non dégénéré de τ est ou bien stable par θ ou bien équilibré.

On termine cette section en remarquant qu'en général le degré d'équilibrage croît par assemblage orthogonal. Par exemple le degré d'équilibrage de l'auto-assemblage canonique d'un réseau t est le double du degré d'équilibrage du réseau t .

3 - Complexes de modèles modaux

Dans la section précédente, nous avons étudié l'assemblage de deux modèles modaux, considérant en particulier les liaisons orthogonales. Il est clair que les réseaux ainsi construits ne recouvrent pas tout l'ensemble des réseaux topologiques (par exemple un chapelet à 5 masses). Une extension de l'assemblage binaire à un nombre quelconque permet de palier à cette lacune, tout en offrant un outil plus puissant de génération de modèles modaux, en particulier des modèles à grand nombre de masses et à périodicité de type fibré. Ici encore, comme dans le cas de l'assemblage binaire, on suppose que toutes les modèles composants sont à viscosité propre et que la viscosité de chaque modèle est définie par les mêmes coefficients de proportionnalité. Ces mêmes coefficients peuvent alors servir pour définir la viscosité du modèle résultant de l'assemblage. Moyennant cette remarque, pour simplifier, on se limitera dans ce qui suit aux modèles conservatifs.

Définition 5

Un *complexe orthogonal de modèles modaux* est un ensemble fini $\{M_i, L_{ij}\}$ de modèles modaux reliés deux à deux par des liaisons orthogonales tel que les configurations modales associées sont compatibles : autrement dit, étant donné trois modèles d'indices i, j et k , les configurations f_{ij}, f_{jk} et f_{ik} définies par les trois liaisons orthogonales vérifient $f_{ij} f_{jk} = f_{ik}$.

La condition de compatibilité des configurations peut être formulée de façon équivalente comme suit : pour chaque modèle, il existe une indexation des modes de façon que toutes les configurations se réduisent à des inclusions.

Toute liaison entre deux oscillateurs élémentaires étant orthogonale, tout réseau topologique peut être considéré comme un complexe orthogonal de modèles modaux. Lorsque toutes les sections M_i d'un complexe sont des exemplaires d'un même modèle M , ce complexe est un *complexe fibré* de base M . Lorsque les seules liaisons effectives sont celles reliant les sections d'indices i et $i+1$, nous parlerons de fibré en droite.

On peut aussi considérer les complexes fibrés en cercle (Figure 9b), et plus généralement les complexes fibrés de degré p , c'est à dire tels que les liaisons effectives sont celles d'indices i et $i+j$ avec $j \leq p$ (Figure 9c). Dans l'exemple (a), les modèles sont différents, (b) représente un complexe fibré en cercle à partir du chapelet circulaire, les liaisons sont toutes canoniques et (c) est un fibré en cercle de degré 2, la base étant le réseau réduit à une masse.

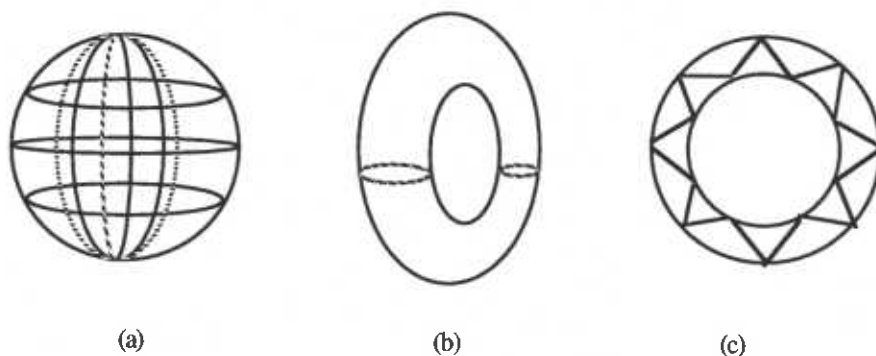


Figure 9

Complexes orthogonaux de modèles modaux

Dans le cas d'un complexe fibré où les liaisons L_{ij} sont toutes des multiples d'une même liaison orthogonale, il est possible d'exprimer le modèle modal résultant en fonction des modes de la base.

En raison de sa simplicité, nous commençons par examiner d'abord le cas des complexes fibrés n'utilisant que des liaisons canoniques, c'est à dire celui des *réseaux produits*. En gros, le produit de deux réseaux topologiques τ_1 et τ_2 est le réseau topologique obtenu en remplaçant chaque masse de τ_2 par un exemplaire de τ_1 et chaque liaison entre deux masses de τ_2 par une liaison canonique entre les deux exemplaires correspondant de τ_1 .

Pour donner une définition formelle, rappelons d'abord que le produit direct $A \otimes B$ de deux matrices A et B est la matrice obtenue à partir de la matrice A en substituant chaque coefficient A_{ij} le bloc $A_{ij} B$.

Définition 6

Etant donné deux réseaux topologiques définis par les matrices (M_i, K_i) , $i = 1, 2$, le produit $t_1 \otimes t_2$ de t_1 et t_2 est le réseau défini par les matrices (M, K) telles que

$$\begin{aligned} M &= M_1 \otimes M_2, \\ K &= K_1 \otimes M_2 + M_1 \otimes K_2. \end{aligned}$$

On peut tout de même remarquer que, si l'on avait défini la matrice de la viscosité Z comme $Z_1 \otimes M_2 + M_1 \otimes Z_2$, le réseau produit serait resté à viscosité compatible mais non nécessairement proportionnelle. Le tore représenté dans la figure 9 est le produit de deux chapelets circulaires ; de même une membrane rectangulaire (discrète ou continue) est le produit de deux cordes (discrètes ou continues). Remarquons aussi que les réseaux $t_1 \otimes t_2$ et $t_2 \otimes t_1$ ne diffèrent que d'une réindexation des masses. On peut de la même façon définir le produit de deux modèles modaux : c'est le modèle modal ayant $n_1 n_2$ modes (k, z, q) définis chacun à partir de d'une paire de modes de chacun des composants (k_1, z_1, q_1) et (k_2, z_2, q_2) par $k = k_1 + k_2$ et q étant le vecteur de coordonnées $(a_1 b_1, \dots, a_1 b_{n_2}, a_2 b_1, \dots, a_{n_1} b_{n_2})$, où $q_1 = (a_1, \dots, a_{n_1})$ et $q_2 = (b_1, \dots, b_{n_2})$. Avec les notations matricielles, si on note D_1 (resp. D_2) la matrice diagonale des modes et Q_1 (resp. Q_2) la matrice des déformées, on peut dire que les matrices du modèle produit sont

$$\begin{aligned} D &= D_1 \otimes 1_{n_2} + 1_{n_1} \otimes D_2 \\ Q &= Q_1 \otimes Q_2. \end{aligned}$$

Avec cette définition, on peut énoncer le résultat suivant qui découle de la relation matricielle

$$AB \otimes CD = (A \otimes C)(B \otimes D).$$

Proposition 5

Le modèle modal du produit de deux réseaux topologiques est le produit des modèles modaux des composants.

Le produit de réseaux topologiques (resp. modèles modaux) est associatif et la proposition ci-dessus peut se généraliser à un nombre quelconque. Il est possible de généraliser la notion du produit et le résultat ci-dessus au cas où les liaisons L_{ij} sont multiples d'une même liaison orthogonale L , qui n'est pas nécessairement la liaison canonique.

Soit τ_1 et τ_2 deux réseaux topologiques et L une liaison orthogonale entre deux exemplaires de τ_1 . Le L -produit de τ_1 et τ_2 (noté $\tau_1 \otimes_L \tau_2$) est le réseau topologique τ obtenu à partir de τ_2 en substituant à chaque masse un exemplaire de τ_1 et à chaque liaison de raideur r la liaison orthogonale $r \times L$.

La figure suivante (10a) représente le cas où τ_1 et τ_2 sont respectivement des chapelets linéaires à 2 et à 4 masses et la liaison est celle qui n'affecte que le mode fondamental (chaque masse est reliée à toutes les autres par la même raideur, cf. la remarque qui suit la proposition 2). Dans la Figure 10b, le réseau multiplié est le réseau à interconnexion nulle constitué de 4 masses indépendantes et le réseau multiplicateur est un chapelet à 5 masses.

La matrice des déformées d'un réseau v à interconnexion nulle et à élasticité externe quelconque est une matrice inversible quelconque Q vérifiant la propriété d'orthogonalité ${}^tQMQ=1$. Il en résulte que, moyennant un choix convenable du modèle modal, toute matrice symétrique L peut définir une liaison orthogonale entre deux exemplaires de v . Cette remarque permet de construire, à partir de la donnée d'un réseau et d'une matrice L quelconques, un second réseau qui en est comme une extension transversale ou épaissement de celui-ci. Nous appellerons ce procédé de production un *grillage*.

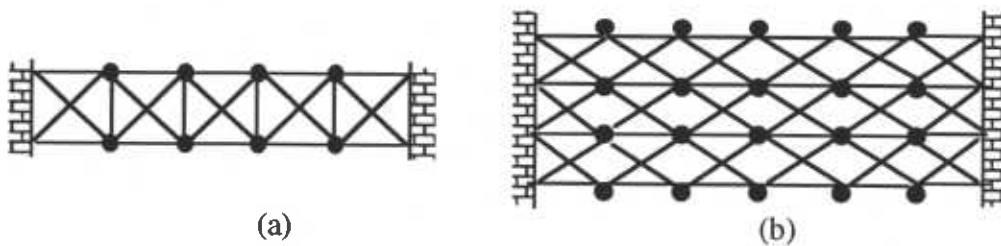


Figure 10

Exemples de L -produits de réseaux

De la même façon que pour le produit simple de modèles modaux, on peut définir le L -produit de deux modèles modaux μ_1 et μ_2 comme suit : soit $\{(r_{1i}), Q_1\}$ (resp. $\{(r_{2i}), Q_2\}$) les caractéristiques modales des deux modèles, σ (resp. σ_2) la somme des élasticités de liaison (resp. de τ_2) en chaque nœud et $l_1, \dots, l_{n_1}$ les coefficients diagonaux de la matrice tQ_1LQ_1 . Le L -produit de μ_1 et μ_2 est le modèle défini par les caractéristiques $\{(r_{ij}), Q\}$ telles que :

$$r_{ij} = r_{1i} + \sigma_2 (\sigma - l_i) + l_i r_{2j} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n_1 \text{ et } 1 \leq j \leq n_2$$

$$Q = Q_2 \otimes Q_1$$

On peut alors énoncer la proposition suivante généralisant la proposition 5 ci-dessus.

Proposition 6

Le modèle modal du L-produit de deux réseaux topologiques est le L-produit des modèles modaux des composants.

Pour une preuve de cette proposition il suffit de d'examiner la matrice d'élasticité du réseau résultant dans la base définie par les déformées du réseau multiplié τ_1 . Il s'avère alors que les différents modes de chaque section sont intercouplés un par un selon le schéma d'interconnexion défini par le réseau multiplicateur τ_2 , les coefficients de ces couplages étant définis par les l_i et les raideurs de τ_2 . Donc, en gros, les modes du réseau résultant sont, ici encore, des combinaisons des modes des deux réseaux et des "modes" de la liaison.

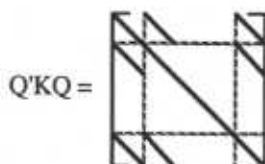
Pour retrouver le cas particulier du produit simple (i.e. le cas où L est la liaison canonique) il suffit de remplacer les l_i par 1 et on retrouve le résultat de la proposition 5. Dans le cas particulier d'un grillage, i.e. le réseau multiplié est un ensemble de masses libres (cf. Figure 10b), les modes du réseau produit s'expriment donc par

$$r_{ij} = \sigma_2 (\sigma - l_i) + l_i r_{2j} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n_1 \text{ et } 1 \leq j \leq n_2$$

On peut aussi noter que si l'un des coefficients l_i est nul, les modes r_{ij} sont d'une multiplicité supérieure ou égale à n_2 . Les déformées modales (non uniques) associées à ces modes peuvent être choisies comme les colonnes de la matrice $1_{n_2} \otimes (Q_1)^* \cdot j$. Cela signifie simplement que l'oscillation selon chacun de ces modes r_{ij} laisse immobile toute la structure sauf la section d'indice j qui se déforme selon le mode d'indice i . Par exemple, dans la figure 10a les modes se décomposent en deux familles : les modes provenant de la structure macroscopique, ici un chapelet de 4 masses et puis les modes dégénérés de la structure microscopique, c'est-à-dire ceux correspondant à l'oscillation différentielle de chaque bipoint.

Les réseaux L-produit sont des cas particuliers des complexes fibrés pour lesquels le modèle modal s'obtient directement (formellement) à partir du modèle de la section. Il existe aussi d'autres cas de complexes (non nécessairement fibrés) pour lesquels on peut exprimer le modèle résultant en fonction des modèles des sections (par exemple la sphère de la figure 9). Pour le cas général des complexes de modèles modaux, la réduction du domaine des liaisons aux liaisons orthogonales permet de calculer (numériquement) le modèle modal de l'assemblage à partir des modèles modaux des composants sans revenir à la structure topologique globale. Pour ce calcul, nous proposons ici un algorithme itératif de diagonalisation que l'on pourrait qualifier de "Jaccobi par blocs diagonaux", adapté à la structure des matrices représentant tels complexes. Cet algorithme permet une économie considérable de calcul.

L'idée est de généraliser la méthode utilisée pour le cas de deux modèles (C.1). Considérons la matrice Q somme directe des matrices déformées des différents modèles. Si K est la matrice d'élasticité du réseau assemblé, la matrice tQKQ a une structure en blocs, chaque bloc étant une matrice diagonale (non nécessairement carrée), les blocs diagonaux représentant les modes (perturbés) des différents modèles et un bloc (i,j) le couplage entre les modes du modèle i et ceux du modèle j .



Chaque itération consiste à annihiler par des rotations un bloc de liaison (i,j) , $i < j$, et à reporter les perturbations sur les blocs (i,k) ou (k,j) . Les perturbations sont calculées selon les formules explicitées en C.1. Il faut noter que ces itérations conservent la forme diagonale de chaque bloc. Donc, en gros, si les réseaux sont de tailles $n_1, \dots, n_p$, au lieu de diagonaliser une matrice à $(n_1 + \dots + n_p)^2$ coefficients, on se ramène à une matrice qui a au plus $(p(p+1)/2)N$ coefficients, N étant la taille du plus grand réseau. L'ordre des itérations peut être l'ordre naturel (ligne par ligne) et à chaque pas on n'effectue l'annihilation d'une liaison que si la norme de celle-ci dépasse un certain seuil fonction de la norme totale de la matrice.

IV - REMARQUES FINALES

Nous terminerons cet article par une réflexion sur la problématique soulevée dans l'introduction, c'est-à-dire celle de la conception d'un système de génération de modèles physiques pour la synthèse sonore, à l'intérieur d'un outil de création musicale. Rappelons encore que notre objectif n'est pas de mettre à la disposition du musicien un certain nombre de modèles modaux "reconnus" et préfabriqués, munis des options de "manipulations" de ceux-ci, mais de créer un outil qui permette au musicien de construire des objets selon ses propres références et imaginations et d'explorer ainsi son champ des perceptions sonores. En d'autres termes, nous voulons situer la continuité avec les contextes musicaux traditionnels non pas au niveau des instruments de musique existants mais plutôt au niveau de leurs fonctionnalités dans la relation instrumentale, leurs aspects et richesses perceptifs et cela à travers divers idiomes musicaux. Le musicien conçoit et crée alors ses propres objets sonores (instruments) à l'aide de l'ordinateur.

Ici apparaît le problème du choix de l'espace de représentation et du processus de génération de ces objets. Les modèles modaux présentant un double aspect structurel/perceptuel, (pour garantir une signification mécanique simple) nous définissons les processus de génération sur les traductions de ces modèles en réseaux d'interconnexions, sorte d'idéalisation ou de caricature (abstraction) d'objets physiques. L'espace des réseaux topologiques hérite, dans une large mesure, de la structuration des objets physiques.

Il en est de même pour la connaissance intuitive que l'on peut développer à leur égard. Par ailleurs, l'espace des perceptions sonores comporte également ses propres structures. Notre hypothèse de travail consiste alors à supposer que cette mise en correspondance des deux espaces est compatible avec leurs structurations et permet ainsi d'éclairer leurs reliefs et topologies respectifs.

Pour guider dans l'exploration de ces espaces, nous proposons la carte de l'assemblage, concept simple qui permet de générer par itérations le complexe à partir du simple. C'est dans ce cadre que les liaisons orthogonales (i.e. compatibles avec les structures modales) apparaissent comme des outils singuliers. Pour ces liaisons, il est possible, dans une certaine mesure, de prévoir (formellement et intuitivement) le résultat perceptif d'un assemblage. Nous n'avons pas résisté à la généralisation de l'assemblage binaire à un nombre quelconque, bien que là, en dehors des cas singuliers que nous avons évoqués (§ C.3), l'analyse mathématique est difficile. Reste à savoir s'il en est de même pour l'intuition qui peut se développer et se cultiver à travers l'expérience.

Un autre aspect de ce travail est l'étude de la topologie des réseaux mécaniques linéaires que nous espérons développer. Dans ce cadre l'étude des propriétés topologiques comme la symétrie, la régularité ou périodicité devrait être particulièrement intéressante. Par exemple, l'étude des complexes fibrés met en évidence une certaine dualité entre les niveaux macroscopique et microscopique (lorsque cette distinction est possible) qui semble correspondre à celle de forme et texture ou de permanence et variation. Enfin, sur le plan musical, ces réflexions ne peuvent prendre corps qu'à travers la pratique et l'expérimentation : observer la graine ne peut remplacer la saveur du fruit.

BIBLIOGRAPHIE

CADOZ C. 1989. "Référence et Artifice dans la Création Musicale par Ordinateur" *Rapport de recherche*. ACROE 89-1.

CADOZ C. 1988. "Informatique et outil de création musicale" *Marysas* n°7. Septembre 1988, pp 18-29.

FLORENS J. L., CADOZ C. 1991. "The physical Model. Modeling and simulating the instrumental Universe" in G. De Poli, A. Picciali, C. Roads, eds. *Representation of Musical Signals*. Cambridge MA. : MIT Press, pp. 227-268.

FLORENS J. L., RAZAFINDRAKOTO A., LUCIANI A. and CADOZ C. 1986. "Optimized real time simulation of objects for musical synthesis and animated image synthesis" *Proceedings of 1986 International Computer Music Conference*; pp 65-70.

LANCASTER P 1969. "Theory of Matrices" Academic Press, New York.

LANCASTER P. 1966. "Lambda-matrices and Vibrating Systems" Pergamon Press.

WILKINSON J. H. 1965. "The Algebraic Eigenvalue Problem" Oxford University Press.