



HAL
open science

Prédiction du comportement dynamique du béton à l'aide d'une représentation de sa méso-structure et d'éléments cohésifs

Fabrice Gatuingt, Leonardo Snozzi, Jean-François Molinari

► **To cite this version:**

Fabrice Gatuingt, Leonardo Snozzi, Jean-François Molinari. Prédiction du comportement dynamique du béton à l'aide d'une représentation de sa méso-structure et d'éléments cohésifs. 11ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2013, Giens, France. pp.Clé USB. hal-01017153

HAL Id: hal-01017153

<https://hal.science/hal-01017153>

Submitted on 1 Jul 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Prédiction du comportement dynamique du béton à l'aide d'une représentation de sa méso-structure et d'éléments cohésifs

Fabrice GATUINGT¹, Leonardo SNOZZI², Jean-François MOLINARI²

¹ LMT Cachan, ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6/PRES UniverSud Paris, fabrice.gatuingt@ens-cachan.fr

² LSMS, School of Architecture, Civil and Environmental Engineering (ENAC) – EPFL, prenom.nom@epfl.ch

Résumé — L'objectif de ce travail est de présenter un modèle numérique, basé sur la méthode des éléments finis avec interfaces cohésives frottantes, afin de pouvoir simuler la réponse dynamique en traction et en compression d'une éprouvette de béton. Le processus de séparation dans les interfaces cohésives est contrôlé par une loi (TSL) basée sur la loi linéaire extrinsèque irréversible proposé par Camacho et Ortiz [1]. Cette approche a prouvé son efficacité sur des matériaux fragiles et quasi-fragiles tels que les céramiques et les bétons [2]. Ici, nous considérerons que le béton peut être modélisé en utilisant une description mésoscopique de celui-ci dans laquelle les gros granulats et le mortier (considéré comme homogène) sont explicitement modélisés. Cela permet d'avoir des paramètres matériau peu nombreux et facilement identifiables. Les différentes phases sont alors supposées avoir un comportement élastique linéaire jusqu'à l'apparition des premières microfissures. L'initiation, la coalescence et la propagation de macro-fissures sont quand à elles modélisées par l'insertion - dynamique - d'éléments cohésifs. Un algorithme de contact qui s'appuie sur une loi de frottement de type Coulomb permet d'assurer la non interpénétration des éléments finis entièrement séparés.

Mots clés — Modèle zones cohésives, rupture dynamique béton, contact frottant, méso-modélisation

1 Introduction

Le béton armé est le matériau de construction le plus utilisé aujourd'hui dans l'ensemble des constructions sensibles (civiles ou militaires), en particulier si celles-ci peuvent être soumises à des impacts ou des explosions. Dans ces cas de chargements extrêmes, une analyse poussée de la réponse des structures implique de s'intéresser au comportement non-linéaire du béton. Dans ce cadre particulier de nombreux modèles de comportement macroscopique ont été développés [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Dans la plupart de ces modèles un effet de la vitesse de chargement sur la réponse est introduit pour rendre compte des observations expérimentales [14, 15], ce qui a pour effet d'augmenter sensiblement l'énergie dissipée lors de la rupture. Or la rupture des matériaux hétérogènes quasi-fragiles tels que le béton est un phénomène complexe, fortement non-linéaire qui dissipe de l'énergie en fonction de sa composition (mésostructure), de sa géométrie et des conditions aux limites. Celle-ci est induite par l'ouverture de micro-fissures locales qui peuvent propager, coalescer et dont les lèvres peuvent entrer en contact ce qui influencera le processus – non-linéaire – de rupture. L'objet de ce travail est ainsi d'investiguer numériquement le comportement du béton, à l'aide d'une description à l'échelle mésoscopique et d'éléments cohésifs, pour essayer de mieux comprendre et interpréter la rupture.

2 Approche numérique

La méthode des éléments cohésifs permet de modéliser la coalescence et la propagation dynamique de fissures pour des matériaux fragiles et quasi-fragiles [16, 17]. Le processus de fissuration est ainsi décrit par une approche cohésive (introduite par Dugdale [18] et Barenblatt [19] dans les années 60) qui considère que celui-ci se produit en pointe de fissure dans une région appelée zone cohésive. Cette approche est introduite dans un cadre élément fini standard en utilisant des éléments d'interface d'épaisseur nulle et de comportement basé sur des modèles de rupture. Nous supposons alors que le comportement en dehors des zones de rupture reste élastique linéaire. Dans notre cas nous considérerons également que

le trajet de fissure n'est pas connu *a priori* et que toutes les "lignes" du maillage font parties du trajet possible. Pendant la simulation, la contrainte à l'interface entre deux éléments adjacents est calculée et comparée à un critère de rupture à chaque fin de pas de temps (schéma d'intégration explicite). Si le critère est dépassé, les nœuds sont déboublés et un élément cohésif est introduit comme indiqué à la Figure 1. A partir de ce moment là, la contrainte à l'interface est contrôlée par la loi de comportement implémentée dans l'élément d'interface.

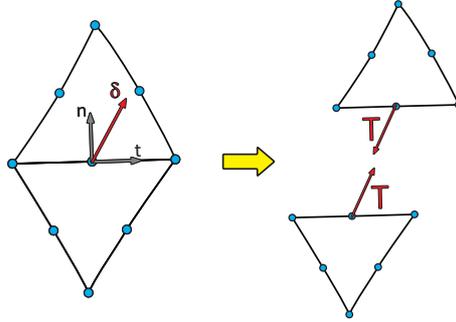


Fig. 1 – Principe de séparation des éléments

La formulation adoptée dans ce travail pour les interfaces cohésives frottantes s'appuie sur les travaux introduit dans [20, 21] et a été conçue pour des simulations en dynamique explicite. L'effort de traction à l'interface est supposé être une fonction d'un déplacement effectif (scalaire) de la forme suivante :

$$\delta = \sqrt{\frac{\beta^2}{\kappa^2} \Delta_t^2 + \Delta_n^2} \quad (1)$$

où Δ_n et Δ_t représentent la séparation normale et tangentielle de la surface cohésive. Le paramètre β tient compte du couplage entre le déplacement normal et tangentiel tandis que κ nous permet de définir un ratio entre l'énergie dissipée en mode II ($G_{c,II}$) et celle en mode I ($G_{c,I}$)

$$\kappa = \frac{G_{c,II}}{G_{c,I}} \quad (2)$$

Dans le cas d'une ouverture de fissure le vecteur traction est défini comme suit :

$$\mathbf{T} = \left(\frac{\beta^2}{\kappa} \Delta_t \mathbf{t} + \Delta_n \mathbf{n} \right) \frac{\sigma_c}{\delta} \left(1 - \frac{\delta}{\delta_c} \right) \quad \text{pour } \delta = \delta_{max} \quad (3)$$

où σ_c représente la résistance locale du matériau et δ_c le déplacement relative à décohésion complète, tandis que δ_{max} conserve l'ouverture maximale atteinte et permet de représenter l'irréversibilité de la loi (similaire à [1]). Décharge et recharge apparaissent si $\delta < \delta_{max}$, ce qui donne :

$$\mathbf{T} = \left(\frac{\beta^2}{\kappa} \Delta_t \mathbf{t} + \Delta_n \mathbf{n} \right) \frac{\sigma_c}{\delta_{max}} \left(1 - \frac{\delta_{max}}{\delta_c} \right) \quad \text{pour } \delta < \delta_{max} \quad (4)$$

La Figure 2 montre la loi d'interface utilisée en traction (loi TSL). Il est important de noter qu'aucune dépendance à la vitesse de chargement n'est introduit dans celle-ci.

Afin de pouvoir modéliser la refermeture des fissures nous avons couplé la loi TSL avec un algorithme de contact en y ajoutant une loi de frottement. Afin de conserver les avantages de l'intégration explicite, nous avons utilisé un algorithme explicite maître-esclave de type DCR développé par Cirak et West [22]. Cette méthode utilise la conservation du moment, tandis que la condition d'impenétrabilité est appliquée directement sur les déplacements, par exemple, en projetant les nœuds esclaves sur la surface maître pénétrée (Figure 3).

Afin de prendre en compte le frottement, le déplacement relatif entre le nœud esclave (en rouge sur la Figure 3) et les nœuds maîtres (en bleu sur la Figure 3) doit être calculé et modifié pour intégrer une loi de Coulomb. Les détails du calcul se trouvent dans [20].

La loi TSL et l'algorithme de contact ont ensuite été couplé. Cela signifie que si une fissure se développe pour un chargement de compression, on considère que les frottements apparaîtront dès la

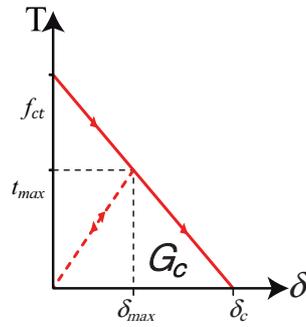


Fig. 2 – Loi TSL d’interface

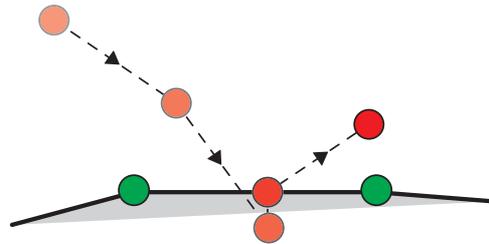


Fig. 3 – Projection du nœuds esclave sur la surface maître

création des fissures. Ceci est illustré à la Figure 4a où pour une fissure propageant en mode II, la contrainte de cisaillement doit dépasser $\beta\sigma_c + \mu\sigma_n$ afin d’activer la zone cohésive. A la fin du processus de décohesion (quand Δ_t atteint $\kappa\delta_c/\beta$) une énergie de rupture correspondant à $G_{c,II}$ multiplié par la longueur de la zone cohésive aura été dissipée. Celle-ci passera alors par une transition continue du décollement au frottement par glissement pur. Cette approche produit la surface de rupture représentée en Figure 4b. Chaque fois que la contrainte entre deux éléments atteint un point situé sur la ligne en pointillé un élément cohésif doit être inséré. Ne reste plus qu’à identifier les paramètres σ_c , δ_c , μ , κ et β à partir de simulations numériques et/ou de résultats expérimentaux.

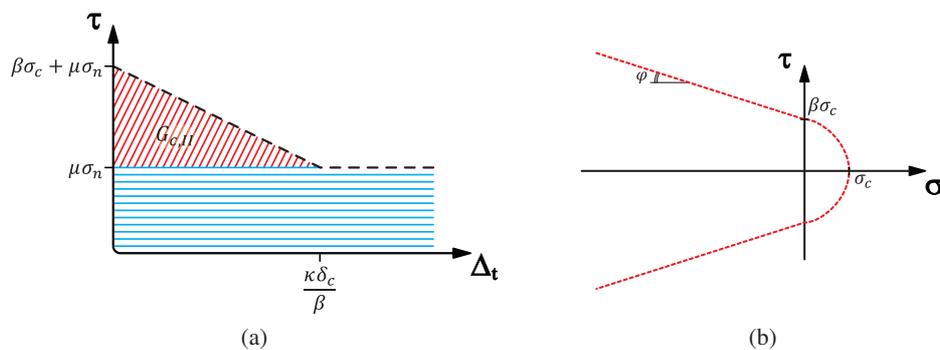


Fig. 4 – (a) Contrainte de cisaillement fonction du déplacement tangentiel pour une fissuration en mode II et (b) surface de rupture

3 Meso-modélisation du béton

Considérer le béton à l’échelle mésoscopique permet de le décrire comme un matériau bi-phasique : des granulats dans une matrice homogène (mortier). Dans notre modèle, seuls les plus gros granulats sont représentés (voir Figure 5) tandis que les plus petits sont pris en compte dans le comportement du mortier. Les éléments cohésifs présentés précédemment vont permettre de représenter la fissuration

dans le mortier, les granulats mais également dans la zone de transition (ITZ) entre les deux à l'aide de paramètres différents pour ces trois "domaines".

La géométrie des spécimens numériques a été obtenue en utilisant un générateur de polygones aléatoire et suivant la répartition de Fuller et Thompson [23] avec une valeur de l'exposant q égale à 0,7.

$$A(d) = \left(\frac{d}{d_{max}} \right)^q \quad (5)$$

Où $A(d)$ représente le pourcentage en masse cumulée des granulats d'un diamètre inférieur à d , d est le diamètre considéré et d_{max} la taille du plus gros granulats pris en compte dans le mélange.

La taille des échantillons (en 2D) que nous considérerons sera des carrés de 100 mm de côté. Une étude de convergence et de sensibilité au maillage a été effectuée dans [24], ce qui nous a permis de choisir ici une taille d'élément d'approximativement 0,5 mm.

L'approche mésoscopique adoptée impose de définir les propriétés matériau de tous les composants ; celles-ci sont définies en Table 1 à partir des propriétés usuelle du béton. De même nous choisirons les valeurs indiquées en Table 2 pour le comportement des interfaces cohésives. Les valeurs liées au mode I peuvent être plus difficiles à obtenir expérimentalement (voir [25]) que les paramètres d'élasticité. L'obtention expérimentale des paramètres liés au mode II (β , κ) est encore plus délicate et une étude paramétrique est indispensable et a été réalisée dans [20].

Tableau 1 – Propriétés élastiques des composants du béton

Matériau	Densité – ρ [kg/m^3]	Module de Young – E [GPa]	Coefficient de Poisson – ν [-]
Granulats	2700	75	0.2
Mortier	2200	30	0.2

Tableau 2 – Propriétés cohésive et paramètres des interfaces

Interface	G_c (J/m^2)	σ_c [MPa]	β	κ	μ
Aggregate	60	16	3	3	0.7
Mortar paste	50	4.7	3	3	0.7
ITZ	30	2.7	3	3	0.7

4 Simulation numérique de la réponse dynamique en traction et en compression

La Figure 5 montre l'échantillon ainsi que les conditions aux limites utilisées dans les simulations numériques.

Le chargement de traction appliqué est une vitesse imposée fonction de la vitesse de déformation moyenne $\dot{\epsilon}$ de l'échantillon souhaitée :

$$V_0 = \dot{\epsilon} \frac{h}{2} \quad (6)$$

où h est la hauteur total de l'échantillon. Pour éviter une rupture près des bords lors du chargement [26], tous les nœuds du maillage ont une vitesse initiale non nulle qui suit la répartition de la Figure 5. En compression le chargement est plus simple et seuls les nœuds du bord supérieur ont une vitesse constante et égale à V_0 :

$$V_0 = -\dot{\epsilon} h \quad (7)$$

Pour obtenir les courbes de comportement ci-après, nous considérerons la contrainte macroscopique comme étant la force de réaction aux appuis divisée par la largeur initiale de l'échantillon. La déformation moyenne sera calculée classiquement comme étant la variation de longueur de l'échantillon divisée par la longueur initiale. La Figure 6 montre le résultat obtenu pour $\dot{\epsilon} = 1$ /s. Nous voyons très clairement

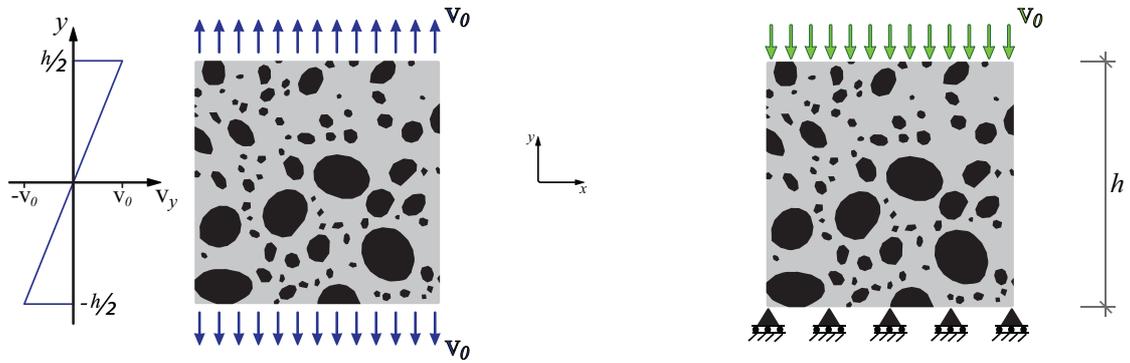


Fig. 5 – Tests de traction et de compression

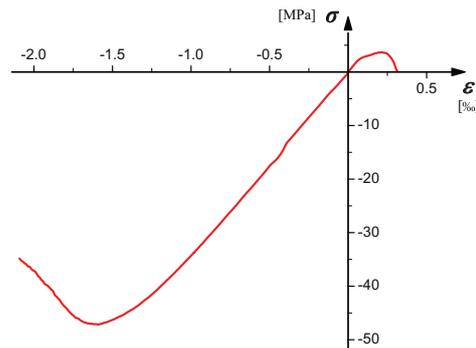


Fig. 6 – Comportement traction/compression de l'échantillon testé ($\dot{\epsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$)

que la dissymétrie traction/compression est bien représentée avec notre approche ou peu de paramètres matériau sont nécessaires en dehors de ceux liés à l'élasticité.

Maintenant que nous avons vu qu'il était possible de correctement représenter le comportement en traction et en compression d'un béton à l'aide de l'approche proposée, nous allons étudier l'influence de la vitesse de chargement. En effet, il est bien connu que la réponse expérimentale du béton exhibe une forte dépendance à $\dot{\epsilon}$ en traction [27, 15] et un peu moins en compression [28]. Les explications physiques à ces phénomènes sont nombreuses (présence d'eau, effet Stefan, confinement inertiel, ...), l'objectif de nos simulations étant alors de voir s'il est possible de retrouver ces effets de vitesse sans introduire de loi de comportement dépendant de $\dot{\epsilon}$ mais juste à partir de la description à l'échelle mésoscopique.

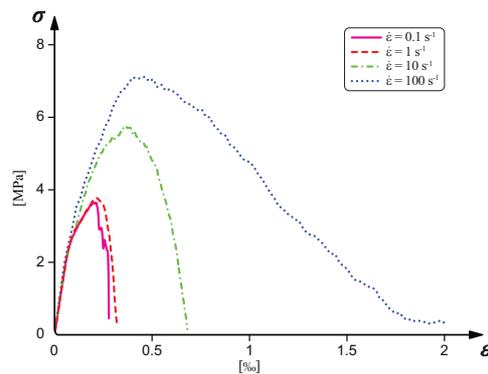


Fig. 7 – Influence de la vitesse de déformation sur la réponse en traction

La Figure 7 montre la réponse en traction de notre échantillon à différentes vitesses de chargement. Comme attendu on retrouve une résistance en traction qui augmente de façon importante lorsque $\dot{\epsilon}$ augmente. Néanmoins le facteur d'amplification dynamique (DIF) obtenu (résistance dynamique/résistance statique) est moins important que celui observé expérimentalement. La Figure 8 montre les différences

de fissurations obtenus dans les deux cas. Nous pouvons voir que nous passons d'une seule macro-fissure pour $\dot{\epsilon} = 0.1 /s$ à une fissuration diffuse pour $\dot{\epsilon} = 100 /s$. Ce processus de rupture d'une structure hétérogène différente en dynamique/statique arrive à lui seul à expliquer une grande partie de l'augmentation de la résistance et de l'énergie dissipée pendant la rupture (aire sous la courbe contrainte-déformation). Néanmoins, comme le DIF obtenu est plus faible que celui observé expérimentalement, cela signifierait qu'il est nécessaire d'ajouter un léger effet de vitesse dans la loi d'interface pour rendre compte d'un effet "visqueux" du matériau. Une étude plus approfondit doit permettre de mieux quantifier cela.

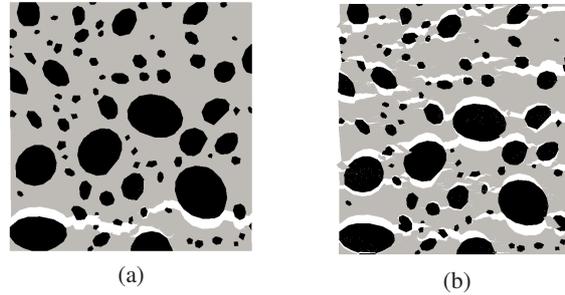


Fig. 8 – Influence de la vitesse de déformation sur la fissuration en traction : (a) $\dot{\epsilon} = 0.1 s^{-1}$, (b) $\dot{\epsilon} = 100 s^{-1}$. Déplacement $\times 100$.

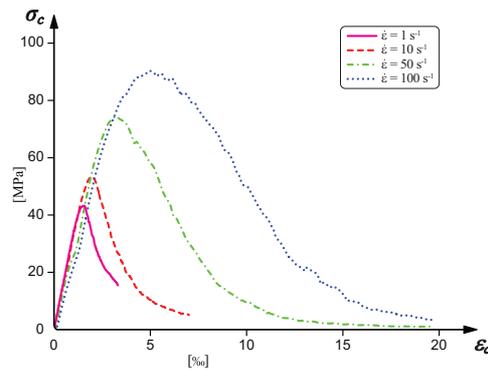


Fig. 9 – Influence de la vitesse de déformation sur la réponse en compression

La Figure 9 montre la réponse en compression de notre échantillon à différentes vitesses de chargement. Comme pour la traction, nous observons une augmentation de la résistance en fonction de la vitesse de chargement, avec un DIF égal à approximativement 2 (entre $\dot{\epsilon} = 1 s^{-1}$ et $100 s^{-1}$) ce qui correspond aux observations expérimentales. La Figure 10 montre les trajets de fissuration pour ces deux vitesses de chargement extrêmes dans nos simulations. Contrairement à la traction, nous n'obtenons pas une fissure unique pour les faibles vitesses de chargement ce qui implique que la différence est moins marquée par rapport aux grandes vitesses de déformations. L'augmentation de résistance en dynamique n'est donc plus due à la transition monofissure/multifissures mais plutôt au confinement inertiel – lié à l'effet Poisson – qui augmente lorsque $\dot{\epsilon}$ augmente.

En effet, des simulations de compression avec une pression de confinement latéral non nulle ont été réalisées dans [20] et montrent une augmentation notable de la résistance à rupture lorsque le confinement augmente. Ceci s'explique aisément en considérant que le confinement retarde l'apparition et l'ouverture des fissures.

5 Conclusions

Nous avons présenté un modèle mésoscopique du béton en 2D avec une approche par éléments finis avec interfaces cohésives et frottantes en dynamique transitoire. Cette approche nous permet de représenter les granulats et le mortier de façon explicite, permettant ainsi d'avoir peu de paramètres matériau

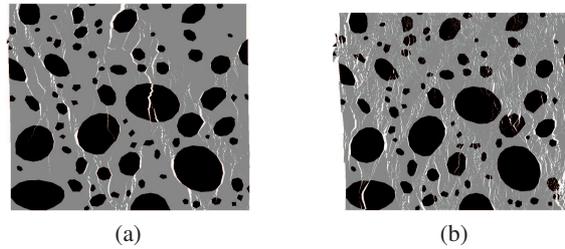


Fig. 10 – Influence de la vitesse de déformation sur la fissuration en compression : (a) $\dot{\epsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$, (b) $\dot{\epsilon} = 100 \text{ s}^{-1}$. Déplacement $\times 5$ pour (a) et $\times 3$ pour (b).

à identifier en dehors de ceux liés à l'élasticité. Les deux phases sont alors considérées avoir un comportement élastique tandis que l'initiation, la coalescence et la propagation des fissures sont modélisées par des éléments d'interface insérés de manière dynamique au cours du calcul.

Nous avons utilisé ce modèle pour simuler le comportement dynamique du béton en traction et en compression. A partir des résultats obtenus, nous pouvons en tirer les conclusions suivantes. Les simulations de la réponse en traction et en compression montrent que le modèle donne une augmentation de la résistance et de la déformation à rupture lorsque la vitesse de chargement augmente alors que la loi de comportement des interfaces est indépendante de celle-ci. Cette forte augmentation de la résistance et de l'énergie dissipée en traction réside principalement dans l'apparition d'une micro-fissuration diffuse à mesure que la vitesse de chargement s'accroît. Néanmoins, l'augmentation de résistance est moins importante que celle observée expérimentalement et il apparaît ici sûrement nécessaire d'ajouter un peu de "viscosité" dans le comportement des différentes phases du matériau. L'énergie dissipée en traction est elle aussi dépendante de la vitesse de chargement et la multi-fissuration est quasiment suffisante pour obtenir l'effet observé expérimentalement. A l'inverse, une comparaison de nos résultats de simulation en compression avec les études expérimentales indique que dans ce cas là seul le confinement inertiel suffit à expliquer l'augmentation de résistance. En ce qui concerne l'énergie dissipée en compression, nous avons une forte dépendance de celle-ci aux paramètres choisis pour le frottement au niveau de l'interface plus qu'à la multi-fissuration elle-même (déjà présente en statique). Il est important de souligner que notre modèle doit encore être amélioré pour mieux représenter l'ensemble des résultats expérimentaux, en particulier lorsque nous envisagerons de l'utiliser pour étudier le comportement en cisaillement du béton.

Références

- [1] G. T. Camacho and M. Ortiz. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22) :2899–2938, 1996.
- [2] G. Ruiz, A. Pandolfi, and M. Ortiz. Three-dimensional cohesive modeling of dynamic mixed-mode fracture. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 :97–120, 2001.
- [3] N. S. Ottosen. Constitutive model for short-time loading of concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division-ASCE*, 105(1) :127–141, 1979.
- [4] L. J. Sluys. *Wave propagation, localization and dispersion in softening solids*. Doct. Dissertation, Delft University of Technology–Delft, 1992.
- [5] J. F. Dubé, G. Pijaudier-Cabot, and C. La Borderie. Rate dependent damage model for concrete in dynamics. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 122(10) :939–947, 1996.
- [6] J. Sercombe, F. J. Ulm, and F. Toutlemonde. Viscous hardening plasticity for concrete in high-rate dynamics. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 124(9) :1050–1057, 1998.
- [7] Z. P. Bazant, F. C. Caner, M. D. Adley, and S. A. Akers. Fracturing rate effect and creep in microplane model for dynamics. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 126(9) :962–970, 2000.
- [8] F. Gatuingt and G. Pijaudier-Cabot. Coupled damage and plasticity modeling in transient dynamic analysis of concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26 :1–24, 2002.
- [9] G. Hervé, F. Gatuingt, and A. Ibrahimbegovic. On numerical implementation of a coupled rate dependent damage-plasticity constitutive model for concrete in application to high-rate dynamics. *Engineering Computations*, 22(5-6) :583–604, 2005.

- [10] R. R. Pedersen, A. Simone, and L. J. Sluys. An analysis of dynamic fracture in concrete with a continuum visco-elastic visco-plastic damage model. *Engineering Fracture Mechanics*, 75 :3782–805, 2008.
- [11] F. Gatuingt, R. Desmorat, M. Chambart, D. Combescure, and D. Guilbaud. Anisotropic 3D delay-damage model to simulate concrete structures. *Revue Européenne de mécanique numérique*, 17 :740–60, 2008.
- [12] C. Pontiroli, A. Rouquand, and J. Mazars. Predicting concrete behaviour from quasi-static loading to hyper-velocity impact An overview of the PRM model. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 14(6-7) :703–727, 2010.
- [13] R. Desmorat, F. Gatuingt, and F. Ragueneau. Nonstandard Thermodynamics Framework for Robust Computations with Induced Anisotropic Damage. *International Journal of Damage Mechanics*, 19(1) :53–73, 2010.
- [14] J. Weerheijm, I. Vegt, and K. van Breugel. The rate dependency of concrete in tension - New data for wet, normal and dry conditions. In *DYMAT 2009 : 9th International Conference on the Mechanical and Physical Behavior of Materials under Dynamic Loading, Vol. 1*, pages 95–101, 2009.
- [15] B. Erzar and P. Forquin. An Experimental Method to Determine the Tensile Strength of Concrete at High Rates of Strain. *Experimental Mechanics*, 50(7) :941–955, 2010.
- [16] S. Levy, J. F. Molinari, I. Vicari, and A. C. Davison. Dynamic fragmentation of a ring : Predictable fragment mass distributions. *Phys. Rev. E*, 82(6, Part 2), 2010.
- [17] L. Snozzi, A. Caballero, and J. F. Molinari. Influence of the meso-structure in dynamic fracture simulation of concrete under tensile loading. *Cement and Concrete Research*, 41 :1130–1142, 2011.
- [18] D. S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8 :100–108, 1960.
- [19] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7 :55–129, 1962.
- [20] L. Snozzi, F. Gatuingt, and J. F. Molinari. A meso-mechanical model for concrete under dynamic tensile and compressive loading. *International Journal of Fracture*, 178 :179–194, 2012.
- [21] L. Snozzi and J. F. Molinari. A cohesive element model for mixed mode loading with frictional contact capability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93 :510–526, 2013.
- [22] F. Cirak and M. West. Decomposition contact response (DCR) for explicit finite element dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64 :1078–1110, 2005.
- [23] W. B. Fuller and S. E. Thompson. The Laws of Proportioning Concrete. *Journal of Transportation Division*, 59, 1907.
- [24] F. Gatuingt, L. Snozzi, and J. F. Molinari. Numerical determination of the tensile response and the dissipated fracture energy of concrete : role of the meso-structure and influence of the loading rate. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, en ligne*, doi : 10.1002/nag.2181.
- [25] C. Rosselló, M. Elices, and G. V. Guinea. Fracture of model concrete : 2. Fracture energy and characteristic length. *Cement and Concrete Research*, 36 :1345–1353, 2006.
- [26] O. Miller, L. B. Freund, and A. Needleman. Modeling and simulation of dynamic fragmentation in brittle materials. *International Journal of Fracture*, 96(2) :101–125, 1999.
- [27] I. Vegt, R. R. Pedersen, L. J. Sluys, and J. Weerheijm. Modelling of impact behaviour of concrete - An experimental approach. In *Computational Modelling of Concrete Structures - EURO-C 2006*, pages 451–458, 2006.
- [28] P. H. Bischoff and S. H. Perry. Compressive behaviour of concrete at high strain rates. *Materials and Structures*, 24 :425–450, 1991.