



**HAL**  
open science

## Stratégie de modélisation de type poutre pour une large variété de problèmes sismiques

J. Mazars, Panagiotis Kotronis, S. Ghavamian

### ► To cite this version:

J. Mazars, Panagiotis Kotronis, S. Ghavamian. Stratégie de modélisation de type poutre pour une large variété de problèmes sismiques. Vème Colloque National Génie Parasismique et réponse dynamique des ouvrages AFPS'99, 1999, Cachan, France. pp.525-533. hal-01008960

**HAL Id: hal-01008960**

**<https://hal.science/hal-01008960>**

Submitted on 7 Jan 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**STRATEGIE DE MODELISATION DE TYPE POUTRE  
POUR UNE LARGE VARIETE DE PROBLEMES SISMIQUES**  
*MODELING STRATEGY FOR A LARGE NUMBER OF SEISMIC PROBLEMS*

**Jacky MAZARS\*, Panagiotis KOTRONIS\*, Shahrokh GHAVAMIAN\***

**RESUME**

On aborde le calcul des structures de béton à partir de modèles de comportement utilisant endommagement et plasticité dans une description par éléments poutres multicouches adaptée aux structures normalement élancées. Pour les grands élancements les non-linéarités géométriques sont introduites et pour les faibles élancements une cinématique de distorsion des sections est considérée. Enfin lorsque le cisaillement est la sollicitation majeure on utilise l'équivalence avec un treillis composite de barres non linéaires acier et béton. Des applications montrent l'intérêt de l'approche.

**Mots clés :** béton armé, comportement sismique non-linéaire, méthodes simplifiées.

**ABSTRACT**

Structural modeling for concrete structures is described using damage mechanics and plasticity through layered beam elements, which are adapted for structures with classical slenderness. For large slenderness, geometrical non-linearities are introduced and, on the other side, when slenderness is low, the warping of sections is included in the model. In the specific case where shear is the main load a composite lattice model is used with non-linear steel and concrete bars. Applications demonstrate the interest of these approaches.

**Keywords :** reinforced concrete, seismic non-linear behavior, simplified models.

**1. INTRODUCTION**

D'une façon générale, la simulation du fonctionnement des structures sous chargements sévères en dynamique conduit à des problèmes de grande taille, dont la résolution est délicate. Le conditionnement de ce problème pour permettre une bonne accessibilité à une solution physiquement réaliste est un enjeu fondamental pour l'ingénierie. Dans ce contexte, nous développons au LMT Cachan, des « méthodes simplifiées » qui s'appuient, autant que faire se peut, sur des hypothèses simplificatrices compromettant, le moins possible, la richesse et la qualité des résultats.

---

\* Laboratoire de Mécanique et Technologie, ENS Cachan / CNRS / Uni. Paris 6, 94235 Cachan cedex

La réponse d'un ouvrage soumis à un chargement sévère résulte d'une forte interaction entre les effets « matériaux » (non-linéarités locales), les effets « structures » (géométrie, répartition des masses,

liaisons) et les effets de l'environnement (interaction support-structure). Dans le cas d'un ouvrage en béton, les non-linéarités locales sont notamment liées à la formation, à l'ouverture et à la refermeture des fissures d'une part, à la liaison et au comportement des armatures d'autre part. Une bonne description de ces phénomènes est un passage obligé si l'on veut représenter les variations de raideurs de la structure et avoir accès au comportement jusqu'à la ruine. La discrétisation de la structure est un point essentiel car un compromis doit être trouvé, 1/ entre la nécessité d'une description fine pour permettre un bon positionnement des masses et espérer accéder aux localisations des dommages, et 2/ une représentation grossière qui rend le calcul plus facilement accessible.

Une telle approche, dite par "éléments finis simplifiés" a été implémentée dans le code EFICOS-LMT. Nous proposons ici une présentation incluant les points essentiels : le comportement des matériaux, les particularités de discrétisations et de formulations adaptées au type de problème traité. Quelques exemples d'applications sismiques illustrent le propos.

## 2. LOIS DE COMPORTEMENT POUR LES MATERIAUX

### 2.1. Béton

Les comportements non linéaires des matériaux sont modélisés par des modèles locaux. Celui utilisé ici pour le béton est basé sur la mécanique de l'endommagement (Lemaître 1988, Mazars 1984). Ce modèle, développé au L.M.T. Cachan (Laborderie 1991), est adapté à la description du comportement endommageable généré par la création de microfissures (abaissement des raideurs) et le fonctionnement lié, au cours de cycles, à leur refermeture (unilatéralité). Deux variables d'endommagement scalaire sont utilisées, l'une en traction  $D_1$ , l'autre en compression  $D_2$ , agissant sur la rigidité des matériaux et générant des déformations permanentes  $\varepsilon^p$

La loi de comportement qui en résulte est schématiquement décrite ci-dessous :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p = \text{elastic} + \text{permanent, strains} \quad (1)$$

$$\underline{\varepsilon}^e = \frac{\underline{\sigma}^+}{E_0(1-D_1)} + \frac{\underline{\sigma}^-}{E_0(1-D_2)} + \frac{\nu}{E_0}(\underline{\sigma} - \text{Tr}\underline{\sigma}\underline{1}) \quad (2)$$

$$\underline{\varepsilon}^p = \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} \frac{\partial f(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} \underline{1} \quad (3)$$

$E_0$ , module d'Young du matériau sain;  $\nu$ , coefficient de Poisson.

$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^+ + \underline{\sigma}^-$ , avec  $\underline{\sigma}^+$  et  $\underline{\sigma}^-$  respectivement "tenseur des tractions" et « tenseur des compressions »

$D_1$  et  $D_2$  sont respectivement les variables d'endommagement de traction et de compression. Leur évolution entre 0 (matériau sain) à 1 (matériau rompu) est liée à celle de l'énergie élastique locale.  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont des constantes dont la valeur est liée à l'évolution des déformations permanentes et  $f(\underline{\sigma})$  est la fonction de réglage de l'ouverture-fermeture des fissures.

La figure 1 représente la réponse uniaxiale du modèle pour un chargement en traction-compression.

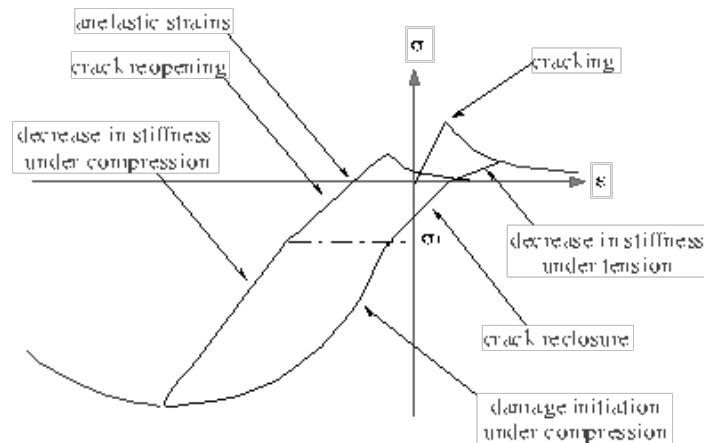


Figure 1. Réponse en traction-compression du modèle de béton. ( $\sigma_f$  = contrainte de refermeture des fissures/ Tension-compression behavior of concrete (Crack closure stress).

## 2.2. Acier

Le comportement des armatures utilise un modèle classique d'élastoplasticité avec écoulement cinématique (Lemaître 1988). Celui-ci peut être linéaire ou non selon la qualité des informations dont on dispose sur les armatures utilisées et l'utilisation d'un critère de rupture, en déformation, est possible.

## 3. CHOIX D'UNE DISCRETISATION E.F. ADAPTEE

Le programme de calcul E.F. utilisé est le code EFICOS – LMT. Il est adapté pour traiter les problèmes de structures planes en béton armé en statique et dynamique. Il utilise exclusivement des éléments barres ou poutres de type multicouches. De cette manière les comportements locaux sont généralement traités par des lois uniaxiales (1D), sauf pour le cas de poutres courtes cisailées ou une composante de cisaillement est introduite (1,5D). Le cadre "méthodes simplifiées" ainsi proposé conduit à générer des problèmes de taille raisonnable par rapport à ceux traités par des calculs éléments finis 2D classiques.

Cependant pour faire face à une large variété de problèmes, du point de vue de l'élancement et du type de sollicitation, des enrichissements doivent être apportés au modèle. L'objet de la présentation qui suit est de montrer comment on aborde avec les outils présentés les différents types de problèmes.

### 3.1. Structures normalement élancées

Il s'agit de structures de type "poutre" représentées par des éléments de type "multicouches". Ces éléments comportent deux noeuds et sont composés de couches superposées au comportement non linéaire et spécialisées selon qu'elles intègrent ou non les armatures (Figure 2). L'hypothèse de Navier-Bernoulli sur les sections droites confère aux couches un comportement uniaxial (Mazars 1998).

Au niveau des couches, l'introduction des armatures utilise une loi de mélange, supposant un non-glissement entre l'acier et le béton [1 à 4].

Dans chaque couche :

$$\varepsilon = \varepsilon_{acier} = \varepsilon_{béton} \quad [1] \quad \begin{array}{l} E_b \text{ module béton} \\ E_a \text{ module acier} \end{array}$$

$$E = (1 - C_a I_b) E_b + C_a I_b E_c \quad [2] \quad E \text{ module homogénéisé (a + b)}$$

$$\varepsilon_{anél.} = (1 - C_a I_b) \varepsilon_{anél. \text{ béton}} + C_a I_b \varepsilon_{anél. \text{ acier}} \quad [3] \quad C_a I_b \text{ taux surfacique de ferrailage}$$

$$C_a I_b = \frac{\text{section d'acier}}{\text{section de béton}} \quad [4] \quad \varepsilon_{anél. \text{ béton}} \text{ déformation anélastique du béton}$$

$$\varepsilon_{anél. \text{ acier}} \text{ déformation plastique de l'acier}$$

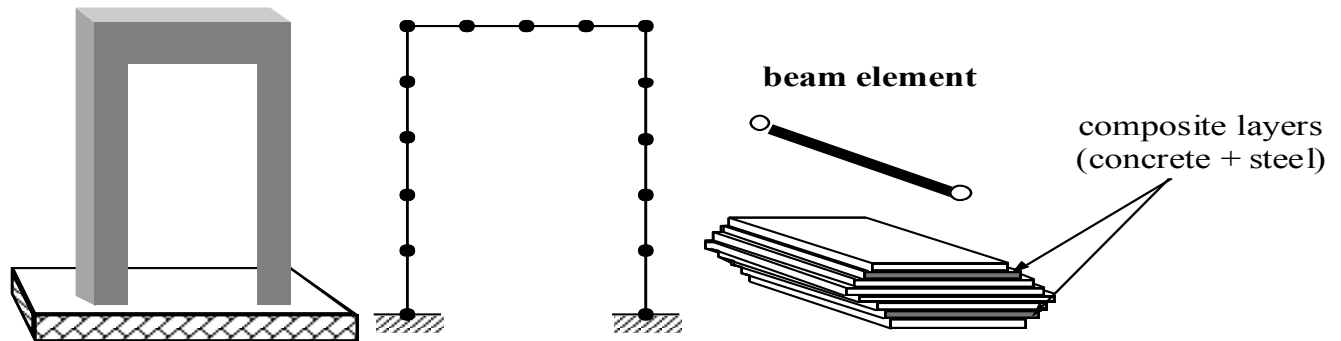


Figure 2. Principe de la discrétisation par des éléments poutres multicouches/  
Principle of discretisation with multi-layered beams.

Cette modélisation est adéquate dans la description de structures normalement élancées, au sens classique de la mécanique des structures. Dans le cas où l'élancement sort de la norme, les hypothèses cinématiques sont modifiées et la formulation de la matrice de raideur est adaptée.

### 3.2. Structures à élancements particuliers

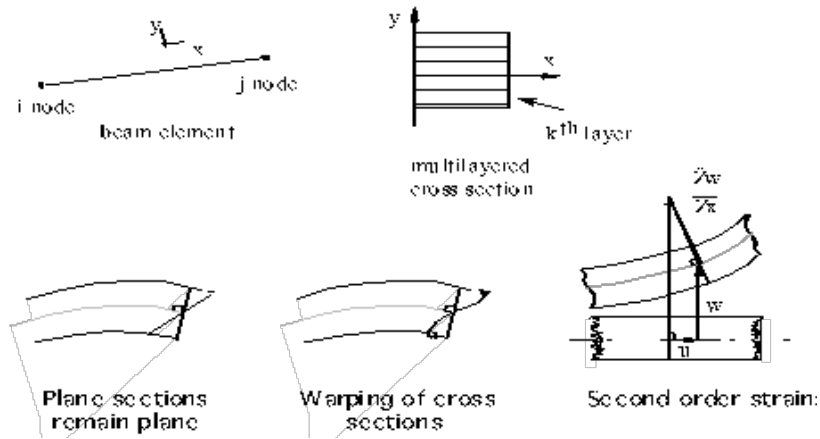
Dans le cas des *faibles élancements*, la contribution des cisaillements ne peut être négligée, un enrichissement par la prise en compte de la déformation de cisaillement, ce qui en élasticité linéaire s'apparente à une poutre de type Timoshenko (Timoshenko 1970), permet d'élargir le champ d'applicabilité du code (Dubé 1994, Ghavamian 1998). La prise en compte de cet effet nous a conduit à agir sur 2 aspects :

- l'introduction d'un comportement biaxial réduit à la prise en compte des contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{12}$  ( $\sigma_{22}$  est supposé être nul), pour chacune des couches de l'élément poutre, en respectant les relations de comportement vues plus haut.

- l'introduction d'une cinématique particulière dans le raccordement des éléments, qui consiste à introduire un terme correctif à la distribution des déformations de cisaillement compatible avec la distribution parabolique dans le cas des sections rectangulaires (cf. tableau figure 3).

A l'inverse *quand les élancements sont grands* les non linéarités géométriques sont à considérer. Ceci est assuré par la représentation des grands déplacements en utilisant le concept de matrice de raideur géométrique des poutres (Ghavamian 1998).

La figure 3 donne les grandes lignes de ces particularités.



### Bernoulli

$$\varepsilon_{xx} \quad \sigma_{xx}$$

$$u(x,y) = u(x) - y \cdot \theta$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \Big|_{y=0} + y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

### Timoshenko

$$\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yy} \quad \sigma_{xx} \quad \sigma_{xy} \quad (\sigma_{yy} = 0)$$

$$u(x,y) = u(x) - y \cdot \theta + g(y)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \Big|_{y=0} + y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

### Grands déplacements

$$\varepsilon_{xx} \quad \sigma_{xx}$$

$$u(x,y) = u(x) - y \cdot \theta$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \Big|_{y=0} + y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

*second ordre*

Figure 3. Les différentes hypothèses cinématiques/  
Different cinematic assumptions.

$u$  représente le déplacement axial,  $w$  le déplacement transversal,  $\theta$  rotation de la section,  $b$  la largeur de la couche,  $I$  le moment quadratique de flexion,  $M$  le moment statique,  $G$  le module de cisaillement,  $T$  l'effort tranchant, et  $g$  la fonction de gauchissement choisie de manière à créer une distribution de déformation de cisaillement consistante avec celle classiquement utilisée en élasticité linéaire : parabolique en section rectangulaire (Dubé 1994).

Dans EFICOS la résolution du système d'équations différentielles s'effectue grâce au schéma d'intégration numérique implicite de Newmark (Newmark 1959) sous sa forme inconditionnellement stable (accélération moyenne constante). Le calcul des efforts anélastiques qui résultent des non-linéarités matérielles s'effectue grâce à une méthode d'itération directe basée sur la raideur sécante initiale. Enfin, l'amortissement est introduit classiquement par une matrice de type Rayleigh, constituée d'une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur du système. Ceci permet d'ajuster les taux d'amortissement critique uniquement sur deux des modes propres de la structure.

## 4. EXEMPLES D'APPLICATION

### 4.1. Effet des grands déplacements – Cas d'une pile de pont sous séisme

Pour montrer l'intérêt d'un calcul couplant non-linéarité matérielle et non-linéarité géométrique nous proposons ici l'analyse d'une pile de pont soumise à un séisme, pour laquelle l'influence des moments du second ordre sont importants. Elancée et supportant en tête le poids du tablier, la pile est prolongée dans le sol représentant ainsi une fondation de type pieu. Le tableau 1 et la figure 4 en donnent tous les détails géométriques et mécaniques.

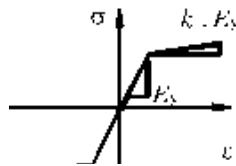
<i>Total height</i>	(m)	26	
<i>Circular cross-section</i>	(m)	1,83	
<i>Longitudinal reinforcement ratio</i>	(%)	1,17	
<i>Superstructure mass</i>	(t)	800	10 m
<i>Concrete</i>			
$f_c$ ( <i>compressive</i> )	(MPa)	24.1	
$f_t$ ( <i>tensile</i> )	(MPa)	2,1	ground
<i>Young's modulus (<math>E_c</math>)</i>	(MPa)	22 000	
<i>Reinforcement steel</i>			
$f_y$ ( <i>yielding stress</i> )	(MPa)	414	
<i>Young's modulus (<math>E_s</math>)</i>	(MPa)	200 000	
<i>Hardening stiffness</i>	(MPa)	0	

Tableau 1. Caractéristiques géométriques et mécaniques/  
Geometrical and mechanical characteristics.

Figure 4. Structure étudiée et modèle numérique (d'après Priestley, Seible et Calvi / Seismic behavior of an R.C. single bent, including large displacement effects.

La discrétisation comporte 20 éléments-poutres chacun composé de 24 couches dont huit incorporent les armatures longitudinales. La modélisation du sol a été réalisée grâce à dix ressorts linéaires-élastiques reliés aux noeuds de la partie enterrée de la pile. Les raideurs de ces éléments sont obtenues en utilisant la relation de Winkler. S'agissant d'analyses temporelles, le chargement employé est l'accélérogramme du séisme réel de « Array Station 5, James Rd, composant 230°, 1979 Imperial Valley, California ».

Les histogrammes de la figure 5 montrent les réponses temporelles des déplacements en tête par rapport au sol pour des analyses non élastiques. On observe l'effet des non-linéarités matérielles qui conduisent à amplifier les déplacements élastiques et à créer des déformations résiduelles. Les mêmes analyses effectuées avec la prise en compte des grands déplacements mettent en évidence l'influence très marquée des non-linéarités géométriques quand la raideur tangente postélastique de l'acier est faible. Ceci se traduit par une augmentation sensible des déplacements résiduels en fin de chargement et des sollicitations dépassant la capacité portante de la structure pour un acier d'armature élastique parfaitement plastique (élastoplastique parfait). Au niveau local le phénomène se traduit par une augmentation accélérée des rotations résiduelles. Ce mécanisme conduit à la ruine, observé par Paulay et Priestley (1992) et nommée « incremental collapse ».



Modèle élastoplastique des armatures/  
Elastoplastic behavior of reinforcements.

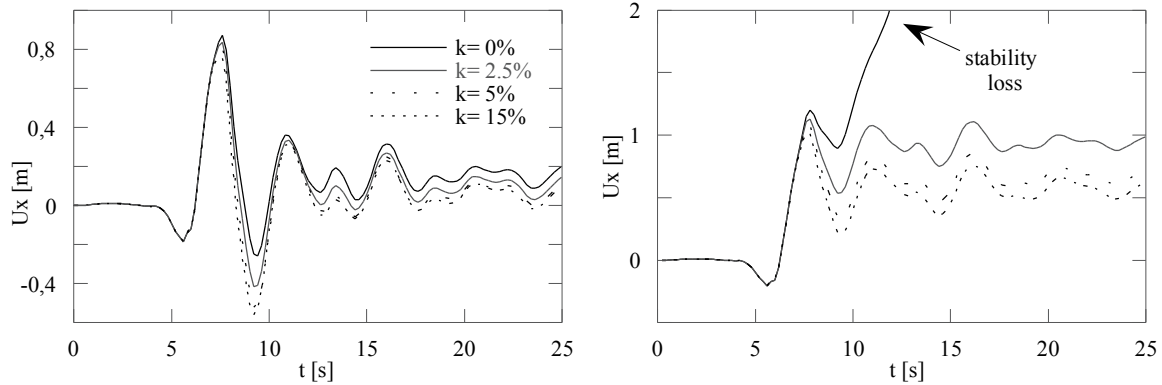


Figure 5. Comportement non linéaire matériel. Influence du module d'écrouissage de l'acier. a- sans les grands déplacements ; b- avec les grands déplacements/ Non linear material behavior. Influence of steel hardening modulus. a- Without second order effects. b- With second order effects.

#### 4.2. Combinaison Moment de flexion – Effort tranchant : “Nupec Shear Wall”

Le cas traité ici est celui du programme “Seismic Shear Wall International Standard Problem” - NUPEC (OECD 1996). Le mur concerné est faiblement élancé (hauteur 2m, longueur 3m, épaisseur 0,075m), il est armé dans les 2 directions en 2 nappes régulières sur toute sa surface et renforcé par une nervure à chaque extrémité. Disposé sur une embase béton de 1m d'épaisseur ancrée sur la table sismique, il supporte en tête une masse totale de 120 tonnes et reçoit un séisme unidirectionnel parallèle à son plan moyen. Ce mur a été modélisé avec EFICOS comme une poutre courte, effort normal, moment de flexion et effort tranchant sont importants et comme le montre la courbe enveloppe de la figure 6 (force inertielle maxi en tête – déplacement maxi en tête pour 5 niveaux de séisme) la combinaison locale contrainte normale – contrainte de cisaillement ne pouvait être ignorée. L'hypothèse des sections droites (Bernoulli) donne un résultat d'autant plus éloigné des résultats expérimentaux que le régime est non linéaire. Par contre ceux-ci sont correctement reproduits avec les hypothèses “Timoshenko” qui introduisent la prise en compte des effets de cisaillement (cf. Ghavamian & Mazars 1996).

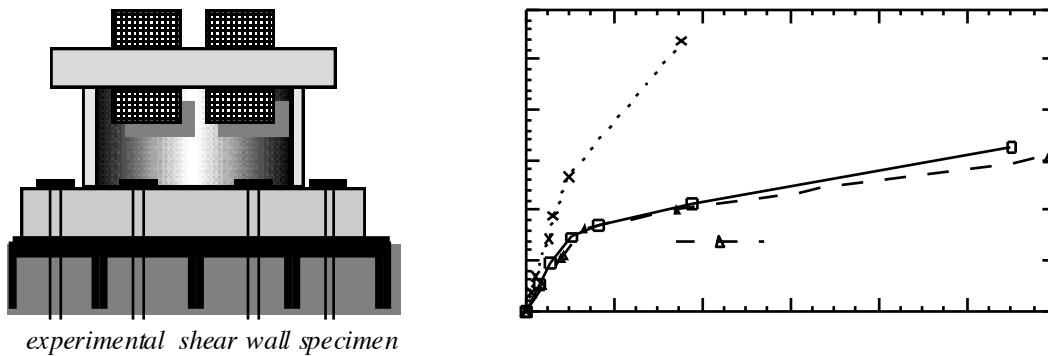


Figure 6. Expérience sur table sismique du mur armé SSWISP-NUPEC : intérêt de la prise en compte de l'effet de cisaillement dans la modélisation en poutre courte par EFICOS / Shear strain effects on a shear wall submitted to a shaking table test (maximum values for 5 different earthquake levels are plotted).

#### 4.3. Cas particulier des murs fortement cisailés – mur “SAFE”

Il s'agit du cas de structures de très faible élancement principalement sollicitées en cisaillement. Dans ce cas l'élément poutre dont le fonctionnement concerne principalement la flexion, même dans une description de “Timoshenko” ne peut être satisfaisant, une autre approche est nécessaire, celle dite du “Béton armé équivalent”.



Le modèle proposé s'inspire des idées du fonctionnement du béton armé selon le treillis de Ritter-Mörsh (Ritter 1899, Mörsh 1920). Le milieu continu composite est représenté par une combinaison de barres en béton et en acier constituant un milieu équivalent au sens de l'énergie, ce qui rejoint, dans le domaine élastique, les idées de Hrennikoff (1941) et de la "méthode des équivalences" (Absi 1972). Les barres ont un comportement élastique non linéaire qui est strictement celui introduit dans EFICOS et vu plus haut. La figure 7 donne le principe de la discrétisation du milieu équivalent. La détermination de la section des barres béton utilise les résultats obtenus par Hrennikoff (1941) et celle des barres acier est directement celle des armatures qu'elles représentent. Il a été montré qu'un point fondamental était celui de l'inclinaison des diagonales qui est conditionnée par l'orientation des directions principales au moment de la fissuration du béton, ce qui est cohérent avec l'esprit du fonctionnement des bielles de béton dans le treillis de Ritter-Mörsh. Par contre pour une orientation donnée, la finesse du maillage n'influence pas les résultats obtenus. Pour plus de détails voir (Kotronis et al. 1999a, 1999b).

Le calcul réalisé présenté ci-dessous concerne un essai réalisé au mur de réaction ELSA du CCR Ispra dans le cadre du programme SAFE (figure 8). Il s'agit d'un mur à élancement très faible (hauteur 1,2 m, longueur 2,6 m, épaisseur 0,2 m) nervuré aux extrémités. Ce mur est ancré en pied et en tête dans une dalle de forte dimension ce qui, avec un système adapté, permet aux deux sections correspondantes du mur de rester parallèles au cours du chargement. La sollicitation est pseudo-dynamique et se traduit par une force oligocyclique appliquée horizontalement en tête du mur. Ainsi, sans rotation possible en tête, le mur est en situation de cisaillement quasi-pur.

La figure 9 montre, pour un cas particulier, l'efficacité de la modélisation pour un chargement du mur jusqu'à la ruine. Sur ces courbes apparaissent très clairement les effets unilatéraux correspondant à l'ouverture et la fermeture des fissures lorsque l'effort change de signe. La discrétisation, représentée ici déformée, comporte 8 mailles ancrées à la base, rigidifiées en tête et accrochées à des éléments poutres multicouches en bordure représentant les nervures.

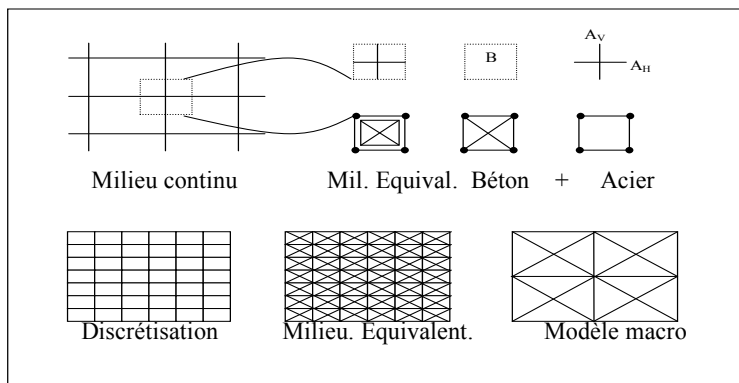


Figure 7 : Principe du béton armé équivalent / Principle of reinforced concrete equivalent medium

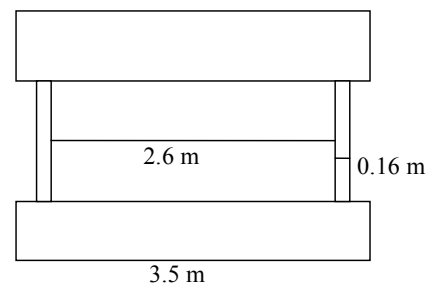


Figure 8 : Mur du programme SAFE/ SAFE shearwall

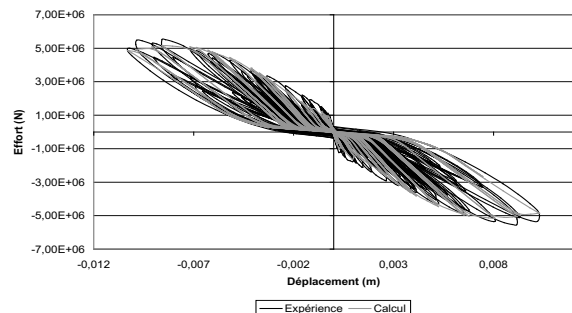
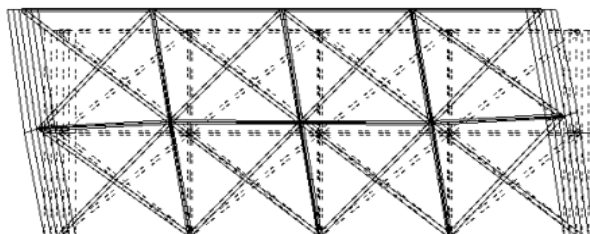


Figure 9 : a/ maillage déformé / deformed mesh  
b/ Cycles Effort-déplacement en tête / load-displacement at the top

## 5. CONCLUSION

S'appuyant sur l'idée "d'éléments finis simplifiés" utilisée dans le code EFICOS-LMT, ont été présentées ici :

- la discrétisation par poutre multicouche, enrichie par la prise en compte des grands déplacements d'une part, et celle d'une cinématique de distorsion de section d'autre part,
- la discrétisation dite du "béton armé équivalent" qui utilise un treillis composite de barres béton et acier.

L'implémentation des non-linéarités d'endommagement du béton et de plastification de l'acier conduisent à une technique de modélisation efficace pour les structures soumises au séisme.

## REFERENCES

- Absi, E. 1972. La théorie des équivalences et son application à l'étude des ouvrages d'art. *Annales de I.T. B.T.P.*, n°295 Octobre 1972.
- Dubé, J.F. 1994. Modélisation simplifiée du comportement visco-endommageable des structures en béton armé. Application aux séismes et aux chocs des structures., *Thèse de doctorat ENS Cachan*.
- Ghavamian, Sh. & Mazars, J. 1998. Stratégie de calculs simplifiés pour l'analyse du comportement des structures en B.A. : le code EFiCoS. *Revue française de génie civil*, vol 2, n° 1, pp. 61-90, March
- Hrennikoff, A. 1941. Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method., *J. Appl.Mech.*, A 169-A175.
- Kotronis, P. & Davenne, L. & Mazars J. 1999a. Modélisation du comportement dynamique de murs à très faible élancement. *Rapport interne 223, LMT-Cachan*.
- Kotronis, P. & Mazars, J. & Chauvel, D. & Dalbera, J. & Pegon, P. 1999b. Modèle de béton armé équivalent pour l'analyse du comportement des voiles de très faible élancement. Programme SAFE. *V<sup>ème</sup> Colloque National, Génie Parasismique et réponse dynamique des ouvrages. AFPS'99*.
- La Borderie, C.L. 1991. Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable: modélisation et application à l'analyse des structures en béton, *Thèse de doctorat Université de Paris 6*.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J.L. 1988. *Mécanique des matériaux solides*. Ed. Dunod.
- Mazars, J. 1984. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. *Thèse de doctorat d'état de l'Université Paris VI*.
- Mazars, J. 1998. French advanced research on structural walls - An overview on recent seismic programs. *Proc. 11<sup>th</sup> European Conf. on Earthquake Engineering Paris*, edit. Ph. Bisch et al. Balkema Rotterdam.
- Newmark, N.M. 1959. A method of computation for structural dynamics, *A.S.C.E. Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 85, 1959, pp. 67-94
- OECD 1996. *Seismic Shear Wall ISP comparison report - Yokohama Japon [GHA 98]*.
- Paulay, T. & Priestley, M.J.N. 1992. *Seismic design of reinforced concrete and masonry buildings*, Wiley Interscience.
- Timoshenko, S.P. & Goodier, J.N. 1970. *Theory of elasticity*, Mc Graw-Hill Int. Edit., chapter 2.