



**HAL**  
open science

# Méthode éléments finis stochastiques étendus pour la prise en compte des incertitudes géométriques dans le calcul de structures

Alexandre Clément, Anthony Nouy, Franck Schoefs

► **To cite this version:**

Alexandre Clément, Anthony Nouy, Franck Schoefs. Méthode éléments finis stochastiques étendus pour la prise en compte des incertitudes géométriques dans le calcul de structures. Fiabilité des Matériaux et des Structures, 2008, Nantes, France. hal-01008426

**HAL Id: hal-01008426**

**<https://hal.science/hal-01008426>**

Submitted on 5 Oct 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Méthode éléments finis stochastiques étendus pour la prise en compte des incertitudes géométriques dans le calcul de structures

Alexandre Clément, Anthony Nouy, Franck Schoefs

*Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM)  
Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes  
UMR CNRS 6183, France  
anthony.nouy@univ-nantes.fr*

---

*RÉSUMÉ. Les méthodes éléments finis stochastiques offrent un outil robuste pour la prise en compte dans le calcul de structure des aléas sur les propriétés matériaux et les chargements. L'aléa portant sur la géométrie reste cependant un point mal maîtrisé dans le cadre de ces techniques. Afin de répondre à cette problématique, nous proposons une méthode basée sur une extension au cadre stochastique de la méthode éléments finis étendus (X-FEM). Cette méthode repose sur l'utilisation de level sets aléatoires pour la description implicite de la géométrie et sur l'enrichissement des espaces d'approximation. Deux méthodes de projections sont utilisées pour la définition de l'approximation stochastique et comparées à l'aide d'un exemple numérique simple.*

*ABSTRACT. In structural analysis, stochastic finite element methods offer a robust tool to deal with randomness on material properties or loadings. Unfortunately, there is still no available efficient strategy to deal with uncertainties on the geometry. Here, we bring an answer to this problem by proposing a method based on an extension to the stochastic framework of the eXtended Finite Element Method (X-FEM). This method lies on the use of level set technique for the implicit description of the random geometry and on the enrichment of the approximation spaces. Two projection methods are used to define the stochastic approximation and compared with a simple numerical example.*

*MOTS-CLÉS : Calcul stochastique, X-FEM, chaos polynomial, géométrie aléatoire*

*KEYWORDS: Computational stochastic mechanics, X-FEM, polynomial chaos, random geometry*

---

## 1. Introduction

La prise en compte d'incertitudes liées aux propriétés matérielles, aux chargements, ou à la géométrie dans le calcul de structure apparaît aujourd'hui indispensable si l'on cherche à obtenir des prédictions numériques fiables. Cette nécessité a conduit à un développement rapide de méthodes numériques ad-hoc, telles que la méthode des éléments finis stochastiques [GHA 91, BAB 05]. Ces méthodes conduisent à des solutions d'une grande précision qui sont explicites en fonction des variables aléatoires décrivant les sources d'aléa. Cependant, il n'existe pas encore de méthode efficace pour résoudre des problèmes mécaniques où l'aléa porte sur la géométrie bien que cette problématique soit rencontrée dans de nombreuses applications : modélisation des aléas sur un procédé de fabrication, sur des pertes de matières, sur la géométrie de la micro-structure d'un matériau hétérogène, etc.

Une manière naturelle de résoudre des problèmes stochastiques définis sur un domaine aléatoire est d'utiliser un code éléments finis déterministe couplé à une méthode stochastique classique telle que les approches de Monte-Carlo ou la méthode des surfaces de réponse. Cependant, ces approches nécessitent un nombre important de calculs déterministes pour lesquels un maillage conforme de la géométrie doit être systématiquement créé. Dans le cas de problèmes à géométrie aléatoire, elles conduisent alors à des coûts de calcul trop élevés et ne permettent pas d'obtenir une description explicite de la solution.

Récemment, une nouvelle méthode éléments finis stochastiques a été proposée pour la résolution de ce type de problème [NOU 07b, NOU 08]. Cette méthode, baptisée eXtended Stochastic Finite Element Method (X-SFEM), est basée sur l'extension au cadre stochastique de la méthode X-FEM [MOE 99, SUK 01]. Cette technique repose sur deux points importants. Le premier point est l'utilisation de la technique des level-set [SET 99] permettant une représentation implicite de la géométrie. Le domaine aléatoire est alors caractérisé par une fonction level-set aléatoire qui est définie sur un domaine fictif contenant toutes les réalisations possibles du domaine physique. Le second point repose sur l'utilisation d'une approximation éléments finis au niveau spatial et d'une approximation sur le chaos polynomial généralisé au niveau stochastique. Pour la définition de l'approximation, deux méthodes seront présentées et comparées : une méthode de projection de Galerkin et une méthode de projection au sens de  $L^2$ .

Dans cet exposé, nous rappellerons les bases de la méthode, initialement développée pour les problèmes de formes aléatoires, dans le cadre de l'élasticité linéaire. Nous présenterons brièvement certains aspects numériques liés à la construction et à la résolution du système discrétisé. Puis nous présenterons l'extension de la méthode pour des problèmes d'interfaces matérielles aléatoires. Plus particulièrement, nous nous intéresserons à la question de l'enrichissement de l'espace d'approximation par la méthode de la partition de l'unité [MEL 96], permettant d'améliorer le taux de convergence de l'approximation et ainsi d'obtenir une solution plus précise pour un maillage éléments finis donné et un degré d'approximation donné au niveau sto-

chastique. Enfin un exemple numérique permettra d'illustrer la qualité de la solution obtenue ainsi que l'efficacité de la méthode.

## 2. Formulation du problème dans le cadre de X-SFEM

Dans cet article, la méthode est présentée dans le cadre d'un calcul d'une structure présentant une interface matérielle aléatoire. Pour les problèmes liés aux formes aléatoires, le lecteur pourra se référer à [NOU 07a]. On se place sous l'hypothèse des petites perturbations. On suppose que l'espace probabilisé  $(\Theta, \mathcal{B}, P)$  permet de représenter le contenu probabiliste du problème où  $\Theta$  est l'espace des événements élémentaires,  $\mathcal{B}$  est une  $\sigma$ -algèbre sur  $\Theta$  et  $P$  une mesure de probabilité. On suppose que le domaine  $\Omega$  est composé de deux sous-domaines aléatoires disjoints :  $\Omega = \Omega_1(\theta) \cup \Omega_2(\theta)$ . Chaque sous-domaine  $\Omega_i$  est représenté par la variable aléatoire  $\Omega_i : \theta \in \Theta \mapsto \Omega_i(\theta) \subset \mathbb{R}^d$  où  $d$  désigne la dimension spatiale du problème.  $\Omega_i(\theta)$  représente une réalisation du sous-domaine. L'interface aléatoire entre ces deux sous-domaines, non nécessairement connexe, est notée  $\Gamma(\theta)$ . On suppose que la structure est soumise à des efforts volumiques  $\mathbf{f}$  sur  $\Omega$  et à des efforts surfaciques  $\mathbf{F}$  sur une partie  $\Gamma_2$  de la frontière  $\partial\Omega$ , ces efforts étant éventuellement aléatoires. La structure est fixée sur une partie complémentaire  $\Gamma_1$  de la frontière  $\partial\Omega$ . On supposera ici que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont déterministes. On s'intéresse au cas d'un matériau élastique linéaire et on note  $\mathbf{C}$  le tenseur d'élasticité de Hooke et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur des déformations. On introduit tout d'abord une formulation faible du problème au niveau spatial : trouver  $\mathbf{u}$  tel que  $\forall \theta \in \Theta$ ,  $\mathbf{u}(\cdot, \theta) \in \mathcal{U} = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d; \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ , et tel qu'on ait  $P$ -presque sûrement

$$a(\mathbf{u}(\cdot, \theta), \mathbf{v}; \theta) = b(\mathbf{v}; \theta) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}, \quad (1)$$

où  $a(\cdot, \cdot; \theta)$  et  $b(\cdot; \theta)$  sont respectivement les formes bilinéaire et linéaire définies par :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \theta) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, dx, \quad (2)$$

$$b(\mathbf{v}; \theta) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, ds. \quad (3)$$

On introduit alors une formulation faible à la fois au niveau spatial et au niveau stochastique. En introduisant l'espace fonctionnel

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u} : \theta \in \Theta \mapsto \mathbf{u}(\cdot, \theta) \in \mathcal{U}; \int_{\Theta} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}}^2 \, dP(\theta) < \infty\} := L^2(\Theta, dP; \mathcal{U}), \quad (4)$$

la formulation s'écrit : trouver  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  tel que

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (5)$$

où

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Theta} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \theta) dP(\theta) := E(a(\mathbf{u}, \mathbf{v}; \theta)), \quad (6)$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Theta} b(\mathbf{v}; \theta) dP(\theta) := E(b(\mathbf{v}; \theta)), \quad (7)$$

et où  $E(\cdot)$  est l'espérance mathématique. L'aléa sur les sous-domaines matérielles est caractérisé par la donnée du tenseur de Hooke aléatoire  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \theta)$ , qui peut s'écrire :

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \theta) = \mathbf{C}_1 I_{\Omega_1(\theta)}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_2 I_{\Omega_2(\theta)}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

où  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  sont respectivement les tenseurs d'élasticité des sous-domaines  $\Omega_1(\theta)$  et  $\Omega_2(\theta)$ , supposés homogènes, et où  $I_{\Omega_1}$  et  $I_{\Omega_2}$  sont respectivement les fonctions indicatrices des domaines  $\Omega_1(\theta)$  et  $\Omega_2(\theta)$ .

### 3. Représentation de la géométrie avec la technique des level sets

La technique des level-sets [SET 99] consiste à représenter une hyper-surface  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}^d$  par l'iso-zéro d'une fonction  $\phi$  appelée fonction level-set. Ici, l'hyper-surface à représenter est l'interface matérielle. Cette interface étant aléatoire, on introduit naturellement une fonction level-set aléatoire  $\phi(\mathbf{x}, \theta)$ , définie par :

$$\Gamma(\theta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \phi(\mathbf{x}, \theta) = 0\}. \quad (9)$$

Classiquement, la level-set est représentée par la fonction distance signée à l'hyper-surface. Par convention, nous supposons que la level-set prend des valeurs négatives sur le domaine  $\Omega_1$  et positive sur le domaine  $\Omega_2$ . Ainsi, considérant l'équation (8), le tenseur  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \theta)$  peut s'écrire :

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \theta) = \mathbf{C}_1 \mathcal{H}(\phi(\mathbf{x}, \theta)) + \mathbf{C}_2 \mathcal{H}(-\phi(\mathbf{x}, \theta)) \quad (10)$$

où  $\mathcal{H}$  est la fonction Heaviside. En pratique, la fonction level-set est discrétisée en utilisant une interpolation sur un maillage éléments finis fixe. La géométrie aléatoire est alors complètement caractérisée par la donnée des valeurs nodales de la level-set, qui sont des variables aléatoires.

## 4. Définition des espaces d'approximation

### 4.1. Approximation classique

On introduit un maillage éléments finis  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  et on note  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  la base d'approximation éléments finis de  $\mathcal{U}$ . L'espace d'approximation spatial classique  $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$  peut s'écrire :

$$\mathcal{U}_h = \{\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \varphi_i(\mathbf{x}) a_i, a_i \in \mathbb{R}\}. \quad (11)$$

où les  $a_i$  sont les inconnues nodales du problème. Au niveau stochastique, on introduit l'espace d'approximation  $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S} = L^2(\Theta, dP)$ , dont une base est constituée par un ensemble de  $P$  fonctions  $\{H_\alpha(\theta)\}_{\alpha \in \mathcal{J}_P}$  :

$$\mathcal{S}_P = \{v(\theta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} v_\alpha H_\alpha(\theta), v_\alpha \in \mathbb{R}\}, \quad (12)$$

On suppose que l'aléa peut être représenté avec un nombre fini  $m$  de variables aléatoires indépendantes. On peut donc opérer un changement d'espace probabilisé de travail et considérer que le nouvel espace des événements élémentaires  $\Theta$  est un sous-domaine de  $\mathbb{R}^m$  et la mesure de probabilité  $P$  est la mesure de probabilité jointe de cet ensemble de variables aléatoires. Plusieurs choix de bases d'approximation dans  $L^2(\Theta, dP)$  peuvent être envisagés : chaos polynomial [WIE 38, GHA 91, XIU 02], chaos généralisé [SOI 04], éléments finis [DEB 01], ondelettes [Le 04]. La solution totalement discrétisée, notée  $\mathbf{u}_{h,P}$ , sera alors cherchée dans l'espace d'approximation complet :

$$\mathcal{V}_{h,P} = \mathcal{U}_h \otimes \mathcal{S}_P \quad (13)$$

#### 4.2. Approximation avec enrichissement

Dans le cas d'un problème d'interface matérielle, le champ solution présente des dérivées discontinues au passage de l'interface  $\Gamma(\theta)$ . Ces discontinuités ne sont pas contenues dans l'espace d'approximation éléments finis dans le cas où le maillage n'est pas conforme à la géométrie de l'interface. En utilisant la méthode de la partition de l'unité [MEL 96], il est possible d'enrichir l'espace d'approximation afin de rajouter des modes à dérivées discontinues au passage de l'interface. On introduit pour cela une fonction  $\psi(\mathbf{x}, \theta)$  à dérivée discontinue sur l'interface. La partie enrichie de l'espace d'approximation s'écrira alors :

$$\mathcal{E}_{h,P} = \{v(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{j \in I_e} \varphi_j(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, \theta) b_j(\theta), b_j \in \mathcal{S}_P\}. \quad (14)$$

où  $I_e$  est l'ensemble des noeuds enrichis et les  $b_j$  sont les inconnues nodales enrichies. Différents choix sont possibles pour la fonction d'enrichissement [SUK 01, MOE 03]. Ici, on utilise celle proposée dans [MOE 03] donnant des taux de convergence optimaux dans le cas déterministe. Cette fonction  $\psi(\mathbf{x}, \theta)$  s'écrit :

$$\psi(x, \theta) = \sum_j |\phi_j(x, \theta)| N_j(x) - \left| \sum_j \phi_j(x, \theta) N_j(x) \right| \quad (15)$$

La solution  $\mathbf{u}_{h,P}$  sera alors cherchée dans l'espace d'approximation :

$$\mathcal{V}_{h,P} = \mathcal{U}_h \otimes \mathcal{S}_P + \mathcal{E}_{h,P} \quad (16)$$

On remarquera que l'espace d'approximation enrichi n'apparaît plus comme un produit tensoriel d'espaces d'approximation.

## 5. Définition de l'approximation et résolution du problème

### 5.1. Projection de Galerkin

L'approximation de Galerkin  $\mathbf{u}_{h,P} \in \mathcal{V}_{h,P}$  est définie par :

$$A(\mathbf{u}_{h,P}, \mathbf{v}_{h,P}) = L(\mathbf{v}_{h,P}) \quad \forall \mathbf{v}_{h,P} \in \mathcal{V}_{h,P} \quad (17)$$

Le problème (17) se ramène à la résolution du système d'équations suivant :

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} E(\mathbf{K}H_\alpha H_\beta) \mathbf{u}_\alpha = E(\mathbf{b}H_\beta) \quad \forall \beta \in \mathcal{J}_P \quad (18)$$

où  $\mathbf{K}(\theta)$  est une matrice aléatoire et  $\mathbf{b}(\theta)$  est un vecteur aléatoire. Le calcul des termes  $E(\mathbf{K}H_\alpha H_\beta)$  et  $E(\mathbf{b}H_\beta)$  nécessite le calcul d'une intégrale sur  $\Theta$  avec la mesure  $dP$ . Il est à noter que les composantes de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{b}$  ne sont pas des fonctions régulières au niveau stochastique. Par exemple, dans le cas où seule la géométrie est aléatoire, on montre aisément que les contributions d'un élément fini  $B_e \subset B$ , notées  $\mathbf{K}_e(\theta)$  et  $\mathbf{b}_e(\theta)$ , n'évoluent que sur une partie du domaine stochastique  $\Theta_{cut}^e = \{\theta \in \Theta; \exists \mathbf{x} \in B_e, \phi(\mathbf{x}, \theta) = 0\}$ , qui correspond aux réalisations pour lesquelles la frontière coupe l'élément  $B_e$ . En pratique, afin de bien intégrer le problème discrétisé, on réalise un maillage de l'espace stochastique permettant de représenter grossièrement ce domaine  $\Theta_{cut}^e$ . Ce maillage est généré automatiquement à l'aide d'une technique recursive de type octree [NOU 07a]. Pour chaque élément stochastique, on utilise alors une technique de quadrature classique, conduisant à l'évaluation des matrices élémentaires  $\mathbf{K}_e(\theta_k)$  et  $\mathbf{b}_e(\theta_k)$  pour des réalisations  $\theta_k$  particulières. Ces calculs sont classiques dans le cadre de la méthode X-FEM déterministe [SUK 01]. On notera qu'une quadrature de faible ordre au niveau stochastique est généralement suffisante pour intégrer correctement le problème discrétisé.

### 5.2. Projection au sens de $L^2$

On note  $\mathbf{u}_P \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}_P$  le vecteur aléatoire des degrés de liberté associé à  $\mathbf{u}_{h,P} \in \mathcal{V}_{h,P}$ . La méthode de projection consiste à définir la solution approchée  $\mathbf{u}_P$  comme la projection au sens de  $L^2(\Theta)$  du vecteur des inconnues nodales  $\mathbf{u}$  associé à la solution semi-discrétisée  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h$ . L'approximation est alors définie au sens du produit scalaire suivant :

$$\langle \mathbf{u}_P, \mathbf{v}_P \rangle_{L^2(\Theta)} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_P \rangle_{L^2(\Theta)} \quad \forall \mathbf{v}_P \in \mathbb{R}^n \otimes \mathcal{S}_P \quad (19)$$

où

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Theta)} = \int_{\Theta} \mathbf{v}(\theta)^T \mathbf{u}(\theta) dP(\theta) \quad (20)$$

L'équation (20) est équivalente à la définition suivante des coefficients de la décomposition stochastique :

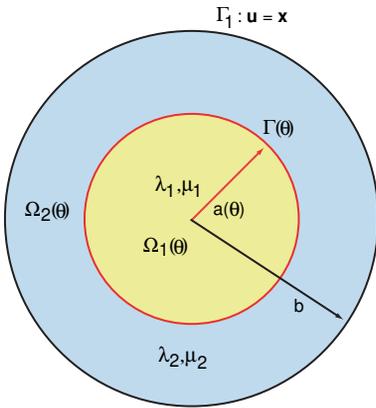
$$\mathbf{u}_\alpha = E(\mathbf{u}H_\alpha) = \int_{\Theta} H_\alpha(\theta)\mathbf{u}(\theta)dP(\theta) \quad (21)$$

Les coefficients  $\mathbf{u}_\alpha$  de la solution approchée sont alors calculés en utilisant une quadrature adaptée :

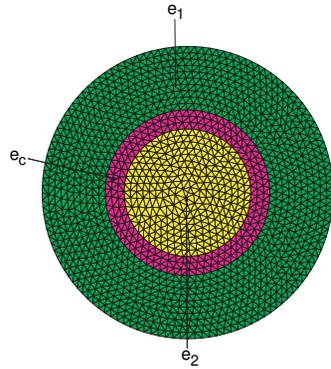
$$\mathbf{u}_\alpha \approx \sum_k \omega_k H_\alpha(\theta_k)\mathbf{u}(\theta_k) \quad (22)$$

où les  $\theta_k$  sont les points d'intégration, correspondant à des réalisations, et les  $\omega_k$  les poids d'intégration associés. Pour chaque point d'intégration, le calcul de  $\mathbf{u}(\theta_k) = \mathbf{K}^{-1}(\theta_k)\mathbf{b}(\theta_k)$  demande la résolution d'un problème déterministe pour lequel on utilise la méthode X-FEM.

## 6. Exemple numérique : inclusion circulaire aléatoire



**Figure 1.** Problème d'inclusion aléatoire.



**Figure 2.** Exemple de maillage X-SFEM avec états des éléments.

On considère un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  composé de deux matériaux élastiques aux caractéristiques différentes (voir figure 1). Les deux matériaux sont séparés par une interface circulaire  $\Gamma(\theta)$  de centre  $O$  et de rayon aléatoire  $a(\theta)$ . Le domaine intérieur est noté  $\Omega_1(\theta)$  et le domaine extérieur  $\Omega_2(\theta)$ . La frontière extérieure  $\Gamma_1$  de  $\Omega$  est un cercle de rayon  $b = 2$ . On considère que  $a(\theta)$  est une variable aléatoire uniforme sur  $(0.9, 1.1)$ . Les paramètres matériau sont choisis déterministes sur les deux domaines avec les modules d'Young et coefficients de Poisson suivants :  $E_1 = 1, \nu_1 = 0.4$  dans  $\Omega_1$  et  $E_2 = 10, \nu_2 = 0.3$  dans  $\Omega_2$ . On impose un champ de déplacement linéaire sur la frontière  $\Gamma_1$  tel que  $\mathbf{u} = \mathbf{x}$ . On notera qu'en effectuant un changement variable

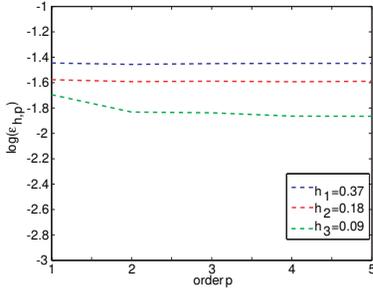
$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}}$ , avec  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$ , on se ramène à une formulation du type (5) pour la recherche de  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Pour le modèle numérique, on utilise un maillage spatial unique composé d'éléments triangles à 3 noeuds. La figure 2 présente l'un des maillages X-SFEM utilisés avec les différents états d'élément : les éléments appartenant sûrement à  $\Omega_1$  (groupe  $e_1$ ), les éléments appartenant sûrement à  $\Omega_2$  (groupe  $e_2$ ) et les éléments possiblement coupés par  $\Gamma(\theta)$  (groupe  $e_c$ ). Le problème ne possède ici qu'une seule dimension stochastique. On peut donc reformuler le problème sur un nouvel espace probabilisé de dimension 1, noté encore  $(\Theta, \mathcal{B}, P)$  par abus de notation, avec  $\Theta = (0.9, 1.1)$  et  $P_a$  la mesure uniforme sur  $(0.9, 1.1)$ . Pour l'approximation stochastique, on utilise un chaos polynomial généralisé d'ordre  $p$  pour lequel les fonctions de bases de  $\mathcal{S}_P$  sont les polynômes de Legendre sur  $(0.9, 1.1)$ .

On s'intéresse tout d'abord à l'influence de l'enrichissement de l'espace d'approximation. On mène une étude de convergence basée sur un indicateur d'erreur défini à partir de la solution X-SFEM en déplacement  $\mathbf{u}_{h,P}$  et de la solution exacte  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \theta)$  :

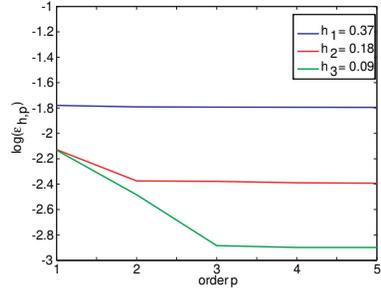
$$\varepsilon_{h,P} = \frac{\|\mathbf{u}_{h,P}(\mathbf{x}, \theta) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, \theta)\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, \theta)\|_{L^2}}, \quad (23)$$

Pour distinguer les deux approximations, on notera par la suite X-SFEM et X-SFEM<sup>+</sup> les solutions obtenues respectivement sans et avec enrichissement des espaces d'approximation. On note X-SFEM-Gal la solution obtenue avec une projection de Galerkin et X-SFEM- $L^2$  la solution obtenue avec la projection au sens de  $L^2$ . Les figures 3 et 4 présentent les courbes de convergence obtenues pour plusieurs solutions correspondant à différentes tailles moyennes  $h$  d'élément et différents ordres de troncature  $p$ . On constate que l'approche X-SFEM<sup>+</sup>-Gal conduit à des niveaux d'erreur inférieurs à ceux obtenus avec X-SFEM-Gal. Pour l'approximation stochastique, on observe dans les deux cas une convergence rapide en fonction de l'ordre  $p$ , l'erreur se stabilisant à un palier correspondant à l'erreur d'approximation spatiale. On observe également une bonne convergence en  $h$  de l'approximation. Les figures 5 et 6 montrent les erreurs locales obtenues avec les deux approches pour  $h = 0.09$  et  $p = 5$ . La solution X-SFEM<sup>+</sup>-Gal conduit à des erreurs localisées sur certains éléments possiblement coupés par  $\Gamma(\theta)$  tandis que la solution X-SFEM-Gal conduit à des erreurs élevées sur un nombre important d'éléments qui ne sont jamais coupés par  $\Gamma(\theta)$ .

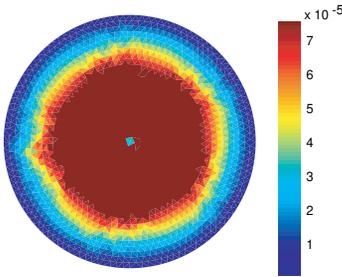
On s'intéresse maintenant aux différences entre les deux méthodes de projection. On ne présente ici que les résultats obtenus avec enrichissement de l'espace d'approximation. La solution X-SFEM obtenue avec la projection  $L^2$  est alors notée X-SFEM<sup>+</sup>- $L^2$ . La figure 7 présente la convergence de l'erreur  $\varepsilon_{h,P}$  en fonction de l'ordre  $p$  : on remarque que le comportement de l'erreur est similaire à celui de la solution obtenue avec X-SFEM<sup>+</sup>-Gal. En effet on observe toujours une convergence rapide en fonction de l'ordre  $p$ . De plus, on observe une convergence similaire en  $h$ . On notera que pour la méthode de projection  $L^2$ , une intégration stochastique d'ordre élevé est nécessaire afin d'obtenir un calcul précis de la décomposition sur le chaos.



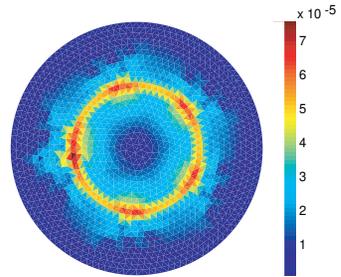
**Figure 3.** Convergence de l'erreur  $\varepsilon_{h,p}$  pour X-SFEM-Gal en fonction de  $p$  pour différents maillages.



**Figure 4.** Convergence de l'erreur  $\varepsilon_{h,p}$  pour X-SFEM<sup>+</sup>-Gal en fonction de  $p$  pour différents maillages.



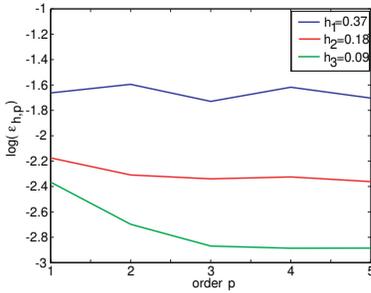
**Figure 5.** Erreurs locales obtenues pour X-SFEM-Gal avec  $p = 5$  et  $h = 0.09$ .



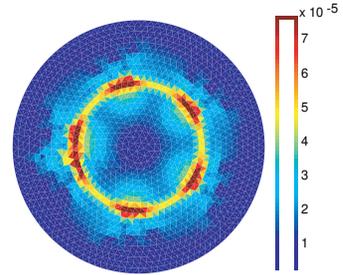
**Figure 6.** Erreurs locales obtenues pour X-SFEM<sup>+</sup>-Gal avec  $p = 5$  et  $h = 0.09$ .

## 7. Conclusion

Nous avons proposé une méthode éléments finis stochastiques permettant de résoudre un problème d'interface matérielle aléatoire sur un maillage éléments finis fixe. Cette méthode s'appuie sur une représentation des géométries aléatoires à l'aide de fonctions level sets. Nous avons montré l'intérêt d'enrichir l'espace d'approximation spatial afin d'obtenir une solution plus précise du problème. D'autre part, nous avons présenté deux méthodes de calcul de l'approximation, basées respectivement sur une projection de Galerkin et une projection  $L^2$ . Sur l'exemple traité, les deux approches de projection conduisent à des solutions de qualité équivalente, contrairement au cas des problèmes à formes aléatoires. Cependant, ces deux approches de projection nécessitent un soin particulier pour l'intégration stochastique. Les travaux futurs porteront sur une comparaison plus poussée des deux approches : stabilité de l'approximation vis-à-vis des erreurs d'intégration stochastique, comportement dans le cas d'une grande variabilité de la géométrie, comportement dans le cas de maillages très fins.



**Figure 7.** Convergence de l'erreur  $\varepsilon_{h,p}$  pour  $X$ -SFEM<sup>+</sup>- $L^2$  en fonction de  $p$  pour différents maillages.



**Figure 8.** Erreurs locales obtenues pour  $X$ -SFEM<sup>+</sup>- $L^2$  avec  $p = 5$  et  $h = 0.09$ .

## Remerciements

Ces études sont soutenues par l'Agence Nationale de la Recherche (projet ANR-06-JCJC-0064) et par le programme européen MEDACHS, concernant les méthodes de diagnostic, de réparation et de maintenance des structures situées sur le littoral atlantique (<http://www.medachs.univ-bordeaux1.fr>).

## 8. Bibliographie

- [BAB 05] BABUŠKA I., TEMPONE R., ZOURARIS G. E., « Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method : the stochastic formulation », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, 2005, p. 1251-1294.
- [DEB 01] DEB M., BABUŠKA I., ODEN J. T., « Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, 2001, p. 6359-6372.
- [GHA 91] GHANEM R., SPANOS P., *Stochastic finite elements : a spectral approach*, Springer, Berlin, 1991.
- [Le 04] LE MAITRE O. P., KNIO O. M., NAJM H. N., GHANEM R. G., « Uncertainty propagation using Wiener-Haar expansions », *Journal of Computational Physics*, vol. 197, n° 1, 2004, p. 28-57.
- [MEL 96] MELENK J. M., BABUŠKA I., « The partition of unity method : basic theory and applications », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 39, 1996, p. 289-314.
- [MOE 99] MOES N., DOLBOW J., BELYTSCHKO T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, 1999, p. 131-150.

- [MOE 03] MOES N., CLOIREC M., CARTRAUD P., REMACLE J., « A computational approach to handle complex microstructure geometries », *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, vol. 192, 2003, p. 3163-3177.
- [NOU 07a] NOUY A., « Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms », *Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering*, submitted, , 2007.
- [NOU 07b] NOUY A., SCHOEFS F., MOËS N., « X-SFEM, a computational technique based on X-FEM to deal with random shapes », *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 16, n° 2, 2007, p. 277-293.
- [NOU 08] NOUY A., CLÉMENT A., SCHOEFS F., MOËS N., « An eXtended Stochastic Finite Element Method for solving stochastic partial differential equations on random domains », *Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering*, submitted, , 2008.
- [SET 99] SETHIAN J., *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.
- [SOI 04] SOIZE C., GHANEM R., « Physical systems with random uncertainties : chaos representations with arbitrary probability measure », *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 26, n° 2, 2004, p. 395-410.
- [SUK 01] SUKUMAR N., CHOPP D., MOËS N., BELYTSCHKO T., « Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, 2001, p. 6183-6200.
- [WIE 38] WIENER N., « The homogeneous chaos », *Am. J. Math.*, vol. 60, 1938, p. 897-936.
- [XIU 02] XIU D. B., KARNIADAKIS G. E., « The Wiener-Askey Polynomial Chaos for stochastic differential equations », *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 24, n° 2, 2002, p. 619-644.