HAL open science

Sur les traces d'opérateurs (De Grothendieck à Lidskii)

Didier Robert

▶ To cite this version:

Didier Robert. Sur les traces d'opérateurs (De Grothendieck à Lidskii). 2014. hal-01015295

HAL Id: hal-01015295
https://hal.science/hal-01015295v1

Preprint submitted on 26 Jun 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur les traces d'opérateurs
(De Grothendieck à Lidskii)

Didier Robert [a]

Présentation

Dans cet article je souhaite attirer l'attention du lecteur sur des notions qui sont classiques en algèbre linéaire mais qui peuvent devenir délicates à manier dans des espaces vectoriels de dimension infinie (muni d'une norme ou d'une topologie d'espace vectoriel). La théorie de Fredholm des équations intégrales, qui sera évoquée à la fin de l'article, a de fortes analogies avec les systèmes d'équations linéaires enseignés en Licence 1 et 2 à ceci près que les endomorphismes opèrent sur des espaces de Banach du type $C(K)$ (espace des fonctions continues sur un compact K) ou $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, pour une mesure donnée sur Ω. Dans la théorie de Fredholm les notions de trace, de déterminant, et leur relations avec les valeurs propres, jouent évidemment le même rôle qu'en dimension finie. L'article fondateur de Fredholm date de 1903 : "Sur une classe d'équations fonctionnelles" [Acta Mathematica, 27, p.365-390] alors que l'analyse fonctionnelle était peu développée. Il a été le point de départ de beaucoup de travaux qui ont motivé en partie les développements ultérieurs de l'analyse fonctionnelle tout au long du XXième siècle (Hilbert, Banach, Fréchet, Dieudonné, Schwartz, Grothendieck, Sobolev, Gelfand, Krein, et beaucoup d'autres...)
Plus récemment la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et l'analyse microlocale ont permis des avancées importantes dans la compréhension d'opérateurs non-auto-adjoints apparaissant en mécanique des fluides ou en mécanique quantique pour décrire les instabilités de certains systèmes. En effet la localisation dans le plan complexe de valeurs propres à partie imaginaire non nulle permet d'avoir des informations quantitatives sur les résonances du système (voir l'article de Zworski [**18**] pour une illustration de ces phénomènes). D'autre part les travaux récents (2009) de Sjöstrand [**16**] sur les formules de Weyl pour des opérateurs non-autoadjoints, perturbés aléatoirement, montre bien l'intérêt des déterminants en dimension infinie. En exploitant leurs propriétés fines comme fonction entière dans le plan complexe on obtient des informations sur les valeurs propres. Dans ces études la formule de trace de Lidsjkii joue un rôle fondamental.
Mon objectif ici est de raconter l'historique de cette formule, de rendre compte de son rôle dans les développements de l'analyse fonctionnelle ainsi que de son regain actualité dans des résultats récents.
A la fin de l'article je présente une esquisse de la preuve de la formule de Lidskii, proche de la démonstration originelle.

[a] Laboratoire Jean Leray, Université de Nantes. Didier.Robert@univ-nantes.fr

1. Introduction

Sur un espace vectoriel complexe $\mathcal{E}$ de dimension finie n la trace et le déterminant d'un endomorphisme A possèdent les deux propriétés fondamentales suivantes : ils sont invariants par conjugaison par automorphismes et s'expriment naturellement en fonction des valeurs propres de A (en utilisant une base qui triangule A).
Rappelons ici rapidement les résultats suivants bien connus d'algèbre linéaire.
Soient $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de $\mathcal{E}$ et $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ sa base duale dans $\mathcal{E}^*$, dual de $\mathcal{E}$.
On note par $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des endomorphismes de $\mathcal{E}$.
La trace de $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ est définie par l'égalité :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{1 \leq j \leq n} e_j^*(Ae_j). \tag{1}$$

Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Passons au déterminant.
Le produit extérieur de 2 formes linéaires u, v sur $\mathcal{E}$ est noté $u \wedge v$.

On note $L_n = e_1^* \wedge e_2^* \cdots \wedge e_n^*$ la forme n-linéaire alternée sur $\mathcal{E}^n$, $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de $\{1, \cdots, n\}$ et ε_σ la signature de σ. On a donc

$$L_n(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma e_1^*(x_{\sigma(1)}) \cdots e_n^*(x_{\sigma(n)}),\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{E}^n.$$

Le déterminant d'un endomorphisme A de E est défini par l'égalité suivante

$$\det A = L_n(Ae_1, \cdots, Ae_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma e_1^*(Ae_{\sigma(1)}) \cdots e_n^*(Ae_{\sigma(n)}). \tag{2}$$

$\det A$ est l'unique scalaire complexe tel que pour toute forme n-linéaire alternée f sur $\mathcal{E}^n$ on a

$$f(Ax_1, \cdots, Ax_n) = (\det A) f(x_1, \cdots, x_n),\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{E}^n. \tag{3}$$

On en déduit que $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ pour tout $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.
En particulier $\det A$ est indépendant de la base choisie. En choisissant une base triangulaire pour A on en déduit alors que $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, les λ_j étant les valeurs propres de A. Le polynôme caractéristique a donc pour exression

$$D_A(z) = \det(A - z\mathbb{1}) = \prod_{1 \leq j \leq n} (\lambda_j - z).$$

Dans la formule précédente, les valeurs propres sont répétées suivant leurs multiplicités.
En utilisant (2) on obtient les coefficients du polynôme caractéristique sous une forme qui fait apparaître des traces et qui s'étendra à la dimension infinie comme on le verra.
Pour cela on introduit les puissances tensorielles $\otimes^k \mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$, $k \geq 1$, et l'opérateur d'antisymétrisation défini pour $x_1, \cdots, x_k \in \mathcal{E}$ par :

$$\Pi_a(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(k)}.$$

Soient $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, $1 \leq j \leq k$; on définit un endomorphisme de $\otimes^k \mathcal{E}$ par :

$$A_1 \wedge A_2 \cdots \wedge A_k = \Pi_a (A_1 \otimes A_2 \cdots \otimes A_k) \Pi_a$$

et $\wedge^k A = \underbrace{A \wedge A \cdots \wedge A}_{k \text{ fois}}$. Avec ces notations on alors :

$$D_A(-z) = z^n + z^{n-1}\mathrm{Tr}(A) + \cdots z^k \mathrm{Tr}(\wedge^k A) + \cdots + z^0 \det A. \tag{4}$$

Notons que $\det A = \mathrm{Tr}(\wedge^n A)$. Les traces dans $\mathcal{L}(\otimes^k \mathcal{E})$ sont calculées dans la base $\{e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_k},\ (j_1, j_2, \cdots, j_k) \in \{1, \cdots, n\}^k\}$. On en déduit en particulier, en utilisant la propriété analogue vue pour le déterminant, que $\mathrm{Tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{Tr}(A)$ pour tout $B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ inversible et que $\mathrm{Tr} A = \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_j$.

Enfin la trace est l'unique forme linéaire sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ invariante par conjugaison, à multiplication par une constante près : si f est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ telle que $f(B^{-1}AB) = f(A)$ pour tout $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, B inversible, alors il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $f(A) = \mu \mathrm{Tr} A$, $\forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. La preuve de cette propriété est laissée en exercice au lecteur (indication : considérer d'abord les endomorphismes de rang 1).

Bien sûr en dimension finie il y a plusieurs manières d'aboutir à ces résultats, cette présentation a l'avantage de pouvoir s'étendre à la dimension infinie.

En dimension infinie les notions de trace et de déterminant sont plus difficiles à manier qu'en dimension finie, y compris dans les espaces de Hilbert, car on ne dispose pas, a priori, d'un outil équivalent à la triangulation pour des opérateurs quelconques. Pour aborder l'étude du spectre d'opérateurs compacts non diagonalisables (que l'on rencontre par exemple dans l'étude de systèmes dissipatifs et dans la théorie de Fredhlom des équations intégrales) il est très utile de pouvoir disposer d'une trace et d'un déterminant ayant des propriétés raisonnables, analogues à celles que l'on vient de rappeler pour la dimension finie.

Considérons un opérateur compact A de $\mathcal{H}$. On sait alors que le spectre de A, en dehors de 0, est constitué d'une suite de valeurs propres $\{\lambda_j(A)\}_{j \geq 1}$ de multiplicité finie. La multiplicité $\mu(\lambda)$ de la valeur propres $\lambda \neq 0$ est définie par

$$\mu(\lambda) = \dim[\mathcal{E}_\lambda(A)], \ \text{ si } \ \mathcal{E}_\lambda(A) := \bigcup_{k \geq 1} \ker(A - \lambda \mathbb{1})^k \ \ (sous - espace\ propre\ généralisé).$$

On convient d'écrire la suite $\{\lambda_j(A)\}_{j \geq 1}$ en répétant chaque valeur propre selon sa multiplicité.

En 1959, le mathématicien russe V.B. Lidskii démontre [**9**] que si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable et si A est un opérateur de classe-trace (définie plus loin) sur $\mathcal{H}$, et pour toute base orthonormée $\{e_n\}$ de $\mathcal{H}$, on a

$$\sum_{n \geq 1} \langle e_n, A e_n \rangle = \sum_{j \geq 1} \lambda_j(A). \tag{5}$$

On utilise ici la notation suivante : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur $\mathcal{H}$, supposé anti-linéaire par rapport au premier argument. On note par $\| \cdot \|$ la norme du $\mathcal{H}$ définie par le produit scalaire.

Cette égalité (5) peut sembler n'être qu'une extension anodine du cas de la dimension

finie. Cependant il a fallu attendre 1959 pour en avoir une preuve dans le cas général bien que quelques années avant Grothendieck disposait implicitement des éléments d'une preuve mais sans énoncer explicitement le résulat. D'autre part, comme on le verra, la preuve de Lidskii repose sur des arguments classiques (et astucieux) faisant intervenir des propriétés fines de fonctions entières.
Rappelons pour commencer une définition de la classe Hilbert-Schmidt et de la classe-trace (la terminologie "opérateur nucléaire" pour "opérateur de classe-trace" est aussi utilisée).

Définition 1.1. — Un opérateur A sur $\mathcal{H}$ est de classe Hilbert-Schmidt s'il existe une base orthonormée $\{e_n\}_{n\geq 0}$ de $\mathcal{H}$ telle que

$$\sum_{n\geq 1} \|Ae_n\|^2 < +\infty. \tag{6}$$

On montre que le membre de gauche de (6) est indépendant de la base orthonormée choisie et que cette condition entraîne que A est compact.
On dira que A est de classe-trace s'il existe une décomposition de A : $A = A_1A_2$ où A_1 et A_2 sont de classe Hilbert-Schmidt. Un opérateur positif A est de classe-trace si et seulement si $\sum_{j\geq 1} \lambda_j(A) < +\infty$.

L'ensemble des opérateurs de classe Hilbert-Schmidt et des opérateurs de classe-trace sont notés respectivement $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ et $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$. L'ensemble des opérateurs compacts sera noté $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ et l'ensemble des opérateurs bornés $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
Le lecteur aura deviné qu'il existe des classes $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ pour tout réel $p > 0$: $A \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ si et seulement si $(A^*A)^{p/2}$ est de classe-trace (A^* désigne l'adjoint hilbertien (i.e hermitien) de A). Pour $p \geq 1$, ce sont des espaces de Banach pour des normes naturelles notées $\|\cdot\|_p$; on utilisera souvent la convention $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|$ (norme uniforme pour les opérateurs bornés). Les $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ sont des idéaux bilatères normés de la C^*-algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (voir plus loin la définition).
Les espaces $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$, introduits par von Neumann et Schatten, portent le nom de classes de Schatten (voir [**4**]) pour leurs propriétés). Ces espaces ont des propriétés voisines des espaces L^p de Lebesgue (pour un espace mesuré) où la fonctionnelle trace "Tr" joue le rôle de l'intégrale. On a par exemple la relation : $\mathrm{Tr}(A^*A) = \|A\|_2^2$.

Il est alors clair que si A est de classe-trace on peut définir sa trace par la formule naturelle :

$$\mathrm{Tr}A = \sum_{n\geq 1} \langle e_n, Ae_n\rangle \tag{7}$$

L'absolue convergence de la série est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
On vérifie facilement que Tr est une forme linéaire continue sur $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, indépendante de la base orthonormée choisie, vérifiant $\mathrm{Tr}A^* = \overline{\mathrm{Tr}A}$ et $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour tout $A \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ et tout $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
Il était connu depuis H. Weyl (voir [**4**]) que si A est de classe-trace alors la série

$\sum_j \lambda_j(A)$ est absolument convergente. On donnera des détails plus loin.
On peut maintenant énoncer rigoureusement le résultat démontré par Lidskii.

***Théorème 1.2* (Lidskii [9]).** — *Pour tout opérateur A de classe-trace l'égalité (5) est satisfaite.*

Ce théorème peut être considéré comme le théorème fondamental pour l'analyse spectrale des opérateurs non auto-adjoints. En effet les valeurs propres d'un opérateur sont en général difficile d'accès (y compris dans le cas auto-adjoint) et un moyen souvent utilisé pour obtenir des informations est de pouvoir écrire une formule de trace du type

$$\mathrm{Tr}(f(A)) = \sum_{j\geq 1} f(\lambda_j(A)) \tag{8}$$

de sorte que le membre de gauche de (8) puisse être analysé, estimé, pour une famille de fonctions f convenables, dépendant d'un paramètre réel où complexe, puis de conclure par un argument du type taubérien(voir par exemple [**1**]).
Bien évidemment si A est de plus un opérateur normal ($AA^* = A^*A$) le théorème de Lidskii est trivial (A est alors diagonalisable) mais dans le cas général c'est un théorème subtil et profond. En raison de l'instabilité du spectre des opérateurs compacts non-auto-adjoints on ne peut pas passer facilement de la dimension finie à la dimension infinie.
On trouvera des preuves détaillées dans les livres [**4**], [**3**], [**15**], [**10**]. On peut remarquer que tous sauf [**3**] attribuent explicitement le résultat à Lidskii. L'article original de Lidskii (1959) est en Russe, il a été traduit en 1965 alors que [**3**] est paru en 1963. La preuve originale de Lidskii a été reprise et simplifiée dans [**4**]. Nous en expliquerons le principe à la fin de cet article.
Les preuves évoquées ci-dessus utilisent les propriétés d'une fonction déterminant comme fonction entière d'une variable complexe. D'autres preuves connues, plus algébriques, sont fondées sur la recherche de formes triangulaires en dimension infinie [**12**].

Dans sa thèse monumentale, publiée dans [**5**], Grothendieck a considérablement approfondi la question de définir une trace (et un déterminant) pour des classes générales d'opérateurs sur des espace de Banach ou de Fréchet.
Il a soutenu sa thèse d'État en 1953, préparée sous la direction de J. Dieudonné et L. Schwartz à l'université de Nancy. J'invite le lecteur à lire (ou relire) les quatre pages que L. Schwartz consacre à A. Grothendieck dans son livre de souvenirs "Un mathématicien aux prises avec le siècle" [p. 292-295, Odile Jacob - 1997].
Rappelons ici que Grothendieck a obtenu la médaille Fields en 1966 pour ses travaux en géométrie algébrique.
L'une des motivations de ses travaux de thèse était de donner un cadre général pour la théorie de Fredholm dans le prolongement des travaux de Schwartz sur le Théorème des noyaux [**6**].
Cependant une question ne semblait pas réglée : appliqués au cas particulier des espaces de Hilbert, les résultats de Grothendieck donnent certes une preuve de (5) mais pour une classe plus restreinte d'opérateurs que la classe naturelle des opérateurs à

trace $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$, à savoir pour $A \in \mathfrak{S}_{2/3}(\mathcal{H})$.
Dans [**10**, section (27.4.11)] A. Pietsch a obtenu une condition suffisante pour la validité de l'égalité (5) dans un espace de Banach quelconque contenant comme cas particuliers les formules de trace de Grothendieck et de Lidskii.
L'approche de Grothendieck pour la validité de (5) dans des espaces de Banach a été rediscutée dans [**11**].

2. L'approche de Grothendieck de l'égalité de trace (5)

La thèse de Grothendieck [**5**] est consacrée aux espaces vectoriels topologiques localement convexes et aux différentes classes d'opérateurs entre ses espaces. Nous ne considérons ici que le cas des espaces de Banach (voir aussi [**6**]).

Dans cette section $\mathcal{E}$ désigne un espace de Banach complexe, $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ l'algèbre des opérateurs bornés sur $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ le dual topologique de $\mathcal{E}$, la dualité étant notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (le crochet est ici bilinéaire).
$\mathcal{L}_F(\mathcal{E})$ désigne l'idéal des opérateurs de rang fini que l'on identifie au produit tensoriel $\mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}$ via l'application linéaire définie par $J(x' \otimes x)y = \langle y, x' \rangle y$.

On définit l'idéal $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ des opérateurs nucléaires en introduisant sur $\mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}$ la norme (appelée projective) définie par

$$\|u\|_\pi = \inf \big\{ \sum_{j \geq 1} \|x'_j\| \|x_j\|, \ u = \sum_{j \geq 1} x'_j \otimes x_j \big\}.$$

On note par $\mathcal{E}' \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}$ le complété de $\mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}$ pour cette norme.
L'injection canonique J se prolonge alors en une application linéaire J_π continue de $\mathcal{E}' \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. En général J_π n'est pas injective (voir [**5**]) mais elle l'est pour les espaces de Hilbert. La plupart des espaces de Banach utilisés possèdent cette propriété (par exemples les espaces L^p pour toute mesure μ et tout $1 \leq p \leq +\infty$) qui est reliée à la propriété d'approximation(voir [**5**]), le premier contre-exemple est dû à P.Enflo [1973].
L'ensemble $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$ des opérateurs nucléaires de $\mathcal{E}$ est l'image de $\mathcal{E}' \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ par J_π. C'est un idéal bilatère et un espace de Banach pour la norme quotient sur $\mathcal{E}' \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E} / \ker J_\pi$.
Dans la suite on supposera toujours que J_π est injective.
Pour tout A de rang fini la trace est naturellement définie par $\mathrm{Tr} A = \sum x'_j(x_j)$ si $A = J(u)$, $u = \sum_j \langle x_j \otimes x'_j \rangle$. On montre facilement que Tr se prolonge par continuité à $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$ en une forme linéaire telle que $|\mathrm{Tr}(A)| \leq \|A\|_1$ pour tout $A \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$. De plus Tr est invariante sur $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$: $\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)$ pour tout $T \in \mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.
Introduisons sur l'espace de Banach $\mathcal{E}$ une famille $\mathfrak{S}_p(\mathcal{E})$ d'idéaux pour $p > 0$. Soit A un opérateur linéaire continu dans $\mathcal{E}$, p un réel, $p > 0$.

Définition 2.1. — On dit que A est p-sommable s'il existe une suite x_j de $\mathcal{E}$, une suite x'_j de $\mathcal{E}'$, $\|x_j\| = \|x'_j\| = 1$, une suite de réels positifs $\sigma = \{\sigma_j\}$ tels que $\sum_{j\geq 1} \sigma_j^p < +\infty$ et

$$A(u) = \sum_{j\geq 1} \sigma_j \langle u, x'_j\rangle x_j, \ \forall u \in \mathcal{E}. \tag{9}$$

On note $\mathfrak{S}_p(\mathcal{E})$ l'idéal des opérateurs p sommables. On a clairement $\mathfrak{S}_p(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{S}_q(\mathcal{E})$ si $p \leq q$. Les opérateurs 1-sommables sont les opérateurs de classe-trace ou nucléaires. La trace est alors donnée par

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{j\geq 1} \sigma_j \langle x_j, x'\rangle. \tag{10}$$

Pour que cette définition ait un sens le membre de droite de (10) doit être indépendant de la représentation (9) de A. C'est le cas si $\mathcal{E}$ possède la propriété d'approximation car alors J_π est injective.
Clairement, tout opérateur p-sommable avec $p > 0$ est compact. On désigne par λ_j les valeurs propres non nulles de A répétées selon leurs multiplicités algébriques.
Dans [**5**] (Ch.I, p.171-177 et Ch.II, p. 20) Grothendieck a obtenu le résultat suivant :

***Théorème 2.2* (Grothendieck)**. — *On suppose que A est $2/3$-sommable. On a alors l'égalité*

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{j\geq 1} \lambda_j(A). \tag{11}$$

Dans le cas général des espaces de Banach le Théorème 2.2 est optimal : dans l'espace de Banach ℓ_1 des suites sommables il existe un opérateur N, p-sommable pour tout $p > 2/3$ tel que $N^2 = 0$ et $\mathrm{Tr}(N) = 1$ ([**10**], paragraphe 10.4.5).
Il peut sembler surprenant que Grothendieck n'ait pas abordé plus explicitement le cas particulier important des espaces de Hilbert. Dans le chapitre II de sa thèse, p.13, il affirme :
"Si $p \leq 1$, alors le déterminant de Fredholm de u est de genre 0". Avec nos notations : $u = A$ est supposé p-sommable. On rappellera dans la section suivante les propriétés des déterminants de Fredholm ainsi que la définition du genre pour une fonction entière (voir après la formule (16)).
A la fin de [**9**] Lidskii ajoute qu'il a pris connaissance du travail de Grothendieck [**5**] (et donc de la citation ci-dessus) alors que son article était sous presse.
Cette propriété du genre 0, les résultats sur la théorie de Fredholm [**6**] et le theorème de factorisation des fonctions entières de Weierstrass-Hadamard [**7**] donnent une preuve du Théorème 1.2 mais Grothendieck n'a ni énoncé le résultat ni poussé l'argument jusqu'au bout. Cette observation a été commentée dans plusieurs publications, en particulier dans [**11**].
Les théorèmes 1.2 et 2.2 ont été unifiés par Pietsch [**10**] de la manière suivante.
On désigne par ℓ_p l'espace des suites de nombres complexes de puissance p sommables, p' est le réel conjugué de p. Dans [**10**] l'auteur a étudié de nombreuses familles d'idéaux

d'opérateurs, il a introduit en particulier les idéaux suivants sur l'espace de Banach noté $\mathcal{B}$.

Définition 2.3. — On fixe 3 réels (r,p,q) tels que $r>0$ et $1+\frac{1}{r}\geq\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.
L'opérateur $A\in\mathcal{L}(\mathcal{B})$ est dit (r,p,q) nucléaire s'il existe une factorisation de A : $A=SD_{iag}(\sigma)R$ telle que $R\in\mathcal{L}(\mathcal{B},\ell_{q'})$, $S\in\mathcal{L}(\ell_p,\mathcal{B})$, $\sigma\in\ell_r$, $D_{iag}(\sigma)$ étant l'opérateur diagonal associé à σ.

On désigne par $\mathfrak{N}_{(r,p,q)}(\mathcal{B})$ l'ensemble des opérateurs (r,p,q) nucléaires de $\mathcal{B}$.
$A\in\mathfrak{N}_{(r,p,q)}(\mathcal{B})$ si et seulement si A admet une représentation

$$A=\sum_j \sigma_{j\geq 1}x'_j\otimes x_j$$

telle que $\sigma\in\ell_r$, $(x_j)\in\ell_{p'}(\mathcal{B})$ et $(x'_j)\in\ell_{p'}(\mathcal{B}')$; $\ell_p(\mathcal{B})$ désigne l'espace des suites de $\mathcal{B}$ qui sont faiblement dans ℓ_p.
En particulier $\mathfrak{N}_{(r,1,1)}$ coïncide avec l'ensemble des opérateurs r sommables de $\mathcal{B}$ et si $\mathcal{B}=\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert alors $\mathfrak{N}_{(1,1,2)}(\mathcal{H})=\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$.

Théorème 2.4 **(Pietsch [10])**. — *Pour tout opérateur $A\in\mathfrak{N}_{(1,1,2)}(\mathcal{B})$ on a $\sum_j|\lambda_j(A)|<+\infty$ et*

$$\mathrm{Tr}A=\sum_{j\geq 1}\lambda_j(A).$$

Il est facile de voir que $\mathfrak{N}_{(2/3,1,1)}(\mathcal{B})\subseteq\mathfrak{N}_{(1,1,2)}(\mathcal{B})$. Ce theorème contient donc les égalités de trace de Grothendieck et de Lidskii.

Remarque 2.5. — On notera que dans sa preuve Pietsch n'utilise pas la propriété d'approximation pour $\mathcal{B}$.

En 1988 Pisier [**11**] a introduit une classe d'espaces de Banach "faiblement hilbertiens", caractérisés par une condition sur le type et le cotype faibles. Il montre que dans ces espaces on a $\mathrm{Tr}A=\sum_{j\geq 1}\lambda_j(A)$ pour tout opérateur nucléaire A tel que $\sum_{j\geq 1}|\lambda_j(A)|<+\infty$.

3. Traces et fonctions invariantes

On montre facilement que toute forme linéaire continue et invariante f sur $\mathfrak{S}_1(\mathcal{B})$ est un multiple de la trace Tr (voir l'Introduction). Il est naturel de chercher sur $\mathfrak{S}_1(\mathcal{B})$ d'autres fonctions invariantes en particulier des fonctions polynomiales éventuellement sur d'autres idéaux de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.
Mentionnons ici que Dixmier a étudié une autre propriété de la trace : la normalité.
Soit $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ le cône des opérateurs positifs sur $\mathcal{H}$, espace de Hilbert séparable de dimension infinie. On dit qu'une fonction f sur $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ à valeurs dans $[0,+\infty]$, positive,

additive et homogène est une trace.
On dit que f est une trace normale si de plus elle est complétement additive : si $A = \sum_{n\geq 1} A_n$, $A_n \in \mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ alors $f(A) = \sum_{n\geq 1} f(A_n)$.
On montre facilement que toute trace normale est proportionnelle à la trace usuelle Tr.
Dixmier a montré qu'il existe sur $\mathcal{L}_+(\mathcal{H})$ une trace non normale, Tr_{D}, appelée depuis trace de Dixmier. Cette trace est identiquement nulle sur les opérateurs de rang fini. Dans son livre "Géométrie non commutative"[InterEditions-1990], A. Connes reproduit l'article de Dixmier et en a donne une application à la théorie perturbative des champs.
Nous allons maintenant considérer des fonctions polynomiales invariantes intervenant naturellement dans la théorie des déterminants de Fredholm.

Définition 3.1. — Un idéal bilatère $\mathfrak{S}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ est dit normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}}$ telle que

$$\|RAS\|_{\mathfrak{S}} \leq \|R\|\|A\|_{\mathfrak{S}}\|S\|.$$

Une une fonction f continue à valeurs complexes sur l'idéal $\mathfrak{S}$ est invariante si $f(T^{-1}AT) = f(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.
Cette propriété équivaut à $f(AT) = f(TA)$ pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Les espaces $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$, $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{E})$, $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$, $1 \leq p < +\infty$ sont des idéaux normés.
Dans cette section on va déterminer toutes les fonctions polynomiales invariantes sur l'idéal normé $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$ ainsi que sur les classes de Schatten $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ dans le cas hilbertien. Ce calcul a été réalisé indépendamment dans [**13**] et [**2**] avec des motivations différentes : dans [**13**] pour justifier une méthode numérique de calcul de valeurs propres pour des systèmes d'É.D.P. elliptiques, initiée par Fichera dans l'ouvrage "Linear elliptic systems and eigenvalue problems" [Lecture Notes in Math. No.8, Springer-Verlag-1965) et dans [**2**] pour l'étude des espaces classifiants de fibrés vectoriels.

On commence par calculer les fonctions polynomiales invariantes sur l'idéal $\mathcal{L}_F(\mathcal{E})$. On rappelle qu'une fonction polynomiale homogène de degré n sur un espace de Banach $\mathcal{B}$ est une application Φ de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{C}$ définie par une forme n-linéaire symétrique et continue $\tilde{\Phi}$ telle que $\Phi(A) = \tilde{\Phi}\underbrace{(A, \cdots, A)}_{n-fois}$ ($\tilde{\Phi}$ est unique).
Suivant [**6**] on obtient des formes invariantes fondamentales par un calcul tensoriel.
On désigne par $\overset{n}{\otimes}\mathcal{E}$ la nième puissance tensorielle de $\mathcal{E}$ et on identifie $\overset{n}{\otimes}(\mathcal{E}')$ naturellement avec $(\overset{n}{\otimes}\mathcal{E})'$. Soit Λ_n resp. Λ^n l'opérateur d'antisymétrisation sur $\overset{n}{\otimes}\mathcal{E}$ resp. $\overset{n}{\otimes}(\mathcal{E}')$. Alors Λ_n est un projecteur de $\overset{n}{\otimes}\mathcal{E}$ et $\Lambda'_n = \Lambda^n$. Si $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, $j = 1, \cdots, n$, on définit

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n = \Lambda_n(A_1 \otimes A_2 \cdots \otimes A_n)\Lambda_n$$

$(A_1, \cdots, A_n) \mapsto A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ est n-linéaire et symétrique et $\wedge^n \mathcal{L}_F(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{L}_F(\overset{n}{\otimes}\mathcal{E})$.
On vérifie que $A \mapsto \mathrm{Tr}(\wedge^s(A^n)) := \mathcal{J}^n_s(A)$ est une fonction polynomiale invariante sur

$\mathcal{L}_F(\mathcal{E})$ de degré sn, s, n entiers ≥ 1. $\mathcal{J}_s^n$ est un invariant élémentaire de type (s, n). On a la relation de récurence :

$$\mathcal{J}_s^n(A) = \frac{1}{s} \sum_{q=1}^{q=s} \mathcal{J}_1^{nq}(A) \mathcal{J}_{s-q}^n(A)$$

avec la convention $\mathcal{J}_0^n = 1$.
En utilisant une inégalité sur les déterminants due à Hadamard [**3**, (p.1018)] (et la formule de Stirling) on obtient :

$$|\mathcal{J}_s^n(A)| \leq \gamma_s \|A\|_1^{ns} \tag{12}$$

où $\gamma_s \leq C \left(\frac{e^2}{s}\right)^{\frac{s+1}{2}}$ dans le cas général et $\gamma_s = \frac{1}{s!}$ dans le cas des espaces de Hilbert, C étant une constante universelle.
On en déduit que $\mathcal{J}_s^n(A)$ se prolonge par continuité en une fonction invariante sur $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$ vérifiant en particulier (12) et (12).

Théorème 3.2 **([13, 2])**. — *On suppose $\mathcal{E}$ de dimension infinie. L'espace vectoriel $\mathcal{P}_n$ des fonctions polynomiales homogènes de degré $n \geq 1$, invariantes sur $\mathfrak{S}_1(\mathcal{E})$, est de dimension finie $p(n)$, nombre de décompositions de n en somme d'entiers. Chacune des deux familles suivantes est une base de $\mathcal{P}_n$:*

$$\begin{aligned} &\left\{(\mathcal{J}_1^1)^{r_1}(\mathcal{J}_1^2)^{r_2}\cdots(\mathcal{J}_1^n)^{r_n},\right\}_{r_1+2r_2+\cdots+nr_n=n} \\ &\left\{(\mathcal{J}_1^1)^{r_1}(\mathcal{J}_2^1)^{r_2}\cdots(\mathcal{J}_n^1)^{r_n},\right\}_{r_1+2r_2+\cdots+nr_n=n}. \end{aligned} \tag{13}$$

Dans le cas hilbertien ($\mathcal{E} = \mathcal{H}$) on a un énoncé analogue pour les classes de Schatten $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$, $1 \leq p < +\infty$ ([**13**]). En particulier toute fonction polynomiale invariante de degré $< p$ est identiquement nulle.
Les invariants élémentaires s'expriment dans une base orthonormée arbitraire $\{e_k\}$ de $\mathcal{H}$. Il est commode ici d'introduire le produit tensoriel hilbertien défini comme suit : si $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ sont deux espaces de Hilbert, la forme sesquilinéaire sur $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ définie par $\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle\langle x_2, y_2\rangle$ définit un produit scalaire. Le produit tensoriel hilbertien est l'espace de Hilbert noté $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes}_2 \mathcal{H}_2$ obtenu par complétion de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.
Soit A tel que A^n soit de classe-trace. Alors $\wedge^s A^n$ est de classe trace dans l'espace de Hilbert $\hat{\otimes}_2^s \mathcal{H}$ et on a

$$\mathcal{J}_s^n(A) = \mathrm{Tr}(\wedge^s A^n).$$

On en déduit

$$\mathcal{J}_s^n(A) = \frac{1}{s!} \sum_{k_1,\cdots,k_s} \det_{1\leq i,j\leq s} \langle e_{k_j}, A^n e_{k_i}\rangle$$

D'autre part il résulte du Theorème 1.2 une expression de $\mathcal{J}_s^n(A)$ en fonction des valeurs propres de A.

$$\mathcal{J}_s^n(A) = \mathcal{T}_s^n(A),$$

si

$$\mathcal{T}_s^n(A) = \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_s} \lambda_{j_1}(A)^n \lambda_{j_2}(A)^n \cdots \lambda_{j_s}(A)^n.$$

A partir de ces propriétés il y a deux manières d'introduire un déterminant. A étant de classe trace, suivant la présentation de Grothendieck [**6**], on introduit le déterminant de Fredholm :

$$\det(\mathbb{1} - zA) := \sum_{k\geq 0}(-1)^k z^k \mathcal{J}_k^1(A), \tag{14}$$

C'est une fonction entière de $z \in \mathbb{C}$ d'ordre 1 (dans un espace de Hilbert), ce qui résulte de l'inégalité (12).
L'autre définition consiste à partir directement des valeurs propres et du produit infini

$$D_A(z) := \prod_{j\geq 1}(1 - z\lambda_j). \tag{15}$$

On sait (17) que $\sum_{j\geq 1}|\lambda_j| \leq \|A\|_1$, par conséquent le produit infini définit une fonction entière d'ordre 1.
Le Théorème 1.2 équivaut à montrer que $\det(\mathbb{1} - zA) = D_A(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
Pour aller plus loin il est utile de rappeler le Théorème de factorisation de Weierstrass pour les fonctions entières (voir le livre de W. Rudin, Real and Complex Analysis).
Les facteurs de Weierstrass sont les fonctions entières définies par $E_0(z) = (1 - z)$ et pour $p \geq 1$, $E_p(z) = (1-z)\exp(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p})$. Soit f une fonction entière. On note par m la multiplicité de 0 si $f(0) = 0$ et par $\{z_n\}_{n\geq 1}$ la suite des zéros non nuls de f, ordonnées par modules croissants, répétés suivant leur multiplicité. Le théorème de factorisation de Weierstrass nous dit alors que f admet une factorisation (non unique) du type suivant

$$f(z) = z^m \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\big(\frac{z}{z_n}\big) \tag{16}$$

où g est une fonction entière et $\{p_n\}$ est une suite d'entiers.
On dit que f est de genre $\leq \mu$ s'il existe une décomposition de Weierstrass telle que pour tout n, $p_n \leq \mu$ et g est un polynôme de degré $\leq \mu$. Le genre est défini comme étant le plus petit entier positif ayant cette propriété. Par conséquent une fonction entière est de genre 0 signifie que f se factorise trivialement sur ses zéros :
$f(z) = az^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ (où a est une constante). Pour plus d'informations sur les fonctions entières et leurs zéros on pourra consulter par exemple B. Levin "Distribution of zeros of entire functions" [AMS Transl-1964].
Dans [**6**, Théorème 3] Grothendieck montre alors que les zéros de la fonction entière $F_A(z) = \det(\mathbb{1} - zA)$ sont exactement les valeurs propres $\lambda_j(A)$ (avec les multiplicités).
D'après le théorème de factorisation de Weierstrass on aura l'égalité $D_A = F_A$ si on montre que F_A est de genre 0. C'est la démarche suivie par Grothendieck dans les espaces de Banach généraux. Il montre en effet [**5**, p. 13-19] que si A est $\frac{2}{3}$-sommant alors F_A est de genre 0 et en déduit le Théorème 2.2.

Pour $A \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$, $p \geq 2$, entier, on introduit une régularisation du déterminant ([**3**])

$$\det_p(\mathbb{1} - zA) = \prod_j (1 - z\lambda_j) R_p(z\lambda_j), \quad R_p(z) = \exp\left[z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^{p-1}}{p-1}\right]$$

$\det_p(\mathbb{1} - zA)$ est une fonction entière de $z \in \mathbb{C}$ dont les zéros sont les inverses des valeurs propres non nulles de A.
On en déduit que pour tout $A \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$, $p \geq 1$, il existe $r > 0$ tel que pour $|z| < r$ on a

$$\det_p(\mathbb{1} - zA) = \exp\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\mathcal{T}_1^{p+k}(A)}{p+k} z^{p+k}\right) \tag{17}$$

Cette formule remonte à Poincaré.
Du théorème 1.2 on déduit les relations

$$\mathcal{J}_s^p(A) = \sum_{1 \leq k \leq s} \frac{(-1)^{k+s}}{k!} \left(\sum_{r_1 + r_2 + \cdots + r_k = s} \frac{\mathcal{J}_1^{pr_1}(A) \cdots \mathcal{J}_1^{pr_k}(A)}{r_1 \cdots r_k}\right).$$

Exemples

Considérons maintenant le cas où $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mu)$, μ étant une mesure borélienne sur un espace localement compact Ω.
L'opérateur A sur $\mathcal{H}$ est de classe Hilbert-Schmidt si et seulement si il existe un noyau intégral $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu^{\otimes 2})$ tel que pour $u \in L^2(\Omega, \mu)$ on a
$Au(x) = \int_\Omega K_A(x, y) u(y) dy$ et alors

$$\|A\|_2^2 = \mathrm{Tr}(A^* A) = \int_{\Omega \times \Omega} |K_A(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y).$$

Soit A un opérateur de classe trace, $A = A_1 A_2$, A_1, A_2 étant de classe Hilbert-Schmidt. Il en résulte que A a un noyau intégral :

$$K_A(x, y) = \int_\Omega K_{A_1}(x, z) K_{A_2}(z, y) d\mu(z).$$

Pour simplifier on suppose que K_A est continu sur $\Omega \times \Omega$. En utilisant le théorème de Fubini on obtient

$$\mathrm{Tr}(A) = \int_\Omega K_A(x, x) d\mu(x),$$

ainsi que pour tout $s \geq 1$,

$$\mathcal{J}_s^1(A) = \frac{1}{s!} \int_{\Omega^s} \left(\det_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq s}} K_A(x_i, x_j)\right) d\mu^{\otimes s}(x_1, \cdots, x_s),$$

expressions classiques de la théorie des équations intégrales de Fredholm que l'on trouve par exemple dans le cours de Goursat "Cours d'analyse mathématique" [vol III, Gauthiers-Villars-1943].

Une classe importante d'exemples d'opérateurs intégraux est fournie par les opérateurs pseudo-différentiels. Sur une variété compacte Riemannienne M de dimension d un opérateur pseudo-différentiel A (voir [**14**]) admet un noyau intégral K_A qui localement s'écrit :

$$K_A(x,y) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} a(x,\xi) \mathrm{e}^{i(x-y)\cdot\xi} d\xi$$

a étant une fonction lisse, à valeurs complexes, appelée symbole de A.
On suppose que a est un symbole classique elliptique d'ordre m. Son symbole principal a_m est alors une fonction homogène de degré m en ξ sur l'espace cotangent $T^*(M)$.
Si $m \leq 0$ alors A est borné sur $\mathcal{H} := L^2(M)$.
Si $m < -\frac{d}{p}$ alors A est dans la classe de Schatten $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$. Par exemple pour l'opérateur de Laplace-Beltrami $\triangle_M$ sur M, $(-\triangle_M + 1)^{-s}$ est de classe $\mathfrak{S}_p$ si $s > \frac{d}{2p}$.
Si $m < -d$ la trace de A est donnée (localement) par le formule :

$$\mathrm{Tr}A = (2\pi)^{-d} \int_{T^*(M)} a(x,\xi) dx d\xi.$$

Notons que le symbole a n'a en général pas de sens global sur une variété, seul le symbole principal (partie homogène de plus haut degré) est bien défini.
Le calcul symbolique sur les opérateurs pseudo-différentiels permet d'obtenir des informations sur les valeurs propres d'opérateurs différentiels elliptiques A (auto-adjoints ou non) sur une variété compacte. Les travaux de Seeley [**14**] sont à l'origine de nombreux développements du sujet. On trouvera dans [**1**] un exemple d'utilisation de ces techniques pour obtenir des formules asymptotiques sur le spectre d'opérateurs elliptiques non-auto-adjoints.

Dans le cas auto-adjoint on peut aller beaucoup plus loin dans les formules de trace et par exemple relier le spectre du Laplacien sur M à la géométrie (Selberg, Gutzwiller) ; ceci est un autre et vaste sujet avec une abondante littérature. Il existe également des extensions des traces pour des opérateurs qui ne sont pas de classe-trace par exemple les traces relatives (et les déterminants relatifs) introduits par Krein [**4**] ou par prolongement analytique d'une fonction zéta généralisée [**14**]. Par exemple si $A = -\triangle_M + 1$, la fonction $\zeta_A(s) := \mathrm{Tr}A^{-s}$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan complexe $\{s,\ \Re s > \frac{d}{2}\}$. ζ se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe dont les pôles appartiennent à la suite $s_j = \frac{d-j}{2}$. De plus ζ_A est régulière sur les entiers [**14**].

4. Esquisse de preuve du théorème de Lidskii

Commençons par présenter un outil basique pour l'étude des valeurs propres d'opérateurs non-auto-adjoints : les inégalités de Weyl ([**4**, (p. 35-41)].
Soit A un opérateur compact de $\mathcal{H}$. On considère la suite $\{\lambda_j(A)\}$ de ses valeurs propres non nulles (si elles existent) ordonnée par ordre de module décroissant, répétées suivant leur multiplicité. Soit d'autre part la suite $s_j(A)$ des valeurs propres > 0 de $|A| := \sqrt{A^*A}$, appelées valeurs singulières (ou caractéristiques) de A. On a pour tout

entier $N \geq 1$ et tout réel $p >, r > 0$, les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |\lambda_1(A)\lambda_2(A)\cdots\lambda_N(A)| &\leq s_1(A)s_2(A)\cdots s_N(A) \\ \sum_{1\leq j\leq N} |\lambda_j(A)|^p &\leq \sum_{1\leq j\leq N} (s_j(A))^p \\ \prod_{1\leq j\leq N} (1+r|\lambda_j(A)|) &\leq \prod_{1\leq j\leq N} (1+rs_j(A)). \end{aligned}$$

On a de plus $\|A\|_1 = \sum_{j\geq 1} s_j(A)$.

Rappelons que $D_A(z) := \prod_{j,\geq 1}(1 - z\lambda_j)$. D'aprés la troisième inégalité de Weyl on a

$$|D_A(z)| \leq \mathrm{e}^{|z|\|A\|_1},\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{18}$$

On suppose d'abord que A est de classe trace, sans valeur propre non nulle. C'est équivalent à $\lim_{n\to+\infty} \|A^n\|^{1/n} = 0$ (i.e A est quasi-nilpotent).

Un exemple élémentaire d'opérateur quasi-nilpotent : l'opérateur d'intégration noté $Ku(x) = \int_0^x u(y)dy$, défini sur $\mathcal{H} = L^2[0,1]$, pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

On vérifie directement que K n'a pas de valeurs propres (il est injectif). Il n'est pas de classe-trace mais il est de classe de Schatten $1+\varepsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. En particulier K^2 est quasi-nilpotent de classe-trace.

Soit Π_N une suite croissante de projecteurs orthogonaux de $\mathcal{H}$ de rang N convergent fortement vers l'identité sur $\mathcal{H}$. Alors $A_N := \Pi_N A \Pi_N$ converge vers A dans $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ et en particulier dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

On pose $\lambda_j^{(N)} = \lambda_j(A_N)$ et $D_N = D_{A_N}$. On en déduit que $\lim_{N\to+\infty} |\lambda_1^{(N)}| = 0$.

D'autre part en calculant la dérivée logarithmique $\frac{D'_N(z)}{D_N(z)}$ on montre que

$$D_N(z) = \exp\left(-\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\mathcal{T}_1^{1+k}(A_N)}{1+k} z^{1+k}\right).$$

On rappelle que pour tout entier s on a ici

$\mathcal{T}_1^s(A_N) = \mathrm{Tr}(A_N^s) = \sum_{j=1}^N (\lambda_j^{(N)})^s$ car A_N est de rang fini N.

Or il résulte de la deuxième inégalité de Weyl que l'on a

$|\mathcal{T}_1^{1+k}(A_N)| \leq \|A_N\|_1 |\lambda_1^{(N)}|^k$

d'où l'on déduit, posant $a = \mathrm{Tr}(A)$ et utilisant la continuité de la trace,

$$\lim_{N\to+\infty} D_N(z) = \mathrm{e}^{-az}. \tag{19}$$

On montre maintenant que $\mathrm{Tr}A = 0$ en établissant que si $a \neq 0$ alors D_N est à croissance polynomiale, uniformément par rapport à N, ce qui donne une contradiction avec (19).

Il résulte des inégalités de Weyl et de $s_j(A_N) \leq s_j(A)$ que l'on a

$$|D_N(z)| \leq \prod_{j\geq 1}(1+s_j(A)|z|) \leq \prod_{1\leq j\leq M}(1+s_j(A)|z|)\exp\left(|z|\sum_{j\geq M+1} s_j(A)\right).$$

On choisit M tel que $\displaystyle\sum_{j\geq M+1} s_j(A) \leq \frac{|a|}{2}$ et $z = \mathrm{e}^{-ia\arg a}r$, $r>0$, on obtient

$$\mathrm{e}^{r|a|/2} \leq \prod_{1\leq j\leq M}(1+s_j(A)r),$$

d'où la contradiction.
Le théorème de Lidskii est ainsi démontré pour les opérateurs de classe-trace quasi-nilpotents. Pour le cas général on décompose l'espace de Hilbert en deux sous-espaces orthogonaux $\mathcal{H} = \mathcal{H}_D \bigoplus \mathcal{H}_N$, $\mathcal{H}_D = \bigoplus_{j\geq 1} \mathcal{E}_{\lambda_j}(A)$ (somme de tous les sous-espaces spectraux généralisés de valeurs propres $\neq 0$). Soient P le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}_D$ et $P^\perp = \mathbb{1} - P$. On a alors

$$A = PAP + PAP^\perp + P^\perp AP + P^\perp AP^\perp.$$

Or $\mathrm{Tr}(P^\perp AP) = \mathrm{Tr}(PAP^\perp) = 0$ (invariance de la trace). D'autre part $P^\perp AP^\perp$ est quasi-nilpotent. En effet, P commute avec A donc A^* commute avec $P^\perp$, or A^* est quasi-nilpotent d'où la propriété pour $P^\perp AP^\perp = (P^\perp A^* P^\perp)^*$. Enfin PAP est une somme de blocs de Jordan contenant exactement les valeurs propres de A avec leurs multiplicités.

Ce qui termine la preuve du Théorème 1.2 puisque la trace est linéaire.

5. Qui était Lidskii ?

On donne ici quelques éléments biographiques, le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans l'introduction de l'ouvrage consacré à l'oeuvre mathématique de Lidski édité par deux de ses anciens élèves M. Levitin et D. Vassiliev *"Operator Theory and its applications"*[AMS Transl-2010].
Victor Borisovisch Lidskii est né en 1924 à Odessa, il est décédé à Moscou en 2008.
Il a soutenu sa thèse de doctorat à l'université de Moscou, sous la direction de I.M. Gelfand, en 1954, sur le sujet suivant *"Conditions for the completeness of the system of root subspaces of non-self-adjoint operators with discrete spectra"*. Il a été professeur à l'université FizTech de Moscou de 1961 à 2008 ainsi qu'à l'Institut pour les problèmes de mécanique de l'académie des sciences de l'URSS.
L'université Fiz Tech a été créée en 1946 dans la banlieue de Moscou pour favoriser la recherche en physique (en lien avec les programmes nucléaires et spatiaux de l'URSS) ; elle bénéficiait d'un statut privilégié.
Lidskii a été avec Gohberg et Krein l'un des pionniers de l'analyse spectrale des opérateurs non-auto-adjoints.
Il était devenu un expert reconnu du domaine, à la fois pour la partie théorique et

ses applications, notamment en mécanique : équations de l'élasticité et de l'hydro-élasticité, théorie des coques minces. Dans ces domaines il a accompli une oeuvre importante. Son résultat le plus connu est certainement le Théorème 1.2. Ses travaux connaissent un regain d'actualité avec les développements récents sur le spectre d'opérateurs non-auto-adjoints et sur le pseudo-spectre dont on trouvera dans [**17**] un aperçu.

Un autre résultat connu de Lidskii concerne une extension d'inégalités de Weyl pour les valeurs propres de matrices hermitiennes.
Soient A, B, 2 matrices hermitiennes de taille n. On note $\{\lambda_j(A), 1 \leq j \leq n\}$ la suite des valeurs propres de A ordonnées par ordre décroissant.

***Théorème 5.1* (inégalités de Lidski, 1950)**. — *Pour toute partie J de $\{1, 2, \cdots, n\}$ de cardinal k on a*

$$\sum_{j \in J} \lambda_j(A+B) \leq \sum_{j \in J} \lambda_j(A) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(B). \tag{20}$$

Il s'agit également d'un résultat important obtenu à la suite d'un travail de Berezin et Gelfand sur les groupes de Lie [**8**]. L'inégalité (20) est reliée à des propriétés géométriques concernant les variétés de Schubert et la théorie des représentations. On trouvera dans l'article de R. Bhatia, "Linear algebra to quantum cohomology : the story of Horn's inequality"[Amer. Math. Monthly-2001] une introduction pédagogique à ce sujet. L'inégalité (20) a aussi des applications en analyse numérique. Mais ces questions sortent du cadre de cet article.

Remerciements : Ce travail a été soutenu par le projet ANR "NOSEVOL" ANR-2011-BS01019 01.

Références

[1] M.. S. Agranovich and A. S. Markus. On spectral proterties of elliptic pseudo differential operators far from self-adjoint ones. *Zeitschrift für analysis und ihre Anwendungen*, 8(3) :237–260, 1989.

[2] P. de la Harpe and R. Ramer. Polynômes invariants sur les algèbres de Lie banachiques complexes classiques d'opérateurs compacts dans l'espace hilbertien. *C.R.A.S Paris*, pages 824–827, 1972.

[3] N. Dunford and J.T. Schwartz. *Linear operators*, volume II. InterScience Publishers, 1963.

[4] I. C Gohberg and M.G. Krein. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space.* Translations of mathematical monographs, vol. 18. A.M.S., 1969.

[5] A. Grothendieck. *Produits tensoriels topologiques.* A.M.S, 1955. résumé : séminaire N. Bourbaki, 1951–1954, exp. No. 69, p. 193–200.

[6] A. Grothendieck. Théorie de Fredholm. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 84 :319–384, 1956.

[7] B. N. Ja. Levin. *Distribution of zeros of entire functions*, volume 5. Amer. Math. Soc. Transl., 1964.

[8] V.B. Lidskii. On the characteristic numbers of sum and product of symmetric matrices. *Dokl. Akad. Nauk. SSR*, 75 :769–772, 1950. in russian.

[9] V.B. Lidskii. Non-selfadjoint operators with a trace. *Dokl. Akad. Nauk. SSR*, 125 :485–487, 1959. Amer. Math. Soc. Transl. (2) 47 (1965) 43–46.

[10] A. Pietsch. *Ideals of operators*. North-Holland Publishing Company, 1980.

[11] G. Pisier. Weak Hilbert spaces. *Proc. London Math.Soc.*, 56 (3) :547–579, 1988.

[12] S.C Power. Another proof of Lidskii's theorem on the trace. *Bull. London Math. Soc.*, 15 :146–148, 1983.

[13] D. Robert. Invariants orthogonaux pour certaines classes d'opérateurs compacts. *C.R.A.S Paris*, 273 :301–304, 1971.

[14] R. Seeley. Complex powers of an elliptic operator. In *Singular integrals (proc. Symp. Pure Math. 10)*, pages 288–307. Providence R.I. :Amer. Math. Soc., 1967.

[15] B. Simon. *Trace ideals and their applications*. A.M.S., 1979.

[16] J. Sjöstrand. Eigenvalue distribution for non-self-adjoint operators with small multiplicative random perturbations. *Annales Fac. Sci. Toulouse*, 18 :4 :739–795, 2009.

[17] J. Sjöstrand. Spectral properties of non-self-adjoint operators, 2009. Journées ÉDP, Évian, http ://jedp.cedram.org/item ?id=$JEDP_2009_A1_0$.

[18] M. Zworski. Resonances in Physics and Geometry. *Notices of the AMS*, 46 :3 :319–328, 1999.