



**HAL**  
open science

# Poutre 3D multifibre Timoshenko pour la modélisation des structures en béton armé soumises à des chargements sévères

Panagiotis Kotronis, Luc Davenne, J. Mazars

► **To cite this version:**

Panagiotis Kotronis, Luc Davenne, J. Mazars. Poutre 3D multifibre Timoshenko pour la modélisation des structures en béton armé soumises à des chargements sévères. VIème Colloque National Génie Parasismique, Aspects dynamiques et vibratoires en génie civil, AFPS'03, LMS Ecole polytechnique, Jul 2003, Paris, France. pp.59-66. hal-01008667

**HAL Id: hal-01008667**

**<https://hal.science/hal-01008667>**

Submitted on 7 Jan 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Poutre 3D multifibre Timoshenko pour la modélisation des structures en béton armé soumises à des chargements sévères

Panagiotis KOTRONIS<sup>1</sup>, Luc DAVENNE<sup>2</sup> et Jacky MAZARS<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Sols, Solides, Structures et RNVO, Domaine Universitaire BP 53, 38041 Grenoble cedex 9, France

<sup>2</sup>Laboratoire de Mécanique et de Technologie, ENS Cachan/CNRS/Univ. Paris 6, 61, Avenue du Pr. Wilson, 94235, Cachan cedex, France

**Résumé:** *Le développement d'un élément poutre 3D multifibre Timoshenko est ici présenté et son utilisation avec des lois de comportement issues de la mécanique de l'endommagement pour la modélisation des structures en béton armé soumises à des chargements sévères. Le choix est fait pour un élément fini Timoshenko avec deux nœuds et des fonctions de forme d'ordre supérieur afin de gérer les problèmes numériques liés au blocage par le cisaillement. Des exemples numériques comparés avec des résultats expérimentaux montrent la pertinence de l'approche.*

## 1. Introduction

L'approche classique - *approche locale* - pour la simulation du comportement non linéaire d'une structure consiste à conjuguer une modélisation géométrique (maillages 2D ou 3D), un modèle rhéologique (formulation de la loi en 2D ou en 3D) et un modèle de chargement (accélérogramme pour le cas des chargements sismiques). Elle permet d'aborder des problèmes complexes tels que le cisaillement non linéaire et la réponse d'un ouvrage jusqu'à la ruine. Cette approche est pourtant très délicate à mettre en œuvre, demande beaucoup d'expérience de la part de l'ingénieur et ne permet pas d'envisager son utilisation systématique dans le cadre de dimensionnement d'un ouvrage.

*L'approche semi-globale* constitue une approche intermédiaire où le champ de déplacements est décrit par les déplacements et les rotations d'un élément poutre, d'un élément plaque ou d'une coque, tandis que toute information concernant le comportement des matériaux est traitée au niveau local. Il s'agit dans la plupart de cas d'utiliser des éléments poutres avec les hypothèses cinématiques habituelles (Bernoulli ou Timoshenko). L'intégration du modèle rhéologique peut être réalisée en générale par une intégration numérique classique sur la hauteur, si le problème est plan ou dans les deux directions de la section si le problème est tridimensionnel. Ce dernier type d'élément - dites souvent 'multifibre' - est efficace pour une analyse non-linéaire complexe d'éléments de structures composites tels ceux que l'on peut rencontrer par exemple en béton armé [figure 1].

Dans la suite un élément poutre 3D multifibre Timoshenko sera présenté en détail et son utilisation avec des lois de comportement issues de la mécanique de l'endommagement pour la modélisation des structures en béton armé soumises à des chargements sévères. Le choix est fait pour un élément fini Timoshenko avec deux nœuds et des fonctions de forme d'ordre supérieur afin de gérer les problèmes numériques liés au blocage par le cisaillement. Des exemples numériques comparés avec des résultats expérimentaux montrent la pertinence de l'approche. Le présent travail a été financé par le programme européen ICONS (Innovative seismic design CONcepts for New and existing Structures) dans le cadre du réseau TMR (Training and Mobility of Researchers) [CAFEEL - ECOEST/ICONS

2001]. Plus de détails pour l'élément poutre multifibre Timoshenko peuvent être consultés dans [Kotronis 2000].

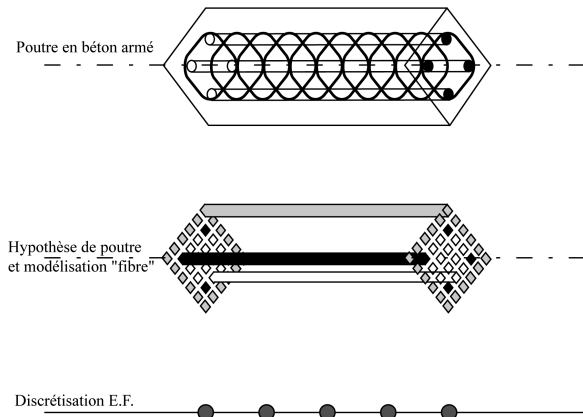


Figure 1: Principe d'une poutre multifibre

## 2. Poutre multifibre Timoshenko à deux nœuds

### 2.1 Fonctions de forme

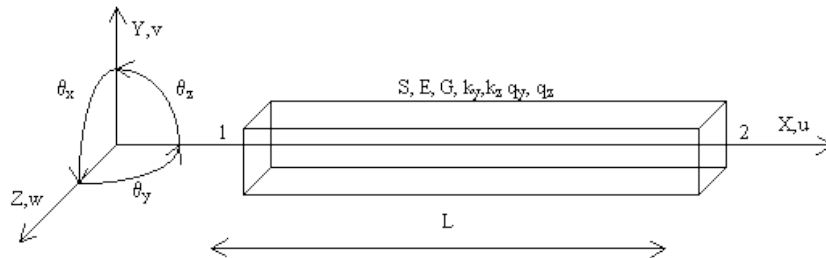


Figure 2: Poutre Timoshenko 3D

Prenons une poutre Timoshenko 3D, droite, orientée dans la direction  $x$ , soumise à des efforts distribués  $q_y, q_z$  avec  $S$  sa section (homogène ou hétérogène) discrétisée en fibres de coordonnées  $y, z$ ,  $E$  le module d'Young et  $G$  le module de cisaillement de chaque fibre,  $k_y$  et  $k_z$  les coefficients de correction de cisaillement de la section [figure 2]. Chaque nœud a six degrés de liberté, trois translations et trois rotations stockés dans un vecteur de déplacement de dimension 12 structuré de la manière suivante :

$$\{U\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}\} \quad (1)$$

Nous considérons le champ de déplacements continu en tout point de la ligne moyenne  $x$  par rapport au champ de déplacements discrétisés de la façon suivante :

$$\{U_s\} = [N]\{U\} \quad (2)$$

$$\{U_s\}^T = \{u_s(x) \quad v_s(x) \quad w_s(x) \quad \theta_{sx}(x) \quad \theta_{sy}(x) \quad \theta_{sz}(x)\} \quad (3)$$

Le choix des fonctions de forme  $[N]$  conditionne la performance numérique de l'élément. Le phénomène du blocage par cisaillement (rigidité 'parasite' quand l'élément est élancé) apparaît dans tous les éléments finis de poutre Timoshenko où les déplacements transversaux et les rotations sont discrétisés séparément [Stolarski & Belytschko 1983]. Le blocage par cisaillement est un problème numérique qui a beaucoup intéressé les chercheurs et dont une abondance de solutions existent dans la littérature [Crisfield 1991]. Afin de s'affranchir du problème de verrouillage nous optons pour une interpolation polynomiale de degré supérieur (cubique ou quadratique) pour les déplacements transversaux et les rotations qui ne sont plus indépendantes. Ces approches conduisent à des éléments finis à plus de deux nœuds (deux nœuds aux extrémités, plus des nœuds intérieurs, [Ibrahimbegovic & Frey 1992] ou à des éléments finis à deux nœuds dont les fonctions de forme dépendent des propriétés des matériaux [De Ville de Goyet 1989], [Friedman & Kosmatka 1993]. Cette dernière approche est optée pour l'élément Timoshenko présenté ci-dessous dont les fonctions de forme prennent pour l'élément multifibre la forme suivante :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3^* & 0 & -N_4^* & 0 & 0 & 0 & N_5^* & 0 & -N_6^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_7^* & 0 & N_8^* & 0 & 0 & 0 & -N_9^* & 0 & N_{10}^* & 0 \\ 0 & N_7 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & N_9 & 0 & 0 & 0 & N_{10} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_6 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(1 - \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{\phi}{2}\left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$N_2 = \frac{x}{L}$$

$$N_7 = \frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right) \right\} \quad (5)$$

$$N_3 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \phi\left(\frac{x}{L}\right) + 1 + \phi \right\}$$

$$N_8 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - (4+\phi)\left(\frac{x}{L}\right) + (1+\phi) \right\}$$

$$N_4 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(2 + \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(1 + \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$N_9 = -\frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$N_s = -\frac{1}{1+\phi} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \phi\left(\frac{x}{L}\right) \right\} \quad N_{10} = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - (2-\phi)\left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

Avec  $N_i^* = N_i(\phi^*)$ ,  $\phi$  et  $\phi^*$  le rapport entre la rigidité de flexion et la rigidité de cisaillement de l'élément dans les axes correspondantes ( $E$  et  $G$  varient avec  $y$  et  $z$ ):

$$\phi = \frac{12}{L^2} \left( \frac{\int_S E y^2 dS}{k \int_S G dS} \right), \quad \phi^* = \frac{12}{L^2} \left( \frac{\int_S E z^2 dS}{k \int_S G dS} \right) \quad (6)$$

*Remarque:* Les fonctions de forme dépendent des propriétés des matériaux. Ceci n'influence pas la performance de l'élément dans le régime non linéaire puisqu'elles ne sont calculées qu'une seule fois au début de calcul, et sont considérées ensuite comme constantes. Par contre, avant de démarrer un calcul un premier passage est nécessaire au niveau de la section afin de déterminer ses propriétés élastiques.

## 2.2 Matrice de rigidité

L'hypothèse des sections planes de la poutre Timoshenko permet d'exprimer les déplacements d'un point quelconque de la poutre en fonction des déplacements d'un point situé sur l'axe de référence  $x$  et en fonction de déplacements dus à la rotation de la section  $S$ :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_s(x) - y\theta_{sz}(x) + z\theta_{sy}(x) \\ v(x, y, z) &= v_s(x) - z\theta_{sx}(x) \\ w(x, y, z) &= w_s(x) + y\theta_{sx}(x) \end{aligned} \quad (7)$$

Le champ des déformations prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u'_s(x) - y\theta'_{sz}(x) + z\theta'_{sy}(x) \\ 2\varepsilon_{xy} &= v'_s(x) - \theta_{sz}(x) - z\theta'_{sx}(x) \\ 2\varepsilon_{xz} &= w'_s(x) + \theta_{sy}(x) + y\theta'_{sx}(x) \end{aligned} \quad (8)$$

Avec ( $'$ ) le symbole de la dérivée par rapport à  $x$ . En introduisant les équations (8) dans le principe des travaux virtuels nous obtenons:

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (\delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + 2\delta\varepsilon_{xy}\sigma_{xy} + 2\delta\varepsilon_{xz}\sigma_{xz}) dV_0 &= \int_0^L \delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z dx \\ \Leftrightarrow \int_0^L N \delta u'_s(x) + T_y \delta \beta_{sy}(x) + T_z \delta \beta_{sz}(x) + M_x \delta \theta'_{sx}(x) + M_y \delta \theta'_{sy}(x) + M_z \delta \theta'_{sz}(x) dx & \quad (9) \\ = \int_0^L \delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z dx & \\ \text{avec :} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N &= \int_S \sigma_{xx} dS; \quad T_y = \int_S \sigma_{xy} dS; \quad T_z = \int_S \sigma_{xz} dS; \\
M_z &= -\int_S y \sigma_{xx} dS; \quad M_y = \int_S z \sigma_{xx} dS; \quad M_x = \int_S (-z \sigma_{xy} + y \sigma_{xz}) dS; \\
\beta_{sy}(x) &= v'_s(x) - \theta_{sz}(x); \quad \beta_{sz}(x) = w'_s(x) + \theta_{sy}(x)
\end{aligned} \tag{10}$$

La théorie des poutres et les équations d'élasticité nous donnent :

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}; \quad \sigma_{xy} = G2\varepsilon_{xy}; \quad \sigma_{xz} = G2\varepsilon_{xz} \tag{11}$$

Sans adopter des hypothèses particulières sur l'intersection de l'axe  $x$  avec la section de la poutre ou sur l'orientation des axes  $y, z$ , la relation entre les contraintes «généralisées» (forces dans la section)  $\{F\}$  et les déformations «généralisées»  $\{D\}$  devient :

$$\{F\} = [K_s]\{D\} \tag{12}$$

$$\{F\}^T = \{N \quad T_y \quad T_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z\} \tag{13}$$

$$\{D\} = \{u'_s(x) \quad \beta_{sy}(x) \quad \beta_{sz}(x) \quad \theta'_{sx}(x) \quad \theta'_{sy}(x) \quad \theta'_{sz}(x)\} \tag{14}$$

La matrice de rigidité de la section devient finalement [Guedes et al. 1994] :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} K_{s11} & 0 & 0 & 0 & K_{s15} & K_{s16} \\ & K_{s22} & 0 & K_{s24} & 0 & 0 \\ & & K_{s33} & K_{s34} & 0 & 0 \\ & & & K_{s44} & 0 & 0 \\ & & & & K_{s55} & K_{s56} \\ sym & & & & & K_{s66} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$K_{s11} = \int_S E dS; \quad K_{s15} = \int_S E z dS; \quad K_{s16} = -\int_S E y dS; \quad K_{s22} = k_y \int_S G dS$$

$$K_{s24} = -k_y \int_S G z dS; \quad K_{s33} = k_z \int_S G dS; \quad K_{s34} = k_z \int_S G y dS;$$

$$K_{s44} = \int_S G(k_z y^2 + k_y z^2) dS; \quad K_{s55} = \int_S E z^2 dS; \quad K_{s56} = -\int_S E y z dS; \quad K_{s66} = \int_S E y^2 dS;$$

L'introduction des équations (15) dans le principe des travaux virtuels conduit à :

$$\int_0^L \delta\{D\}^T [K_s]\{D\} dx - \int_0^L \delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z dx = 0 \tag{16}$$

L'équation qui donne les déformations généralisées en fonction des déplacements nodaux est :

$$\{D\} = [B]\{U\} \tag{17}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_3 - N_7 & 0 & 0 & 0 & N'_4 - N_8 & 0 & N'_5 - N_9 & 0 & 0 & 0 & N'_6 - N_{10} \\ 0 & 0 & N'_3 - N_7 & 0 & -N'_4 + N_8 & 0 & 0 & 0 & N'_5 - N_9 & 0 & -N'_6 + N_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N'_7 & 0 & N'_8 & 0 & 0 & 0 & -N'_9 & 0 & N'_{10} & 0 \\ 0 & N'_7 & 0 & 0 & 0 & N'_8 & 0 & N'_9 & 0 & 0 & 0 & N'_{10} \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité de l'élément est finalement donnée par :

$$K_{elem} = \int_0^L B^T K_s B dx \quad (18)$$

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes données se fait par l'intégrale :

$$F_{int} = \int_0^L [B]^T \{F\} dx \quad (19)$$

*Remarques:*

1. Lorsque le comportement du matériau est linéaire, l'élément poutre est homogène dans sa longueur est l'intégration de l'équation (18) peut être faite analytiquement. Lorsque le comportement est non linéaire deux points d'intégration le long de la poutre sont nécessaires afin d'intégrer correctement les fonctions de forme utilisées (cubiques et quadratiques).

2. Pour des sections homogènes de comportement linéaire et quand l'axe de référence  $x$  coïncide avec l'axe neutre de la poutre la matrice de rigidité de l'élément ainsi calculée est la même que la matrice de rigidité exacte d'un élément Timoshenko développée dans Przemieniecki (1968). Un seul élément fini est donc suffisant pour calculer les déplacements d'une poutre soumise à des chargements statiques. Pour des sections hétérogènes la qualité des résultats dépend de la précision de calculs des propriétés élastiques de la section.

3. L'élément est exempt de verrouillage. Lorsque l'élancement devient grand  $\phi \rightarrow 0$  et  $\phi^* \rightarrow 0$  et la matrice de rigidité tend vers celle d'un élément Bernoulli.

### 3. Exemple d'application

L'élément multifibre Timoshenko a été implanté dans la librairie d'éléments FEDEAS [Filippou 1996] de code FEAP [Taylor 2000]. L'existence déjà dans le code d'un élément multifibre de cinématique Bernoulli a facilité l'implémentation [Spacone et al 1996].

La modélisation du comportement d'un poteau en béton armé testé sous flexion biaxiale et effort normal constant est présentée ci-dessous [Bousias et al.1995]. Les caractéristiques géométriques de spécimen et les détails du ferrailage sont présentés sur la [figure 3]. Pendant l'essai le poteau a été chargé avec une histoire alternée des déplacements en X et en Y et un effort normal constant égal à 0.21 MN [figure 3]. Le poteau est discrétisé en quatre éléments poutres multifibres avec deux sections dans la longueur (deux points de Gauss). 36 fibres sont utilisées pour modéliser le béton et 8 fibres supplémentaires pour modéliser

le ferrailage. La dalle inférieure n'a pas été modélisée et le poteau est considéré encasté à la base. Le comportement non linéaire du béton est modélisé à l'aide de la loi de La Borderie [La Borderie 1991] basée sur la mécanique de l'endommagement et celui des armatures par la loi Menegotto-Pinto [Menegotto & Pinto 1973]. Ces lois sont utilisées dans leur version uniaxiale, le cisaillement et la torsion sont pour le moment considérés élastiques.

Les résultats de la simulation sont satisfaisants [figure 4] et prouvent la capacité de l'élément de modéliser le comportement global non linéaire du spécimen. Les boucles d'hystérésis sont correctement reproduites, ainsi que les valeurs maximales des efforts dans les deux directions.

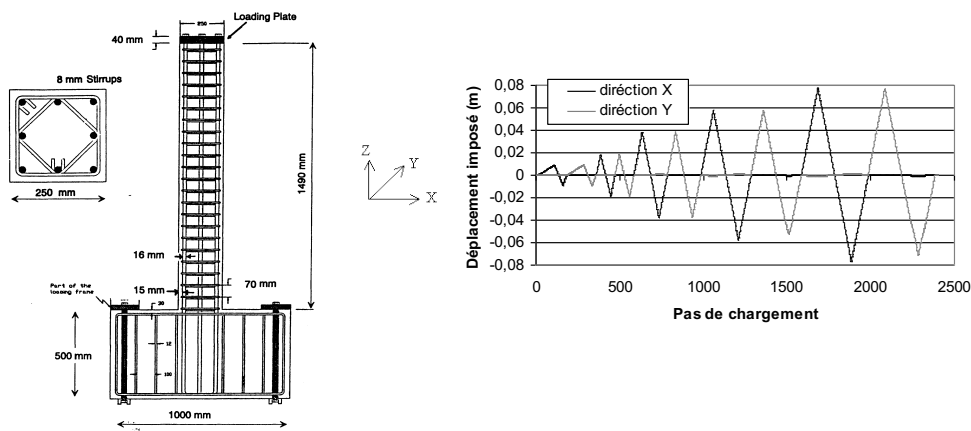


Figure 3: Description de l'essai

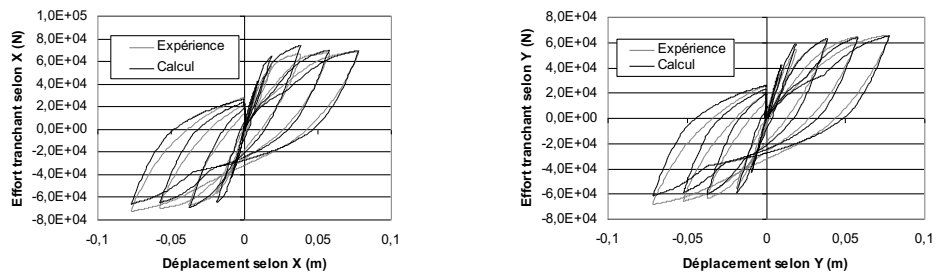


Figure 4: Comparaison essais-calculs

#### 4. Conclusion

Un élément poutre 3D multifibre Timoshenko qui fonctionne correctement en évitant les pièges numériques de blocage par cisaillement a été mis au point. Un exemple numérique comparé avec des résultats expérimentaux montre la pertinence de l'approche. Il faudrait maintenant l'utiliser au mieux de ses capacités, c'est à dire prendre en compte le



cisaillement dans le comportement non linéaire. Dans un avenir proche, des lois 2D et 3D vont être développées pour le béton, lois qui doivent être numériquement robustes et capables de simuler correctement son comportement sous chargements dynamiques complexes.

## Références

- Bousias S. N., Verzeletti G., Fardis M.N. & Guiterrez E. (1995). *Load-Path effects in column biaxial bending and axial force*. Journal of Eng. Mechanics, ASCE, 121(5), 596-605.
- CAFEEL-ECOEST/ICONS (2001). *Thematic report N.5. Shear Walls Structures*. Editors J.M. Reynouard, M.N. Fardis, September.
- Crisfield M.A. (1991). *Nonlinear Finite Element analysis of solids and structures*. Vol I, John Wiley, Chichester.
- De Ville de Goyet. (1989). *L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique*. Thèse de doctorat de l'université de Liège.
- Filippou F.C. (1996). *Nonlinear static and dynamic analysis for evaluation of structures*. 3<sup>rd</sup> European Conference on Structural Dynamics Eurodyn 96, Florence Italy, 395-402.
- Friedman Z. and Kosmatka J.B. (1993). *An improved two-node Timoshenko beam finite element*. Computers and structures, Vol. 47, no 3, pp. 473-481.
- Guedes J., Pégon P & Pinto A. (1994). *A fibre Timoshenko beam element in CASTEM 2000*, special publication Nr. I.94.31, JRC, I-21020 Ispra, Italy.
- Ibrahimbegovic A. and Frey F. (1992). *Finite element analysis of linear and non linear deformations of elastic initially curved beams*. LSC internal report 92/02, January, Dep. of Civil Eng. Swiss Federal Institute of Technology, LSC, DGC,EPFL, Lausanne.
- Kotronis P. (2000). *Cisaillement dynamique de murs en béton armé. Modèles simplifiés 2D et 3D*. Thèse de doctorat ENS Cachan.
- La Borderie C.L. (1991). *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable: modélisation et application à l'analyse des structures en béton*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- Menegotto M. and Pinto P.E. (1973). *Method of analysis for cyclically loaded R.C. plane frames including changes in geometry and non-elastic behaviour of elements under combined normal force and bending*. Symposium on the Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well Defined Repeated Loads. International Assn. for Bridge and Structural Engineering, Zurich, pp. 15-22.
- Przemieniecki J.S. (1968). *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill, New York.
- Spacone E., Filippou F.C., & Taucer, F.F. (1996). *Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of R/C Frames. I : Formulation*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 25, N. 7., pp. 711-725.
- Stolarski H. and Belytschko. (1983). *Shear and membrane locking in  $C^0$  elements*. Computers methods in Applied Mechanics and Engin., Vol. 41.
- Taylor R.L. (2000). *FEAP: A finite element analysis program, version 7.3 manual*. University of California, Berkeley.