



HAL
open science

Nouvelles avancées dans les méthodes sans maillage : le couplage des techniques des éléments naturels et des moindres carrés mobiles

Francisco Chinesta, Julien Yvonnet, Pierre Villon, Piotr Breitkopf, Pierre Joyot, Iciar Alfaro, Elías Cueto

► To cite this version:

Francisco Chinesta, Julien Yvonnet, Pierre Villon, Piotr Breitkopf, Pierre Joyot, et al.. Nouvelles avancées dans les méthodes sans maillage : le couplage des techniques des éléments naturels et des moindres carrés mobiles. Piotr Breitkopf; Catherine Knopf-Lenoir. Modélisation numérique 2 : Défis et perspectives, Hermès-Lavoisier, pp.153-186, 2007, 9782746216167. hal-01007524

HAL Id: hal-01007524

<https://hal.science/hal-01007524>

Submitted on 25 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nouvelles avancées dans les méthodes sans maillage : le couplage des techniques éléments naturels et moindres carrés mobiles

Francisco CHINESTA, Julien YVONNET, Pierre VILLON, Piotr BREITKOPF, Pierre JOYOT,
Iciar ALFARO, Elias CUETO

Les méthodes sans maillage basées sur les approximations de type moindres carrés mobiles (Moving Least Squares, MLS), ont été l'objet d'intenses recherches durant la dernière décennie. Ces méthodes incluent les techniques de type *Smooth Particle Hydrodynamics*, *Element Free Galerkin*, *Diffuse Element Method*, *Reproducing Kernel Particle Method* [LUC 77] [BEL 94] [NAY 92] [LIU 95] [LIU 96], parmi d'autres. Cependant, l'un des problèmes de ces méthodes est la difficulté associée à l'imposition des conditions aux limites. Ce problème est dû à la nature même de l'approximation MLS. Le support des fonctions de forme, identique à celui des fonctions poids associées, ne coïncide généralement pas avec le bord. Le choix des nœuds voisins est aussi une difficulté. L'approche basée sur la recherche des k voisins les plus proches d'un point d'évaluation conduit seulement à une continuité C^0 . De plus, la complexité géométrique du support des fonctions de forme introduit des difficultés pour l'intégration numérique. Une technique d'intégration simple et un degré d'approximation arbitraire peuvent être obtenus lorsque les nœuds sont associés à des domaines d'influence fixes, sphériques ou hexaédriques, dont la taille optimale constitue la principale difficulté de cette approche. À l'inverse, l'approximation de type *Éléments Naturels* (EN) et la méthode numérique associée, la NEM, [SUK 98], ne présente pas ces inconvénients. L'approximation le long du bord est obtenue naturellement, car les fonctions de forme NEM associées aux nœuds intérieurs s'annulent sur le bord. Ainsi, pour un point situé

sur le bord, seuls les nœuds du bord contribuent à la construction de l'approximation. La liste des points connectés (les voisins naturels) est aussi connue par avance. Cependant, la NEM ne présente pas les avantages des MLS. En particulier, les fonctions de forme ont seulement une continuité C^0 aux nœuds et seule une consistance linéaire est garantie. L'objectif de cet article est de lier les deux approches afin de bénéficier des avantages des deux méthodes, NEM et MLS. L'idée principale est d'utiliser les fonctions de forme NEM comme des fonctions poids pour construire l'approximation MLS. Les deux bénéfices attendus sont l'imposition exacte des conditions aux limites de type essentielles, et un cadre systématique de recherche de voisins basé sur le diagramme de Voronoi. Dans ce contexte, les problèmes usuels concernant l'application des MLS dans le cadre des domaines de géométries non convexe peuvent être éliminés en utilisant deux techniques adaptées au cadre de la NEM : l'introduction d'un critère de visibilité permettant d'obtenir une approximation éléments naturels contraints (C-NEM), ou l'utilisation des fonctions de forme alpha - α -NEM -, permettant d'éliminer les influences entre noeuds sur les bords non convexes par un critère sur les triangles de Delaunay. La présente approche permet également de définir des dérivées nodales dans le cadre de la NEM. Celles-ci sont en effet nécessaires dans la simulation des problèmes thermomécaniques pour actualiser les variables internes dans le cadre des formulations Lagrangiennes actualisées. Cette nouvelle approche permet enfin de construire une large famille de formulations variationnelles et de méthodes de collocation.

1.1. Revue des méthodes sans maillage MLS, RKPM et NEM

1.1.1. *Techniques sans maillage basées sur les approximations MLS : méthodes DEM et EFG*

Soit le schéma d'approximation suivant :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad [1.1]$$

avec $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ une base polynomiale, i.e. $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, xy]$ et $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})[1, x, y, xy, x^2, y^2]$ pour des bases bilinéaires et quadratiques, respectivement, en 2D, et $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ un vecteur de coefficients inconnus. Afin de déterminer $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, nous définissons une fonctionnelle J qui doit être minimisée par rapport à $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ [NAY 92] :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2 \quad [1.2]$$

où u_i sont les coefficients d'inconnues nodales associés avec les noeuds \mathbf{x}_i et $w_i(\mathbf{x})$ sont les fonctions poids dont la valeur décroît quand la distance entre \mathbf{x}_i et \mathbf{x} augmente

(voir [BEL 94] pour plus de détails sur les propriétés et la forme explicite de ces fonctions). La minimisation de J par rapport aux coefficients inconnus $a_j(\mathbf{x})$ conduit à :

$$\frac{\partial J}{\partial a_j(\mathbf{x})} = \sum_{k=1}^n a_k \left[\sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_i) p_k(\mathbf{x}_i) \right] - \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_i) u_i = 0 \quad [1.3]$$

qui peut s'écrire comme un système linéaire :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad [1.4]$$

où les matrices $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ sont définies par :

$$A_{jk}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_i) p_k(\mathbf{x}_i) \quad [1.5]$$

$$B_{ij}(\mathbf{x}) = w_i(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}_i) \quad [1.6]$$

En substituant $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ dans l'Eq. (1.1), on obtient :

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad [1.7]$$

Par identification, les nouvelles fonctions de forme sont données par :

$$\boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad [1.8]$$

La différence entre les éléments finis diffus et la méthode element free Galerkin réside dans la façon d'évaluer les dérivées des fonctions de forme. Dans le premier cas seul le terme $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ dans l'Eq. (1.8) est dérivé, tandis que tous les autres termes dépendant de \mathbf{x} sont dérivés dans l'approche Element Free Galerkin.

1.1.2. Méthodes sans maillage basées sur des approximations de type particules : les méthodes RKPM et RKPM enrichies

Soit Ω un domaine unidirectionnel dans lequel le problème est défini (tous les résultats présentés ici ayant une extension directe en 2D et 3D). Les points du domaine seront notés x ou s .

1.1.2.1. Conditions de reproduction

Nous considérons une approximation $u^h(x)$ de $u(x)$ construite à partir de l'intégrale de convolution

$$u^h(x) = \int_{\Omega} w(x - s, h)u(s)d\Omega \quad [1.9]$$

où $w(x - s, h)$ est la fonction noyau et h est un paramètre définissant la taille du support d'une fonction de forme.

L'idée principale de la méthode RKPM enrichie est de forcer l'approximation à reproduire une fonction arbitraire. Celle-ci peut être décomposée en deux parties, une polynomiale et une autre notée $u^e(x)$:

$$u^h(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + a_{n+1}u^e(x) \quad [1.10]$$

Dans les paragraphes suivants, nous définissons les propriétés que doit satisfaire la fonction noyau $w(x - s, h)$, pour que celle-ci reproduise une fonction de la forme (1.10).

La condition de reproduction d'une fonction constante a_0 est, d'après l'Eq. (1.9), exprimée par :

$$\int_{\Omega} w(x - s, h)a_0d\Omega = a_0 \quad [1.11]$$

qui entraîne :

$$\int_{\Omega} w(x - s, h)d\Omega = 1 \quad [1.12]$$

qui représente une partition de l'unité.

La condition pour reproduire une fonction linéaire $u^a(x) = a_0 + a_1x$ est exprimée par

$$\int_{\Omega} w(x-s, h)(a_0 + a_1s)d\Omega = a_0 + a_1x \quad [1.13]$$

En utilisant la partition de l'unité (1.12), l'Eq. (1.13) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} w(x-s, h)d\Omega = 1 \\ \int_{\Omega} w(x-s, h)sd\Omega = x \end{cases} \quad [1.14]$$

qui entraîne la consistance linéaire de l'approximation. En répétant ce raisonnement, nous pouvons écrire la condition permettant de satisfaire une consistance d'ordre n sous la forme :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} w(x-s, h)d\Omega = 1 \\ \int_{\Omega} w(x-s, h)sd\Omega = x \\ \vdots \\ \int_{\Omega} w(x-s, h)s^n d\Omega = x^n \end{cases} \quad [1.15]$$

entraînant la condition de reproduction pour la fonction (1.10) donnée par

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w(x-s, h)(a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n + a_{n+1}u^e(s))d\Omega &= \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + a_{n+1}u^e(x) \end{aligned} \quad [1.16]$$

donnant finalement

$$\begin{cases} \int_{\Omega} w(x-s, h)d\Omega = 1 \\ \int_{\Omega} w(x-s, h)sd\Omega = x \\ \vdots \\ \int_{\Omega} w(x-s, h)s^n d\Omega = x^n \\ \int_{\Omega} w(x-s, h)u^e(s)d\Omega = u^e(x) \end{cases} \quad [1.17]$$

Dans la méthode originale proposée par Liu et al. [LIU 95], seule la consistance d'ordre n est imposée, et ne peut être utilisée pour imposer directement la condition associée avec $u^e(x)$.

1.1.2.2. La matrice de moment

Nous noterons $u^r(x)$ la fonction d'approximation vérifiant les conditions (1.17). Habituellement, une spline cubique est utilisée comme fonction noyau, et de ce fait les conditions données par l'Eq. (1.17) ne sont pas satisfaites. Liu et al. [LIU 95] ont proposé l'introduction d'une fonction de correction $C(x, x - s)$ pour satisfaire les conditions de reproduction. Dans notre cas nous considérons la forme plus générale $C(x, s, x - s)$, dont la pertinence sera discutée plus loin. La fonction $u^r(x)$ est alors exprimée par

$$u^r(x) = \int_{\Omega} C(x, s, x - s)w(x - s, h)u(s)d\Omega \quad [1.18]$$

où $C(x, s, x - s)$ est supposée prendre la forme suivante

$$C(x, s, x - s) = \mathbf{H}^T(x, s, x - s)\mathbf{b}(x) \quad [1.19]$$

où $\mathbf{H}^T(x, s, x - s)$ représente le vecteur contenant les fonctions considérées dans la base d'approximation, et $\mathbf{b}(x)$ est un vecteur contenant les fonctions inconnues qui seront déterminées pour satisfaire les conditions de reproduction. L'Eq. (1.17) peut alors être réécrite sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{H}^T(x, s, x - s)\mathbf{b}(x)w(x - s, h)d\Omega = 1 \\ \int_{\Omega} \mathbf{H}^T(x, s, x - s)\mathbf{b}(x)w(x - s, h)sd\Omega = x \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \mathbf{H}^T(x, s, x - s)\mathbf{b}(x)w(x - s, h)s^n d\Omega = x^n \\ \int_{\Omega} \mathbf{H}^T(x, s, x - s)\mathbf{b}(x)w(x - s, h)f^e(s)d\Omega = u^e(x) \end{array} \right. \quad [1.20]$$

Les conditions de reproductions doivent en fait être forcées sous forme discrète. Pour cela, nous considérons N points (aussi appelés nœuds dans cet article) qui permettent de calculer la forme discrète de l'Eq. (1.20), i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \mathbf{H}^T(x, x_i, x - x_i)\mathbf{b}(x)w(x - x_i, h)\Delta x_i = 1 \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{H}^T(x, x_i, x - x_i)\mathbf{b}(x)w(x - x_i, h)x_i\Delta x_i = x \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{H}^T(x, x_i, x - x_i)\mathbf{b}(x)w(x - x_i, h)x_i^n \Delta x_i = x^n \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{H}^T(x, x_i, x - x_i)\mathbf{b}(x)w(x - x_i, h)u^e(x_i)\Delta x_i = u^e(x) \end{array} \right. \quad [1.21]$$

qui donne sous forme matricielle

$$\left[\sum_{i=1}^N \mathbf{R}(x_i) \mathbf{H}^T(x, x_i, x - x_i) w(x - x_i, h) \Delta x_i \right] \mathbf{b}(x) = \mathbf{R}(x) \quad [1.22]$$

où $\mathbf{R}(x)$ est le vecteur de reproduction

$$\mathbf{R}^T(x) = [1, x, \dots, x^n, u^e(x)] \quad [1.23]$$

L'Eq. (1.22) permet le calcul du vecteur $\mathbf{b}(x)$,

$$\mathbf{b}(x) = \mathbf{M}(x)^{-1} \mathbf{R}(x) \quad [1.24]$$

où la matrice moment $\mathbf{M}(x)$ est définie par

$$\mathbf{M}(x) = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}(x_i) \mathbf{H}^T(x, x_i, x - x_i) w(x - x_i, h) \Delta x_i \quad [1.25]$$

Cette matrice moment diffère de la matrice moment habituelle proposée dans [LIU 95], et devient ici non symétrique.

1.1.2.3. *Forme discrète de la fonction d'approximation*

La forme discrète $u^r(x)$ de $u^h(x)$ est dérivé à partir des Eqs. (1.18), (1.19) et (1.24)

$$\begin{aligned} u^r(x) &\cong \sum_{i=1}^N \mathbf{H}^T(x, x_i, x - x_i) \mathbf{M}(x)^{-1} \mathbf{R}(x) w(x - x_i, h) u(x_i) \Delta x_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \psi_i(x) u_i \end{aligned} \quad [1.26]$$

où ψ_i est la fonction de forme RKP enrichie

$$\psi_i(x) = \mathbf{H}^T(x, x_i, x - x_i) \mathbf{M}(x)^{-1} \mathbf{R}(x) w(x - x_i, h) \Delta x_i \quad [1.27]$$

Comme dans l'approche classique RKPM nous prenons $\Delta x_i = 1$. Différents schéma d'intégration numérique existent et ont été testés avec une influence significative sur la qualité des conditions de reproduction.

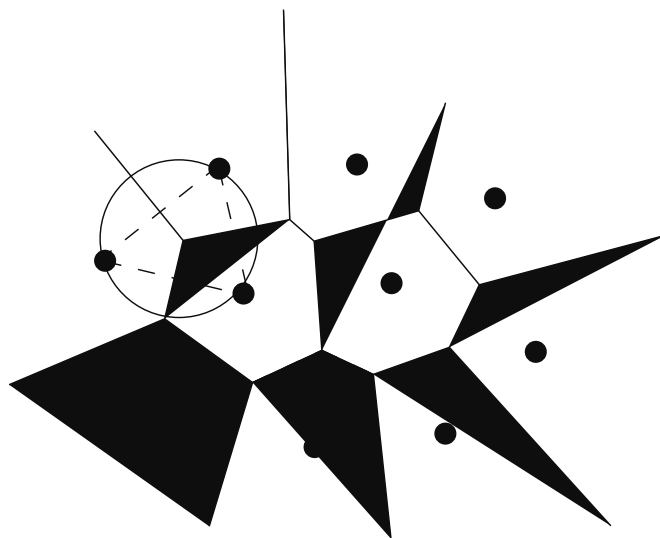


Figure 1.1. *Diagramme de Voronoi, triangle de Delaunay et cercle de Delaunay.*

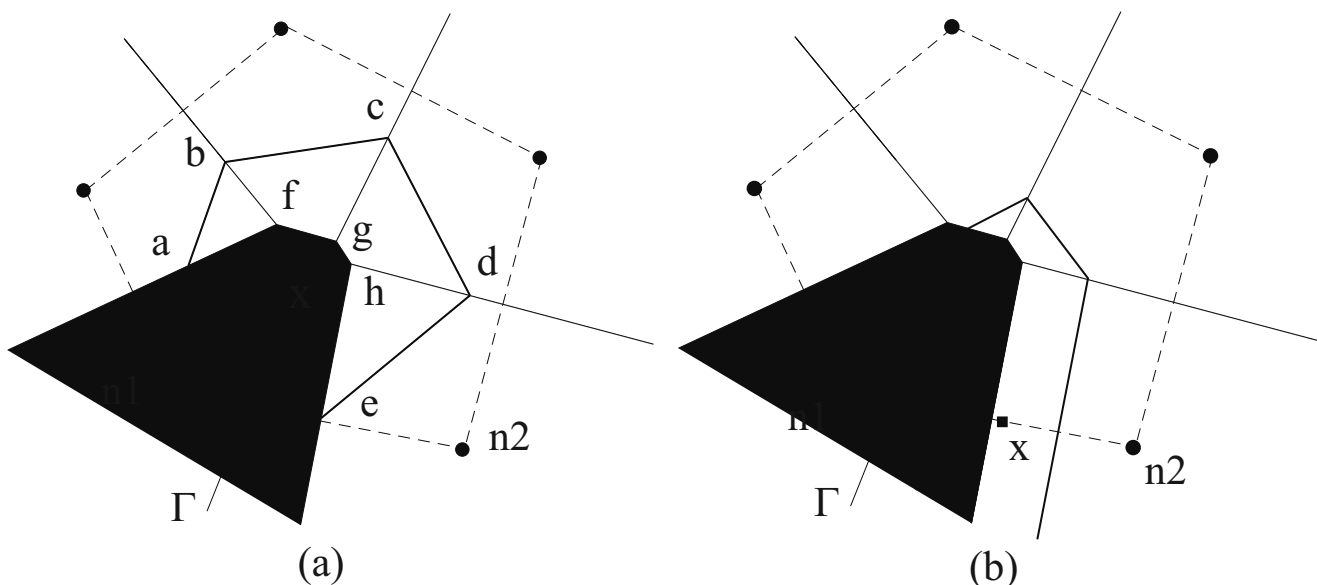


Figure 1.2. *Construction des fonctions de forme de Sibson.*

1.1.3. *Techniques sans maillage basées sur l'approximation éléments naturels : la méthode des éléments naturels (NEM)*

Nous donnons ici quelques éléments théoriques concernant les coordonnées de Sibson basées sur les voisins naturels, utilisées dans cette méthode. Pour une discussion plus approfondie sur les interpolants de Sibson et leur application pour résoudre les équations aux dérivées partielles du second ordre, le lecteur intéressé pourra se reporter aux travaux de Sambridge et Braun [SAM 95] et de Sukumar *et al.* [SUK 98]. Les interpolants NEM sont construits sur la base du diagramme de Voronoi. (voir fig. 1.1). La triangulation de Delaunay est le dual du diagramme de Voronoi.

Nous considérons un ensemble de nœuds $S = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ dans \mathfrak{R}^{dim} . Le diagramme de Voronoï est une subdivision de \mathfrak{R}^{dim} en zones T_i (cellules de Voronoï) définies par :

$$T_i = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{dim} : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j), \forall j \neq i\}, \quad \forall i \quad [1.28]$$

La coordonnée de Sibson de \mathbf{x} par rapport à un voisin naturel n_i (voir Fig. 1.2) est définie comme le rapport entre l'aire (volume en 3D) de l'intersection entre la cellule associée à \mathbf{x} et celle associée à n_i , et l'aire (volume en 3D) de la cellule associée à \mathbf{x} . Si nous considérons l'exemple 2D de la figure 1.2 (a), nous obtenons :

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \frac{Area(afghe)}{Area(abcde)} \quad [1.29]$$

Remarque. Par la suite, nous noterons $\phi_i(\mathbf{x})$ les fonctions de forme associées à la méthode NEM, tandis que la notation $\psi_i(\mathbf{x})$ sera utilisée pour identifier les fonctions de forme des techniques MLS ou RKPM.

Si le point \mathbf{x} coïncide avec le nœud n_i , i.e. ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$), alors $\phi_i(\mathbf{x}_i) = 1$, et toutes les autres fonctions de forme prennent une valeur nulle, i.e. $\phi_j(\mathbf{x}_i) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} étant la fonction delta de Kronecker). Les propriétés de positivité, d'interpolation, et de partition de l'unité sont alors vérifiées [SUK 98] :

$$\begin{cases} 0 \leq \phi_i(\mathbf{x}) \leq 1 \\ \phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) = 1 \end{cases} \quad [1.30]$$

où n est le nombre de nœuds voisins associés au point \mathbf{x} .

Les fonctions de forme éléments naturels vérifient également la propriété de consistance linéaire [SIB 80], soit :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{x}_i \quad [1.31]$$

qui combinée avec l' Eq. (1.30), implique que les fonctions de forme NEM permettent de reproduire les fonctions polynomiales linéaires.

Les fonctions éléments naturels de Sibson sont de continuité C^1 en tout point sauf aux nœuds, où elles sont seulement C^0 . La continuité C^1 peut être améliorée par l'utilisation de fonctions spéciales, appartenant à la famille des fonctions de forme éléments naturels [HIY 02].

Le support (domaine d'influence) d'une fonction de forme ϕ_i est l'union des sphères de Delaunay (circonscrites aux tétraèdres de Delaunay) contenant le nœud n_i . Ce support est donc non radial et s'adapte automatiquement à la position relative de n_i et de ses voisins, quelle que soit la densité ou la régularité de la distribution nodale locale.

Une autre propriété importante de ces fonctions de forme est la stricte linéarité sur les bords des domaines convexes. La démonstration est donnée par Sukumar *et al.* [SUK 98B]. Une illustration est représentée Fig. 1.2 (b) : lorsque la position du point x tend vers le bord, les aires associées aux nœuds du bord deviennent infinies, et la contribution des nœuds internes s'annule. Les fonctions de forme associées aux nœuds n_1 et n_2 deviennent alors linéaires sur le segment $(n_1 - n_2)$. Ceci n'est pas vrai si le bord du domaine est non convexe. Un traitement approprié doit alors être introduit pour maintenir cette propriété [CUE 02, YVO 04]. Associée à la propriété du delta de Kronecker, cette propriété permet d'imposer directement les conditions aux limites de type essentiel, comme dans la méthode des éléments finis. Elle permet également de garantir une continuité stricte de l'approximation au passage d'une interface. Ce point est une difficulté dans la plupart des méthodes sans maillage.

Nous considérons un schéma d'interpolation pour une fonction vectorielle $\mathbf{u}(\mathbf{x})$: $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de la forme :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad [1.32]$$

où \mathbf{u}_i sont les valeurs nodales du champ considéré dans les n voisins naturels du point \mathbf{x} , et $\phi_i(\mathbf{x})$ sont les fonctions de forme associées à chacun de ces nœuds. On peut noter que l'Eq. (1.32) définit un schéma d'interpolation local. Ainsi, les fonctions d'approximation et les fonctions test utilisées pour la discrétisation de la formulation variationnelle décrivant les problèmes traités dans cet article prennent la forme de l' Eq. (1.32).

La méthode des éléments naturels a été utilisée avec succès dans des problèmes où le domaine subit de fortes déformations au cours de la simulation, comme par exemple dans le cas de la simulation des procédés de mise en forme [ALF 06A, ALF 06B] ou

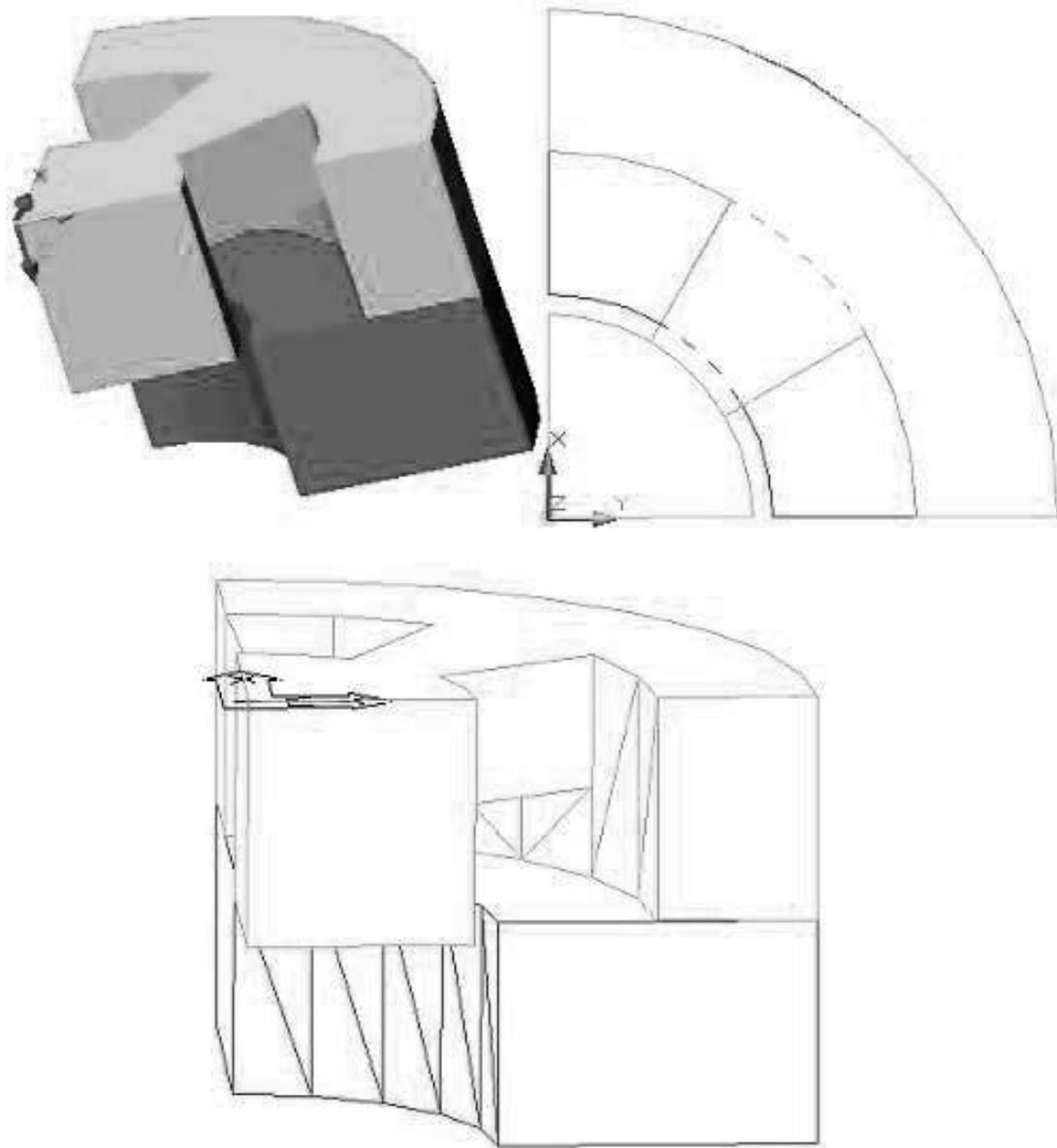


Figure 1.3. *Filière pour l'exemple de simulation d'extrusion de l'aluminium.*

des problèmes de fluides avec surfaces libres [MAR 03]. Un exemple d'illustration de la méthode est présenté dans les figures 1.3 et 1.4. Il s'agit d'une simulation du procédé d'extrusion des tubes en aluminium. Ce procédé nécessite l'utilisation d'une filière complexe, comme illustrée dans la figure 1.3. Cet exemple est particulièrement difficile à traiter par la méthode des éléments finis classiques, de par l'évolution complexe de la géométrie du domaine au cours de la simulation. La figure 1.4 présente les différents états du matériau au cours de son passage à travers la filière. Avec la NEM, le même nuage de nœuds est utilisé du début à la fin, et aucun remaillage au sens des éléments finis n'est effectué, malgré les grandes déformations et la complexité de la géométrie.

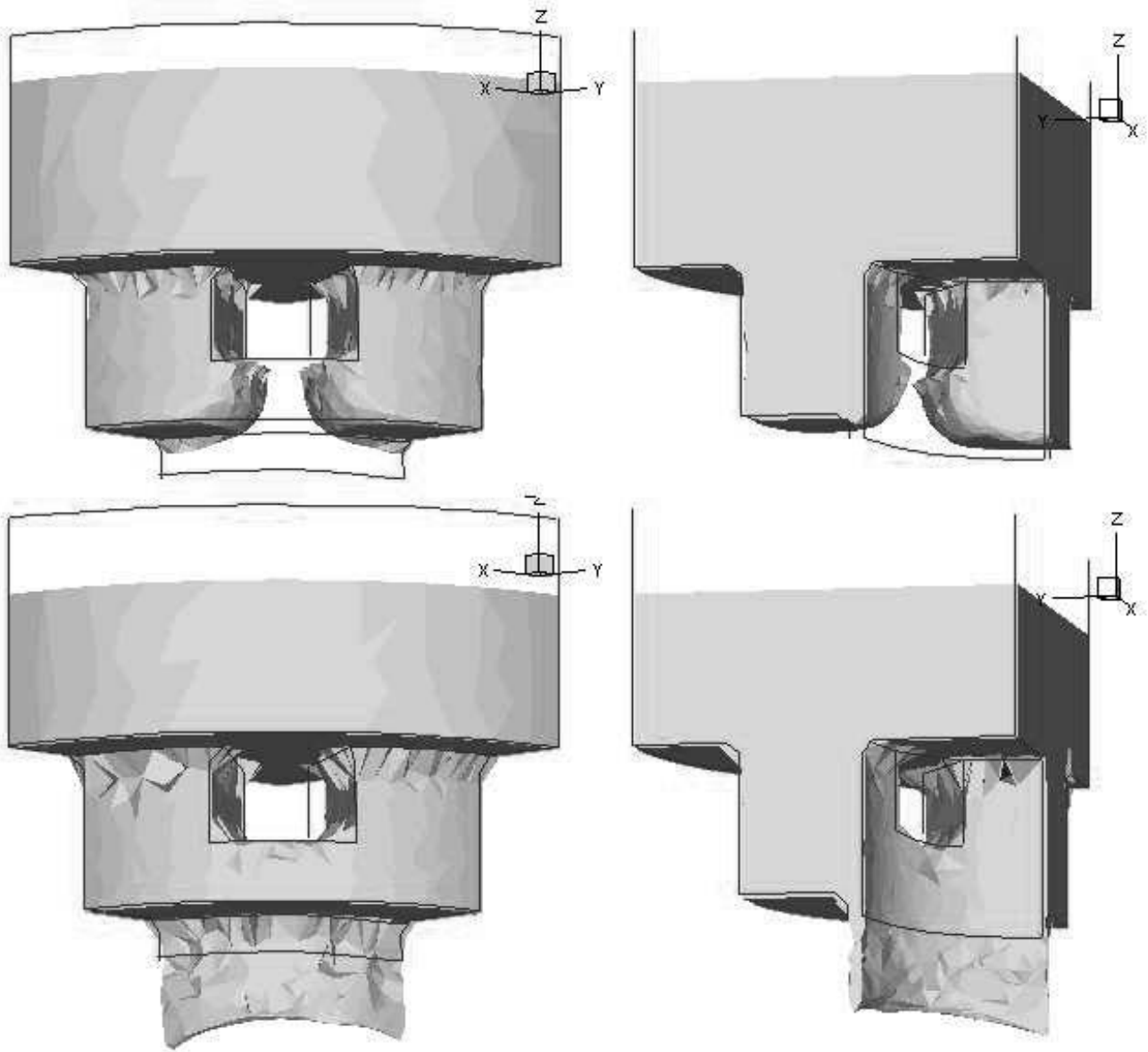


Figure 1.4. *Simulation d'extrusion de l'aluminium par la méthode des éléments naturels.*

1.2. Couplage entre approximations NEM et MLS

Dans ce paragraphe, qui constitue la principale contribution de ce travail, différents schémas hybrides combinant les éléments naturels et les moindres carrés mobiles sont proposés et analysés.

1.2.1. Schémas de type collocation éléments naturels

Le schéma d'approximation proposé ici consiste à utiliser les fonctions de forme Éléments Naturels (NEM) comme poids dans le schéma de type moindres carrés mobiles. Nous cherchons par ce biais à augmenter le degré d'approximation de l'approximation NEM, et ceci de façon réglable. Nous cherchons également à obtenir des

formules simples pour calculer les dérivées des fonctions de forme NEM. Nous montrerons dans un premier temps que l'approche proposée ne change pas les fonctions de forme NEM de manière significative si une base polynomiale linéaire $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y\}$ est utilisée.

La minimisation de la fonctionnelle usuelle par le critère des moindres carrés

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2 \quad [1.33]$$

avec $w_i(\mathbf{x})$ les fonctions de forme NEM, i.e. $w_i(\mathbf{x}) = \phi_i(\mathbf{x})$, entraîne : (voir [BRE 04] pour détails) $\Psi_i(\mathbf{x}) = \phi_i(\mathbf{x})$. De plus, les dérivées diffuses sont discontinues aux nœuds. Les mêmes résultats sont obtenus en considérant des conditions de reproduction quadratiques, i.e. $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$.

Cette approche rend l'utilisation des techniques de collocation délicate. Pour contourner cette difficulté, nous considérons un deuxième nuage de nœuds auxiliaires \mathbf{x}_j^* , à la manière de l'approche dite de " collocation par double grille " [BRE 00]. De cette manière, les dérivées du champ approximé peuvent être définie dans les points, et les dérivées nodales de l'approximation peuvent être définies en utilisant la technique des moindres carrés mobiles.

Soit u^h l'approximation NEM, ses dérivées pouvant être calculées dans les points \mathbf{x}_j^* . Les dérivées diffuses peuvent alors être calculées en tout point \mathbf{x} en utilisant une technique standard de type MLS, à partir de la fonctionnelle :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m w_j(\mathbf{x}) \left[\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \frac{\partial u^h}{\partial x}(\mathbf{x}_j^*) \right]^2 \quad [1.34]$$

et

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m w_j(\mathbf{x}) \left[\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \frac{\partial u^h}{\partial y}(\mathbf{x}_j^*) \right]^2 \quad [1.35]$$

où m est le nombre de points auxiliaires. Après minimisation, les coefficients $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ des deux approximations sont obtenus, ainsi que les dérivées des fonctions de forme diffuses, permettant de définir les dérivées diffuses en tout point \mathbf{x} :

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \Psi_{x,j}(\mathbf{x}) \frac{\partial u^h}{\partial x}(\mathbf{x}_j^*) \quad [1.36]$$

et

$$\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \Psi_{y,j}(\mathbf{x}) \frac{\partial u^h}{\partial y}(\mathbf{x}_j^*) \quad [1.37]$$

où $\Psi_{x,j}(\mathbf{x})$ et $\Psi_{y,j}(\mathbf{x})$ représentent les dérivées des fonctions de forme diffuses associées au point \mathbf{x}_j^* par rapport aux coordonnées x et y , évaluées au point \mathbf{x} .

Finalement, en considérant :

$$\frac{\partial u^h}{\partial x}(\mathbf{x}_j^*) = \sum_{i=1}^n \phi_{x,i}(\mathbf{x}_j^*) u_i \quad [1.38]$$

et

$$\frac{\partial u^h}{\partial y}(\mathbf{x}_j^*) = \sum_{i=1}^n \phi_{y,i}(\mathbf{x}_j^*) u_i \quad [1.39]$$

où $\phi_{x,i}(\mathbf{x}_j^*)$ et $\phi_{y,i}(\mathbf{x}_j^*)$ représentent les dérivées de fonctions de forme NEM associées au nœud \mathbf{x}_i par rapport aux coordonnées x et y , évaluées au point \mathbf{x}_j^* , les Eqs. (1.36) et (1.37) peuvent être utilisées pour définir des schémas de collocation.

Remarque. Lorsque la position du point \mathbf{x} tend vers celle de \mathbf{x}_i , les Eqs. (1.36) et (1.37) donnent les dérivées diffuses nodales, pouvant être utilisées pour le post-traitement ou dans le contexte de schémas de collocation.

La consistance linéaire des dérivées secondes peut être démontrée pour un choix approprié de points auxiliaires. Pour cela, nous localisons les points auxiliaires (pour l'approximation de consistance quadratique) afin qu'ils vérifient $\forall \mathbf{x}_j^*$ les conditions suivante :

$$\sum_{i=1}^n \{ \phi_{x,i}(\mathbf{x}_j^*) u_i - \phi_i(\mathbf{x}^*) u_{x,i} \} = 0 \quad [1.40]$$

et

$$\sum_{i=1}^n \{ \phi_{y,i}(\mathbf{x}_j^*) u_i - \phi_i(\mathbf{x}^*) u_{y,i} \} = 0 \quad [1.41]$$

où n est le nombre de nœuds voisins du point \mathbf{x}_j^* , et

$$\begin{cases} u_i = u(\mathbf{x}_i) = a + bx_i + cy_i + dx_i^2 + ex_iy_i + fy_i^2 \\ u_{x,i} = \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}_i) = b + 2dx_i + ey_i \\ u_{y,i} = \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}_i) = c + 2fy_i + ex_i \end{cases} \quad [1.42]$$

Cette stratégie a été appliquée avec succès pour résoudre des équations aux dérivées partielles à l'aide d'une discrétisation de type collocation dans [BRE 04].

1.2.2. Calcul accéléré de fonctions de forme de type NEM

La méthode sans maillage NEM permet d'obtenir une qualité équivalente aux éléments finis utilisant des quadrilatères/hexaédriques, mais est uniquement basée sur la triangulation de Delaunay (qui peut être construite automatiquement, et est unique pour un nuage de nœuds donné), pour construire les fonctions de forme, ce qui évite la tâche complexe liée à la construction du maillage. De plus, comme les fonctions de forme vérifient la propriété du delta de Kronecker, l'imposition des conditions aux limites est directe, ce qui n'est pas le cas dans la majorité des méthodes sans maillage.

Cependant, le calcul des fonctions de forme NEM en 3D est complexe et coûteux, impliquant des constructions géométriques à partir du diagramme de Voronoi (intersections et calcul de volumes complexes) en chaque point d'intégration. Un algorithme classique pour le calcul des fonctions de forme NEM en un point nécessite les opérations suivantes : (a) trouver les voisins naturels du point \mathbf{x} ; (b) construire la nouvelle cellule associée au point \mathbf{x} ; (c) calculer les volumes des cellules ou des intersections de cellules de Voronoi 3D utilisés pour le calcul des fonctions de forme ; et enfin (d) calculer les fonctions de forme par des rapports entre les volumes calculés. L'opération (a) peut être effectuée en un temps constant par une recherche locale dans le diagramme de Voronoi. Selon notre expérience, les opérations (b) et (c) sont les plus coûteuses en temps CPU. Dans le paragraphe suivant, nous proposons de nouvelles fonctions de forme de type NEM qui évitent d'effectuer les opérations (b) et (c).

Pour cela, une fonction poids particulière $w_i(\mathbf{x})$ basée sur les sphères de Delaunay est utilisée. Celle-ci possède les caractéristiques principales associées au support des fonctions de forme NEM [YVO 05]. L'introduction de ces poids particuliers dans le cadre EFG conduit à des fonctions de forme possédant la plupart des propriétés des fonctions de forme NEM (i.e. celles d'interpolation, de consistance linéaire, et de recherche des voisins et de connectivité basée sur les voisins naturels), mais n'utilisant aucune construction géométrique basées sur le diagramme de Voronoi, ce qui simplifie l'extension de la méthode au cas 3D et réduit les coûts de calculs.

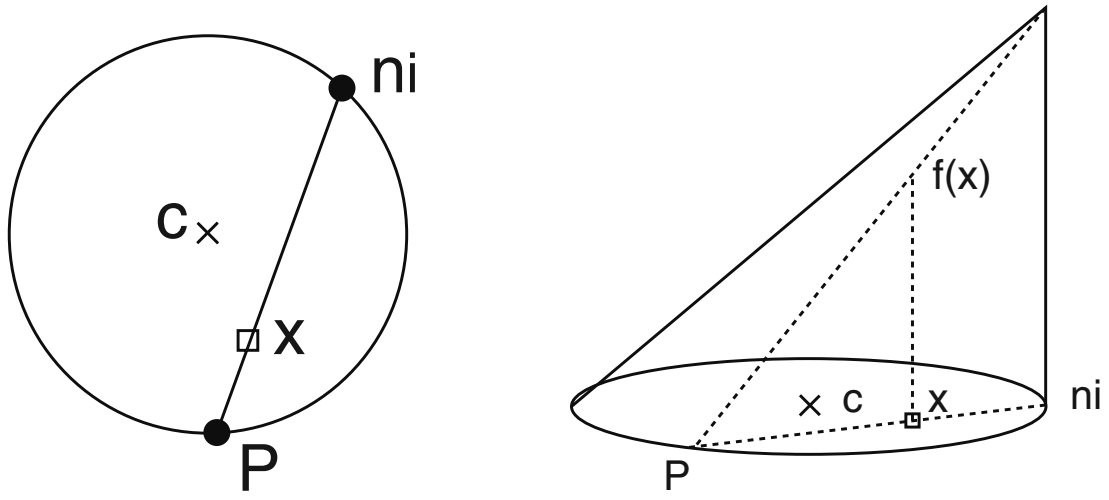


Figure 1.5. Fonction conique excentrée

1.2.2.1. Fonctions poids Pseudo-NEM

Si nous considérons la technique MLS, résumée dans le premier chapitre, l'approximation du champ $u(\mathbf{x})$, $u^h(\mathbf{x})$, peut être exprimée par :

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad [1.43]$$

où $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ est un vecteur contenant les fonctions de forme associées aux voisins naturels du point x . Par la suite, nous cherchons à définir une fonction poids appropriée $w_i(\mathbf{x})$ telle que la fonction de forme associée satisfasse les propriétés suivantes : (a) la propriété du delta de Kronecker ($\psi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$) ; (b) la consistance linéaire (satisfaite automatiquement dans le contexte MLS) ; (c) la linéarité des fonctions de forme sur les bords du domaine ; et (d) le support de $\psi_i(\mathbf{x}_j)$ coïncide avec celui des fonctions de forme NEM, i.e. est défini par l'union des sphères contenant le nœud n_i .

Pour ceci, nous proposons la fonction poids suivante. La définition est donnée ici en 2D, mais son extension au cas 3D est directe. Soit une fonction cône dont la base coïncide avec l'un des cercles de Delaunay contenant le point x , et où la projection du sommet du cône sur un plan passant par la base coïncide avec le nœud n_i (voir fig. 1.5).

La valeur de la fonction conique calculée au point x est donnée par :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{n}_i\mathbf{P}\| - \|\mathbf{n}_i\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{n}_i\mathbf{P}\|} \quad [1.44]$$

avec :

$$\mathbf{n}_i\mathbf{P} = -2 \left(\frac{\mathbf{c}\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_i\mathbf{x}}{\mathbf{n}_i\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_i\mathbf{x}} \right) \mathbf{n}_i\mathbf{x} \quad [1.45]$$

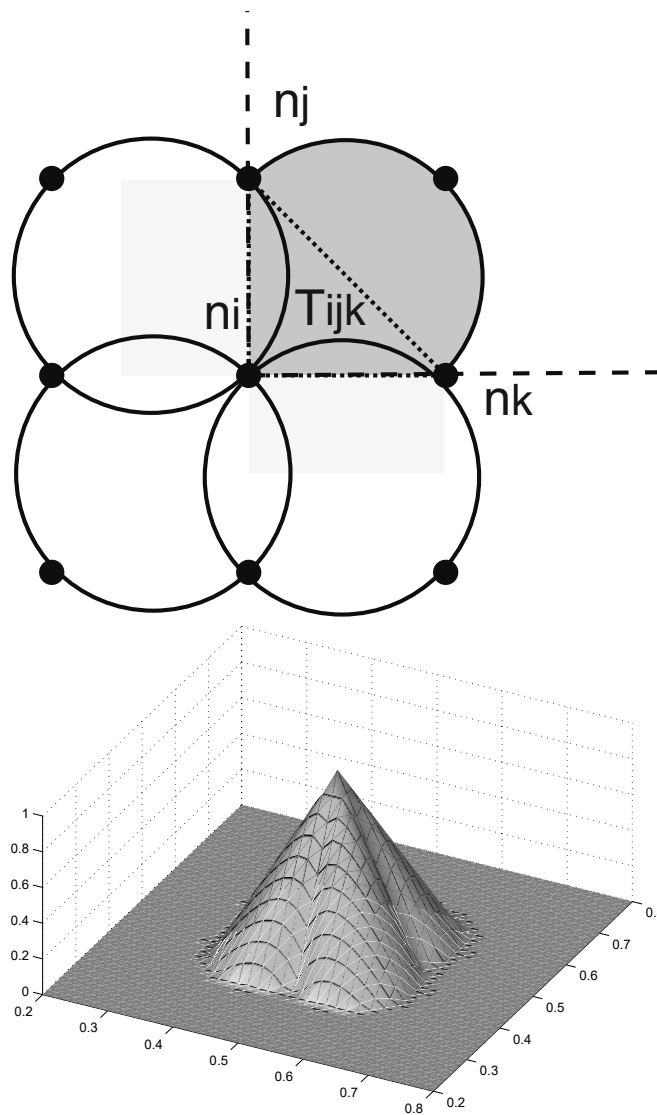


Figure 1.6. (Haut) portion du support de la fonction cône ; (bas) fonction poids.

Pour éviter de superposer des fonctions cône tout en conservant la continuité des fonctions poids, une portion de cône est associée à chaque triangle de Delaunay connecté au nœud n_i . La fonction cône est donc non nulle si un point x appartient à l'intersection entre le cercle circonscrit et la portion du plan telle que tout point dans le repère formé par le nœud d'origine n_i et les vecteurs $n_i - n_j$ et $n_i - n_k$ ait des coordonnées positives dans cette base. n_j et n_k sont les deux autres sommets du triangle (voir fig. 1.6). Grâce à la forme particulière de leur support, les fonctions de forme sont strictement interpolantes ($w_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$), car les cercles de Delaunay passent par les nœuds. De plus, les propriétés de positivité et de décroissance monotone sont vérifiées. Comme les fonctions cône sont linéaires entre deux nœuds, la continuité de la fonction poids, et donc de l'approximation, est garantie.

Afin de garantir la stricte linéarité des fonctions de forme sur les bords du domaine, les fonctions de forme associées aux nœuds intérieurs doivent s'annuler sur les bords du domaine. Pour garantir cela, nous multiplions les fonctions poids de l'Eq. (1.44)

par une fonction $\Xi(\mathbf{x})$ s'annulant sur les bords du domaine. Une solution simple est définie par :

$$\Xi(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta} \quad [1.46]$$

où $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ est le vecteur contenant les fonctions de forme éléments finis linéaires associées aux triangles de Delaunay, et $\boldsymbol{\delta}$ les valeurs nodales d'un champ prenant une valeur de 1 à l'intérieur du doamaine, i.e. $\delta_i = 1$ si $\mathbf{x}_i \in \Omega$, et s'annulant sur le bord du domaine $\Gamma \equiv \partial\Omega$, i.e. $\delta_i = 0$ si $\mathbf{x}_i \in \Gamma$.

1.2.2.2. Exemple numérique

Nous considérons le problème suivant de Poisson dans un cube 3D unitaire ;

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \Omega =]0, 1[^3 \\ u(\mathbf{x}) = u_g(\mathbf{x}) = 2x^2 - y^2 - z^2 \text{ on } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad [1.47]$$

dont la solution exacte est :

$$u^{ex}(\mathbf{x}) = 2x^2 - y^2 - z^2 \text{ in } \Omega \quad [1.48]$$

La forme faible associée au problème défini dans l'Eq. (1.47) est exprimée par :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ ($u = u_g$ sur Γ) tel que :

$$\int_{\Omega} \nabla u^* \cdot \nabla u \, d\Omega = 0, \quad \forall u^* \in H_0^1(\Omega) \quad [1.49]$$

où $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont les espaces fonctionnels de usuels.

Le problème a été résolu en utilisant plusieurs degrés de raffinement de maillage : $3 \times 3 \times 3$, $5 \times 5 \times 5$, $7 \times 7 \times 7$ et $10 \times 10 \times 10$ nœuds. La norme en énergie a été calculée pour déterminer la convergence de la solution. Les résultats sont donnés dans la figure 1.7. Une comparaison entre les temps de calcul obtenus avec les fonctions standard de Sibson et pseudo-NEM est donnée dans la figure 1.8.

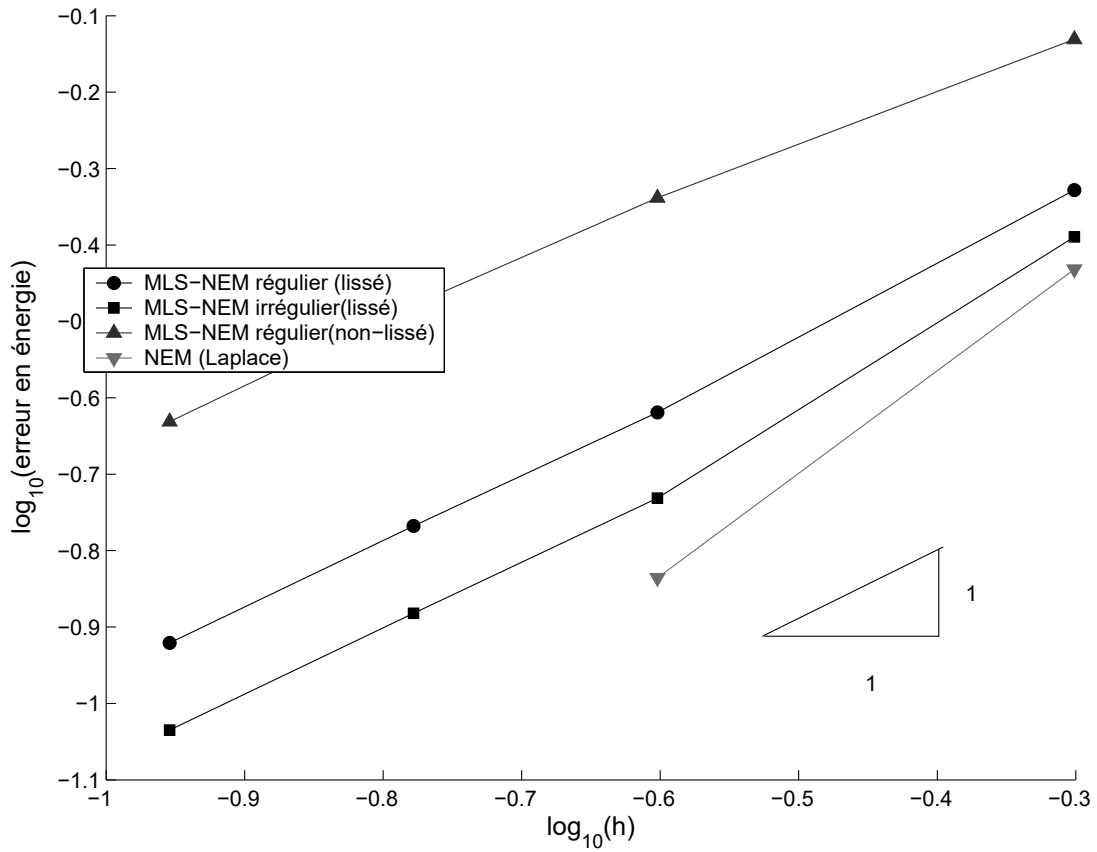


Figure 1.7. Etude de convergence pour le problème de Poisson.

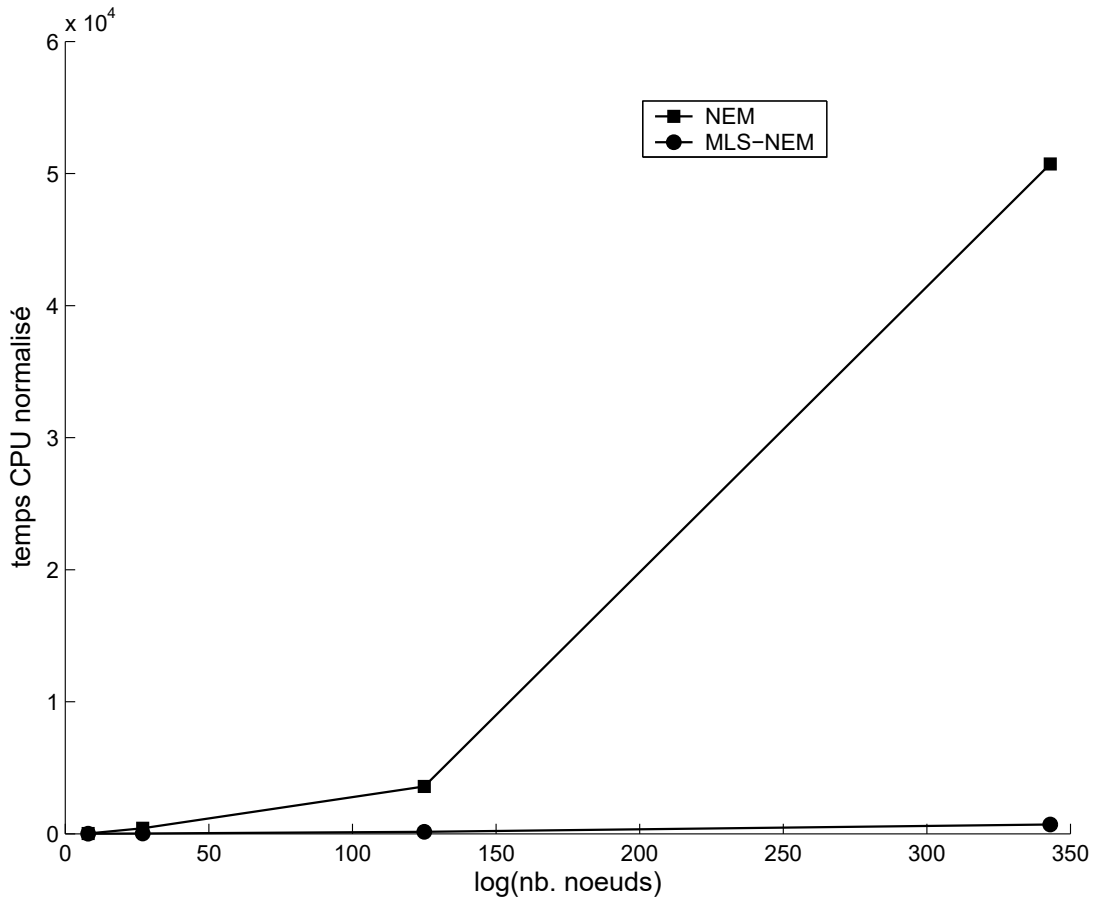


Figure 1.8. Comparaison des temps de calcul CPU pour les discrétisations Sibson-NEM et pseudo-NEM.

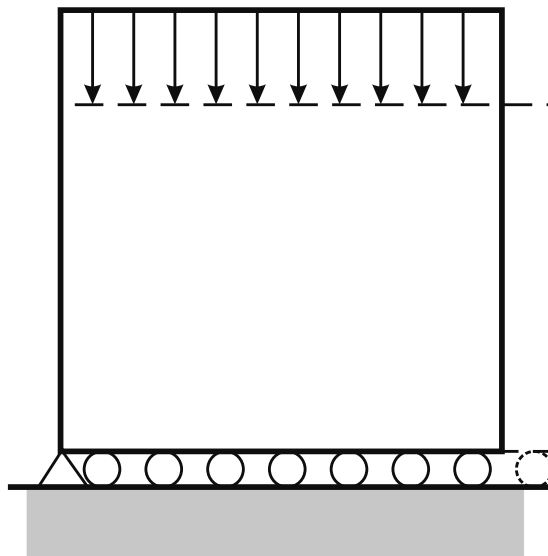


Figure 1.9. *Géométrie du test de compression*

1.2.2.3. Comparaison des temps CPU pour différentes approximations NEM

Comme mentionné précédemment, le coût CPU est l'un des inconvénients majeurs de la NEM, si on la compare avec la méthode des éléments finis (MEF). Afin de comparer l'importance de ce coût, nous analysons ici un autre problème avec solution analytique connue, résolu par quatre techniques différentes : (a) la NEM-Sibson, (b) la NEM-Laplace, (c) la pseudo-NEM et (d) la MEF

Le problème considéré ici est la compression d'un bloc cubique linéaire élastique (ou encore un *patch test*). Un déplacement de 0.01 suivant la direction z direction est imposé sur la face supérieure et les nœuds de la face inférieure sont contraints dans la direction z , voir figure 1.9.

Plusieurs nuages de nœuds ont été utilisés, avec des distributions aussi bien régulières qu'irrégulières, afin de tester l'influence de la position relative des nœuds sur la qualité de la solution et son impact sur le temps de recherche des voisins.

Dans le contexte de la MEF, la triangulation de Delaunay a été utilisée, avec 4 points d'intégration dans chaque tétraèdre. Toutes les simulations sans maillage utilisent les mêmes points d'intégration.

La Fig. 1.10 montre le temps nécessaire pour résoudre les différents problèmes. Il est clair que l'utilisation des fonctions de forme de Sibson (notées NEM-S) entraîne les temps de calculs les plus longs. De plus, ce temps augmente rapidement avec le nombre de nœuds, et celui-ci augmente encore lorsque la distribution est irrégulière. En effet, les distributions régulières de nœuds entraînent un nombre de triangles de Delaunay plus faible que dans le cas des distributions irrégulières, donnant un nombre de points d'intégration plus important.

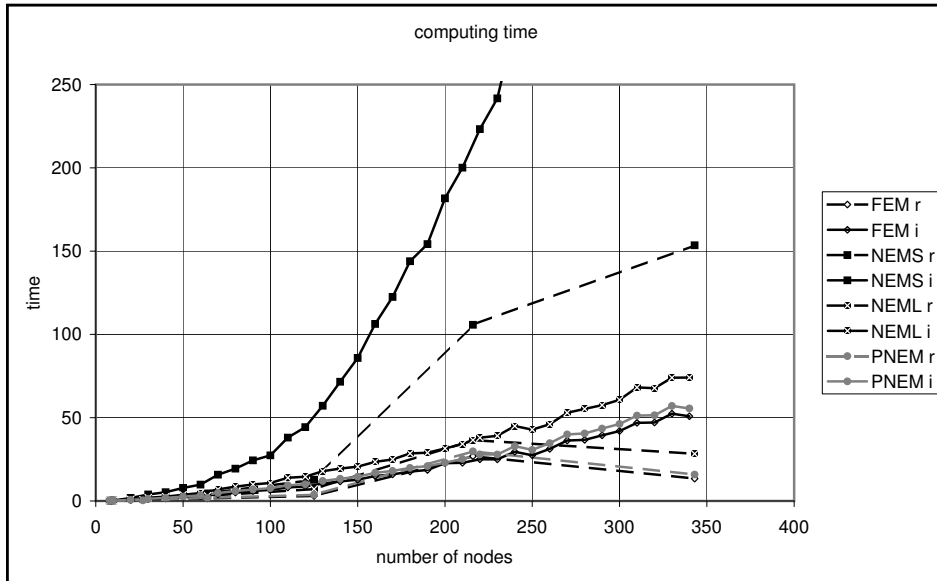


Figure 1.10. Comparaison des temps de calcul totaux.

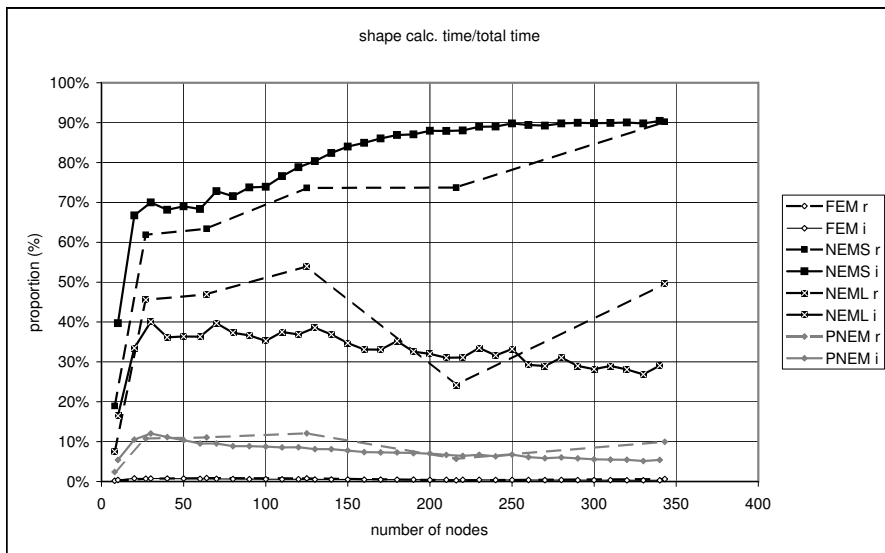


Figure 1.11. Temps de calcul des fonctions de forme par rapport au temps total.

Il est également intéressant d'évaluer le rapport entre le temps employé pour calculer les fonctions de forme et leurs dérivées, et le temps CPU de la simulation complète. Ceci est présenté dans la Fig. 1.11, où l'approche pseudo-NEM (P-NEM) utilise moins de 10 % du temps total, et décroît comparativement lorsque la taille du problème augmente. Le temps associé aux fonctions de Laplace (NEM-L) diminue également, mais utilise environ 30% du temps total. Une fois de plus, nous constatons que l'approche NEM-Sibson est très gourmande en temps de calcul.

1.2.3. Formulation NEM-Hermite

Dans ce paragraphe, une approximation à consistance quadratique est proposée, construite à l'aide d'une formulation de type Hermite diffuse [RAC 00]. Celle-ci est obtenue en utilisant les poids NEM dans le cadre des MLS, mais en minimisant cette fois une fonctionnelle faisant intervenir les dérivées de l'approximation. Pour cela, nous considérons un schéma d'approximation de la forme :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\mathbf{x})u_i + \sum_{i=1}^n \psi_i^x(\mathbf{x})\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{i=1}^N \psi_i^y(\mathbf{x})\frac{\partial u_i}{\partial y} \quad [1.50]$$

où $\psi_i(\mathbf{x})$ sont les fonctions de forme associées avec les variables inconnues u_i , $\psi_i^x(\mathbf{x})$ sont $\psi_i^y(\mathbf{x})$ les fonctions de forme associées avec les dérivées spatiales. Pour simplifier, nous considérons la somme dans l'Eq. (1.50) étendue à tous les nœuds N , plutôt qu'aux seuls n voisins naturels. Les deux expressions restent équivalentes car les fonctions de forme associées à des nœuds non voisins s'annulent. Dans contexte, u_i , $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_i}{\partial y}$ sont des inconnues (degrés de liberté). Afin de construire les fonctions de forme, nous considérons le schéma d'approximation suivant :

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad [1.51]$$

où $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ est une base polynomiale, e.g. $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$ et $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ est un vecteur de coefficients inconnus. Afin de déterminer $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, nous considérons la fonctionnelle suivante :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{x}) \left\{ [\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} - u_i]^2 + \alpha \left[\frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial x}(\mathbf{x})\mathbf{a} - \frac{\partial u_i}{\partial x} \right]^2 + \alpha \left[\frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial y}(\mathbf{x})\mathbf{a} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \right]^2 \right\} \quad [1.52]$$

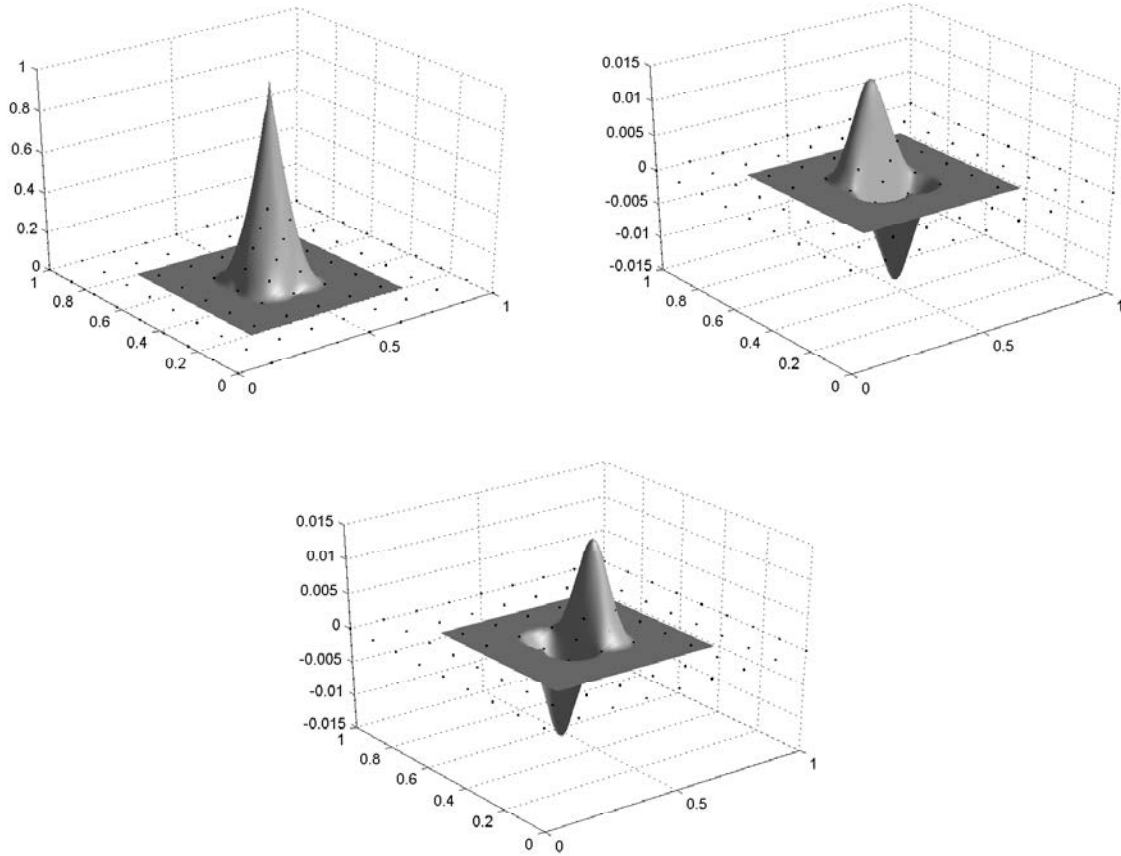


Figure 1.12. *Fonctions de forme NEM-Hermite.*

où $w_i(\mathbf{x})$ sont les fonctions de forme NEM calculées au point x , i.e. $w_i(\mathbf{x}) = \phi_i(\mathbf{x})$, $\frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial x}(\mathbf{x})$ et $\frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial y}(\mathbf{x})$ représentent les dérivées de la base $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ par rapport à x et y , respectivement. α est un paramètre dimensionnel, fixé à 1 dans nos simulations. La minimisation de J par rapport à $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, ($\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}(\mathbf{x})} = 0$), conduit au système d'équations suivant :

$$\mathbf{A}\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad [1.53]$$

$$\text{avec } \mathbf{q} = \left\{ u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, \dots, u_N, \frac{\partial u_N}{\partial x}, \frac{\partial u_N}{\partial y} \right\}.$$

Les dérivées des fonctions de forme sont obtenues par des procédures standard [BEL 94], impliquant les dérivées de la fonction poids $w_i(\mathbf{x})$. Les dérivées intervenant dans \mathbf{q} sont en fait des pseudo-dérivées (dérivées diffuses) et ne peuvent être utilisées pour discrétiser les formulations variationnelles. Cependant, elles peuvent être utilisées dans le cadre d'une méthode de collocation. Des formules explicites des dérivées des fonctions de forme de Sibson peuvent être trouvées dans [PIP 93]. Les fonctions de forme obtenues sont représentées dans la figure 1.12.

D'après l'Eq. (1.52), les nouveaux degrés de liberté associés avec les dérivées peuvent être interprétés comme des pseudo-dérivées qui ne coïncident pas avec les dérivées réelles. Ainsi, l'imposition des conditions aux limites essentielles devient délicate. Cependant, pour évaluer la qualité de l'approximation obtenue sans être pollués par ce problème, nous considérons par la suite un problème de Poisson dont la solution et ses dérivées s'annulent sur le bord du domaine..

1.2.3.1. Exemple numérique

Le problème aux limites est défini par :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\\ u = u_g & \text{sur } \Gamma \equiv \partial\Omega \end{cases} \quad [1.54]$$

Nous considérons ici :

$$\begin{cases} u_g = 0, \\ f = 4\pi^2 \{2\cos(2\pi x)\cos(2\pi y) - \cos(2\pi x) - \cos(2\pi y)\} \end{cases} \quad [1.55]$$

dont la solution exacte est :

$$u^{ex}(\mathbf{x}) = \{1 - \cos(2\pi x)\} \{1 - \cos(2\pi y)\} \quad [1.56]$$

La forme faible associée à l'Eq. (1.54) est donnée par :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \delta u \, d\Omega = \int_{\Omega} f \delta u \, d\Omega, \quad \forall \delta u \in H_0^1(\Omega) \quad [1.57]$$

où $H_0^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev usuel. L'interpolation NEM-Hermite décrite précédemment est utilisée pour approximer les fonctions tests et d'approximation u et δu , respectivement, toutes deux construites à partir des contributions des seuls nœuds internes..

L'erreur en norme énergie est calculée grâce à l'expression :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{E(\Omega)} = \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u^{ex} - \nabla u^h)^T (\nabla u^{ex} - \nabla u^h) \right)^{1/2} \quad [1.58]$$

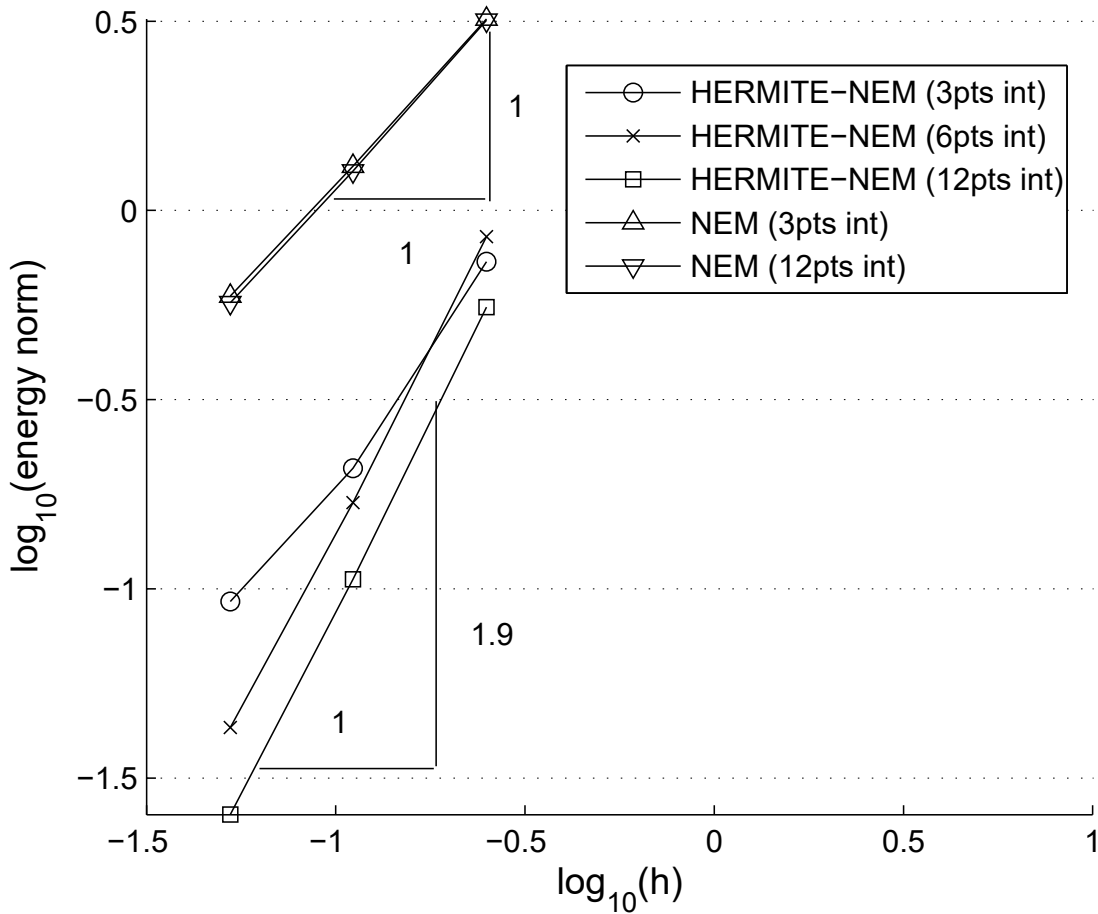


Figure 1.13. Etude de convergence par utilisation de la norme énergie pour le problème de Poisson 2D.

Pour l'évaluation des Eqs. (1.57) et (1.58), les cellules de Voronoi associées à chaque nœud sont triangulées un schéma d'intégration de Gauss est appliqué dans chaque sous triangle en utilisant 3, 6 et 12 points d'intégration. La figure 1.13 compare la qualité de l'approximation H-NEM avec celle de la méthode standard Sibson-NEM. Si seulement trois points de Gauss sont utilisés, la qualité de la H-NEM surpasse celle de la NEM, mais la différence de vitesse de convergence n'est pas significative. Si un schéma d'intégration plus fin est appliqué (6 points ou plus), l'approximation H-NEM permet d'atteindre, comme prévu, une vitesse de convergence quadratique.

1.2.4. Fonctions bulles hiérarchiques dans la NEM

L'intérêt de la méthode présentée ici est de permettre la construction d'approximations mixtes stables pour la discrétisation de formulations mixtes, comme par exemple dans la mécanique des matériaux incompressibles, où l'approximation mixte doit vérifier la condition inf-sup ou LBB.

Nous considérons un domaine ouvert $\Omega \in \mathfrak{R}^{dim}$ de bord Γ , dim étant la dimension de l'espace. Nous supposons que Ω est discrétisé par un ensemble de nœuds S . Soit $D(S)$ le complexe simplicial associé avec une triangulation de Delaunay associée à S . Un complexe simplicial K dans \mathfrak{R}^{dim} est un ensemble de simplexes (hyper tétraèdres) dans \mathfrak{R}^{dim} tels que :

- (i) Chaque face d'un simplexe K est dans K ;
- (ii) L'intersection de n'importe quel couple de simplexes de K est une face de chacun de ces simplexes [MUN 93] ;

Si nous notons F_k l'ensemble des k - simplexes ($0 \leq k \leq 3$), dans R^3 la triangulation (tétraèdrisation) de Delaunay $D(S)$ correspond au complexe simplicial définissant les tétraèdres dans F_3 , les triangles dans F_2 , les arêtes des triangles dans F_1 , et les sommets des triangles (nœuds) dans F_0 . Nous notons ces ensembles finis $T(S)$, $F(S)$, $E(S)$ et $V(S)$, respectivement.

Afin de construire des approximations plus riches, de nouvelles fonctions de forme peuvent être associées aux différents k - simplexes. Le cas $1 < k < 3$ correspond au concept de méthodes hiérarchiques [ZIE 83]. Le concept de fonctions bulle hiérarchiques est un moyen très simple de construire des approximations d'ordre supérieur. L'extension aux méthodes sans maillage n'est en général pas simple, à cause de l'absence de topologie liée à des éléments géométriques. Dans la méthode des éléments naturels, la triangulation de Delaunay sous-jacente permet une telle approche.

L'idée ici est d'associer de nouvelles fonctions de forme avec les k - simplexes de la tétraèdrisation de Delaunay, i.e. les tétraèdres $T' \in T(S)$, les triangles $F' \in F(S)$ les arêtes connectant deux nœuds $E' \in E(S)$ [YVO 06].

1.2.4.1. Approximation b -NEM

Un k -simplexe (K-S) (nœud, arête, triangle ou tétraèdre) est généré par $K = k + 1$ sommets ($k = 0, 1, 2$ et 3 , respectivement). Les fonctions de forme bulle d'une entité χ_j générée par K sommets sont calculées par l'expression :

$$\phi_j^*(\mathbf{x}) = \prod_{p=1}^K \phi_p(\mathbf{x}) \quad [1.59]$$

où $\phi_p(\mathbf{x})$ est la fonction de forme NEM associée avec le nœud n_p , calculée au point \mathbf{x} .

Le support d'un K-S généré par K sommets (nœuds) dans S est l'union des sphères de Delaunay contenant les K nœuds. On obtient, en 2D :

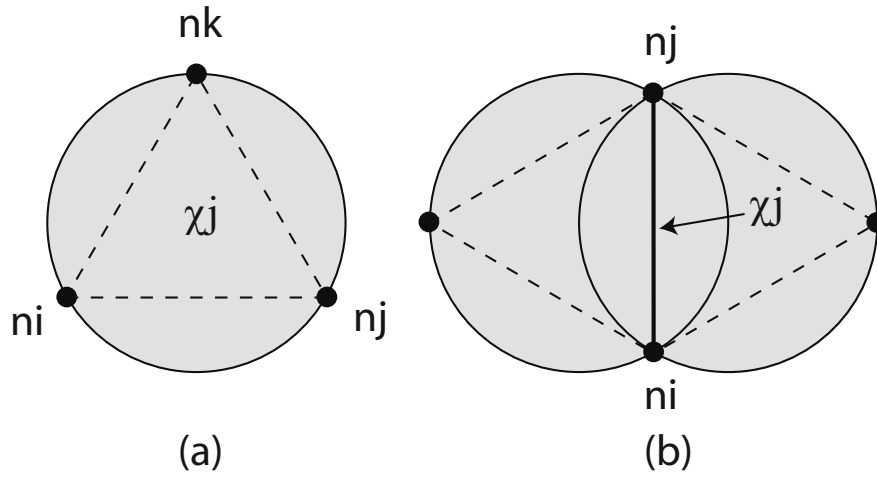


Figure 1.14. Supports des fonctions bulle associées aux k -simplexes de Delaunay ; (a) support d'un triangle de Delaunay χ_j $n_i - n_j - n_k$; (b) support d'une arête de Delaunay χ_j $n_i - n_j$.

(i) si χ_j est un triangle de Delaunay ($\chi \in F(S)$) ($k = 2$), le support de χ_j est composé d'un cercle contenant les trois nœuds générateurs du (voir fig. 1.14 (a)) ;

(ii) si χ_j est une arête d'un triangle de Delaunay ($\chi \in E(S)$) ($k = 1$), le support χ_j est composé de l'union de deux cercles (si $\chi_j \notin \Gamma$), ou d'un cercle si $\chi_j \in \Gamma$ (voir figure 1.14 (b)), contenant les deux nœuds générateurs de χ_j ;

Nous considérons à présent le schéma d'approximation suivant :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^m \phi_j^*(\mathbf{x}) \gamma_j \quad [1.60]$$

où n est le nombre de voisins naturels du point \mathbf{x} , $\phi_i(\mathbf{x})$ est la fonction de forme NEM associée au nœud $n_i \in S$ calculée au point \mathbf{x} , $\phi_j^*(\mathbf{x})$ est la fonction bulle définie dans l'Eq. (1.59) associée avec les m K-S, influents et γ_j est un degré de liberté additionnel.

Remarques :

(i) Différentes combinaisons peuvent être choisies pour enrichir l'approximation, i.e., en utilisant des fonctions associées aux triangles de Delaunay, aux arêtes, ou aux deux. Dans le cas 3D, encore plus de combinaisons sont possibles.

(ii) L'évaluation des fonctions de forme associées avec les K-S n'est pas coûteuse car elle ne met en jeu que des produits de fonctions de forme NEM, déjà calculées au point \mathbf{x} .

(iii) Bien que le schéma d'approximation défini dans l'Eq. (1.60) soit plus riche que l'approximation NEM standard, elle ne peut reproduire des polynômes d'ordre plus élevés que les fonctions linéaires.

(iv) Nous étudions et comparons ici deux schémas : (i) une fonction bulle associée aux triangles de Delaunay (que nous appelons b1-NEM); et (ii) une fonction bulle associée à chaque arête (appelé b2-NEM).

1.2.4.2. *b-NEM avec propriétés de reproduction*

Dans ce paragraphe nous proposons de corriger les fonctions de forme des schémas d'approximation (1.60) définis précédemment dans le cadre des moindres carrés mobiles, afin d'évaluer les éventuels gains d'une approximation de consistance d'ordre supérieur. La procédure MLS a été résumée précédemment. Soit $w_i(\mathbf{x})$ des fonctions poids associées à une fonction de forme bulle standard, i.e. $w_i(\mathbf{x}) = \phi_i(\mathbf{x})$ ou $w_i(\mathbf{x}) = \phi_i^*(\mathbf{x})$, calculée au point \mathbf{x} .

La procédure MLS conduit à :

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad [1.61]$$

où nous pouvons identifier le vecteur contenant les fonctions de forme :

$$\boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad [1.62]$$

Comme nous l'avons précisé, les b-NEM avec conditions de reproduction sont calculées en choisissant $w_i(\mathbf{x}) = \{\phi_i(\mathbf{x}); \phi_j^*(\mathbf{x})\}$, $\phi_i(\mathbf{x})$ et $\phi_j^*(\mathbf{x})$ étant les fonctions de forme définies dans (1.29) et (1.59).

Remark. La principale différence entre les b-NEM et les b-NEM avec conditions de reproduction est la nécessité dans le dernier cas de définir des coordonnées physiques associées avec chaque fonction de forme, afin d'évaluer les termes $p_j(\mathbf{x}_i)$ et $p_k(\mathbf{x}_i)$ dans l'Eq. (1.5) et (1.6). Une solution simple est de considérer les centres de gravité des entités de Delaunay.

Par la suite, les schémas b1-NEM et b2-NEM décrit précédemment sont corrigés en utilisant la procédure MLS. Dans le cas le plus défavorable, un point \mathbf{x} est influencé par quatre fonctions de forme dans le cas de la b1-NEM (3 fonctions de forme NEM et une fonction bulle associée au triangle de Delaunay). Ces fonctions poids étant linéairement indépendantes, la méthode est stable si la base $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ contient 4 monômes. Nous appelons b1-NEM⁺ le schéma d'approximation résultant de l'enrichissement du schéma b1-NEM avec la base bilinéaire $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y, xy\}$. De même, nous appelons, b2-NEM⁺ le schéma résultant de l'enrichissement de b2-NEM avec une base quadratique $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2\}$.

Nous avons montré dans [YVO 06] que les conditions aux limites de type essentiel peuvent être imposées directement dans les différents schémas d'approximation proposés, car les fonctions bulle s'annulent sur les bords du domaine. Pour plus de détails, se reporter aux démonstrations proposées dans l'article en question.

1.2.4.3. *Discrétisation NEM*

Nous considérons la formulation variationnelle mixte pour l'élasticité linéaire incompressible, où les déplacements et la pression sont interpolés avec de fonctions de forme différentes. Par la suite, la pression est interpolée en utilisant les fonctions de forme NEM standard (de Sibson), tandis que les déplacements sont interpolés en utilisant les schémas b-NEM ou b-NEM⁺ définis précédemment (voir [YVO 06] pour plus de détails).

Afin d'évaluer ces approximations dans le cadre du test inf-sup, une séquence de maillages de plus en plus raffinés sont considérés (avec distribution nodale uniforme), en suivant la procédure proposée dans [BAT 86], [CHA 93]. L'objectif est d'étudier l'évolution de la valeur inf-sup λ_{min} , lorsque h diminue. Si $\log(\lambda_{min})$ diminue quand $\log(h)$ diminue, alors le schéma d'approximation ne passe pas le test numérique inf-sup, ou LBB, qui impose que $\log(\lambda_{min})$ reste borné par une constante positive quand $\log(h)$ tend vers zero.

La figure 1.15 montre les résultats de ce test pour différents schémas d'approximation mixte, i.e. : b-NEM/NEM, NEM/Thiessen [SUK 98B] (qui correspond à utiliser l'approximation NEM pour les déplacements, et une pression constante dans chaque cellule de Voronoi), et des schémas mixtes éléments finis, comme les schémas P1/P0 et P2/P1. Les calculs EF sont effectués en utilisant comme éléments les triangles de Delaunay. Comme cela avait été remarqué dans des travaux précédents, [GON 04B], l'approximation mixte NEM/Thiessen ne passe pas le test numérique inf-sup. Le schéma EF FEM P1/P0 est aussi bien connu pour ne pas passer ce test [CHA 93]. Par contre, tous les schémas utilisant des fonctions bulle vérifient bien la condition LBB, et les résultats sont similaires à ceux obtenus pour le schéma EF P2/P1 FEM, connu pour passer ce test.

Comme cela a été note précédemment, les fonctions de forme NEM ne possèdent que la consistance linéaire [SIB 80]. L'enrichissement des fonctions bulle dans le contexte MLS ne semble pas améliorer la vitesse de convergence, pour les schémas d'intégration relativement grossiers utilisés ici. L'amélioration des performances de ces schémas est un travail en cours.

1.2.5. *Interpolation NEM avec dérivées discontinues*

Une possibilité pour définir des schémas d'interpolation NEM avec dérivées discontinues est d'utiliser le concept de partition de l'unité (de façon similaire à la méthode X-FEM) [MEL 96]. Cependant, nous proposons dans le cadre de cette étude un

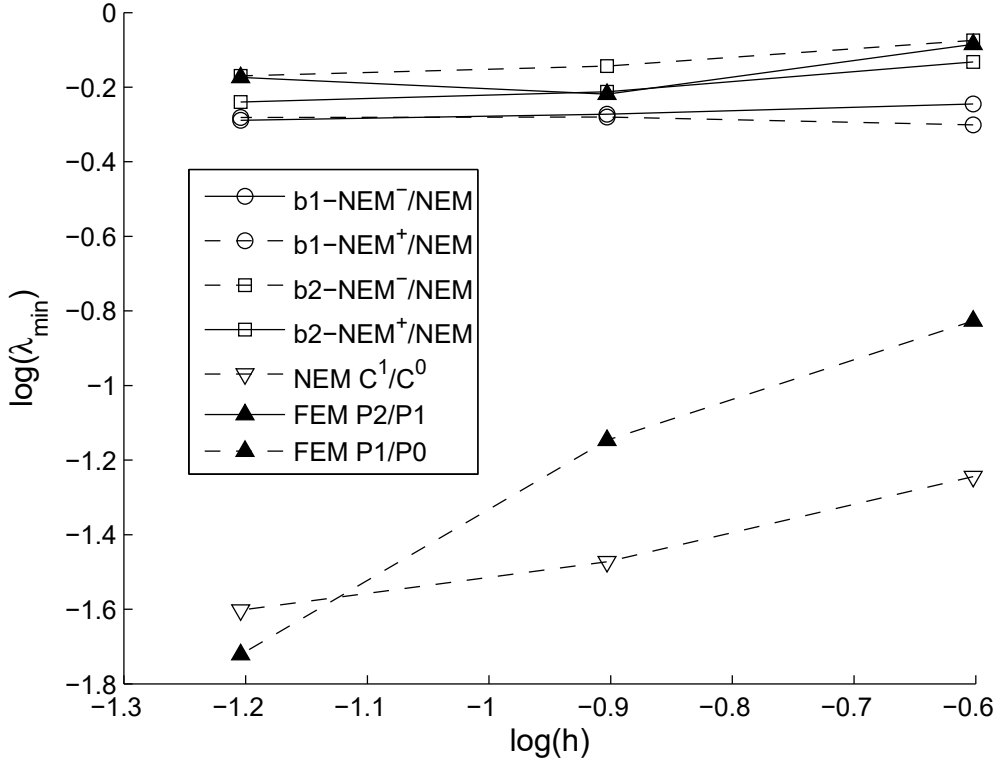


Figure 1.15. Test numérique inf-sup.

enrichissement n'impliquant pas de degrés de liberté supplémentaires. Nous introduisons pour cela dans un premier temps la notion de RKPM enrichie. L'introduction de la NEM dans la fonction noyau permet de construire un schéma de type NEM avec dérivées discontinues.

1.2.5.1. Introduction de la NEM dans la méthode E-RKPM : la méthode NEM-Enrichie (E-NEM)

Nous considérons la description d'une interface par une fonction level set définissant une discontinuité des dérivées du champ considéré. Nous définissons alors une fonction enrichie $u^e(x)$ comme suit :

$$u^e(\mathbf{x}) = H_0(\Theta(\mathbf{x}))\Theta(\mathbf{x}), \quad [1.63]$$

où

$$\Theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \Theta(\mathbf{x}) < 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \Theta(\mathbf{x}) > 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_2 \\ \Theta(\mathbf{x}) = 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \Gamma_d \end{cases}. \quad [1.64]$$

et

$$\begin{cases} H_0(\Theta(\mathbf{x})) = 1 & \text{if } \Theta(\mathbf{x}) \geq 0 \\ H_0(\Theta(\mathbf{x})) = 0 & \text{if } \Theta(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad [1.65]$$

A présent, nous considérons dans le schéma E-RKPM une base linéaire, un schéma d'enrichissement défini dans l'Eq. (1.63), avec une fonction noyau $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i, h) = \phi_i(\mathbf{x})$ (les fonctions de forme NEM). L'approximation qui en résulte possède la consistance linéaire et permet en plus de reproduire des dérivées dont la discontinuité est suivant la normale à l'interface Γ_d .

Afin d'illustrer les capacités de la technique proposée, nous considérons la solution exacte du problème de Laplace (modélisant les distributions de température dans un problème de thermique stationnaire). Le problème est défini dans un domaine constitué de deux matériaux possédant chacun une conductivité thermique différente. Les tests sur les conditions de reproduction ont été menés en utilisant les E-RKPM, l'interface circulaire étant modélisée comme la distance à cette interface multipliée par une fonction de Heaviside associée. La Fig. 1.16 illustre une portion du champ de températures reconstruit, où nous pouvons remarquer la description précise de l'interface. La discontinuité des dérivées du champ est prise en compte finement, comme le montre la représentation de la dérivée suivant x dans la figure 1.17.

Pour terminer, dans le but de quantifier la qualité des résultats, nous comparons dans la figure 1.18 l'erreur (définie à partir des deux normes usuelles), obtenue en utilisant les méthodes E-RKPM et E-NEM. Dans la figure 1.19 nous constatons que l'erreur obtenue avec la E-NEM ne semble pas affectée par le changement de pente au niveau de l'interface, celui-ci augmentant avec la différence des conductivités thermiques (pour $K1 = 10$, le rapport des conductivités est de 10 tandis que celui-ci est de 100 pour $k1 = 100$).

1.3. Conclusions

Nous avons ici exploré les connexions entre les méthodes sans maillage dites "éléments naturels" (NEM) et "des moindres carrés mobiles" (MLS) en introduisant comme fonction poids dans les MLS les fonctions de forme NEM. Ceci permet de régler la consistance de l'approximation obtenue et d'enrichir celle-ci avec des fonctions particulières, présentes dans la solution recherchée. De plus, l'introduction des fonctions NEM dans la méthode MLS permet d'imposer les conditions aux limites directement.

Cette approche conduit, comme nous l'avons montré dans cet article, à une large famille de formulations : (i) des méthodes de collocation NEM ; (ii) des schémas

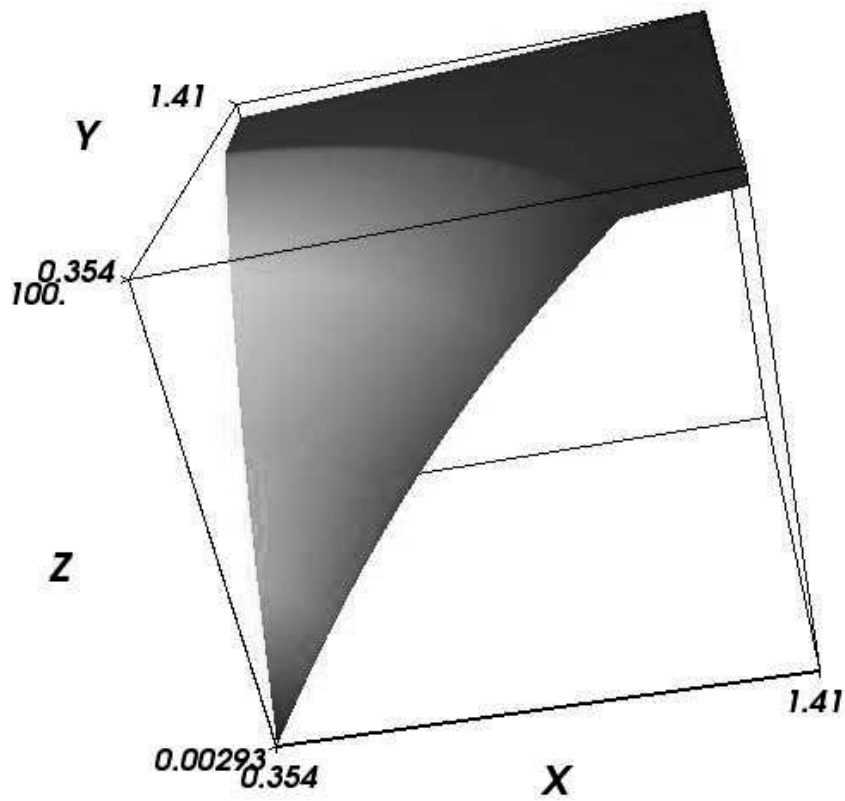


Figure 1.16. Approximation NEM enrichie avec dérivées discontinues au passage d'une interface circulaire.

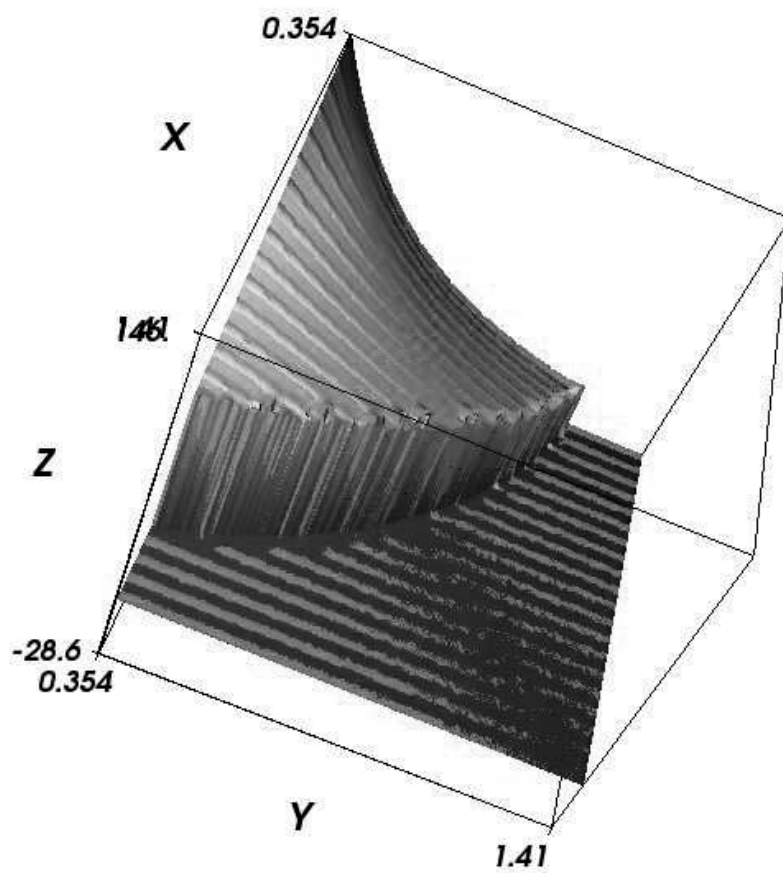


Figure 1.17. Dérivée suivant x du champ de température.

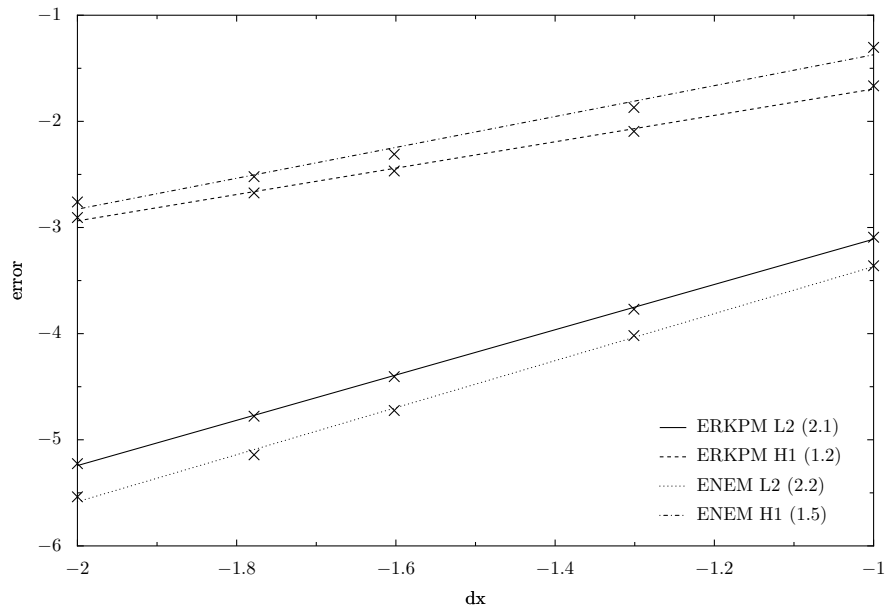


Figure 1.18. Erreur en approximation pour les méthodes E-RKPM et E-NEM.

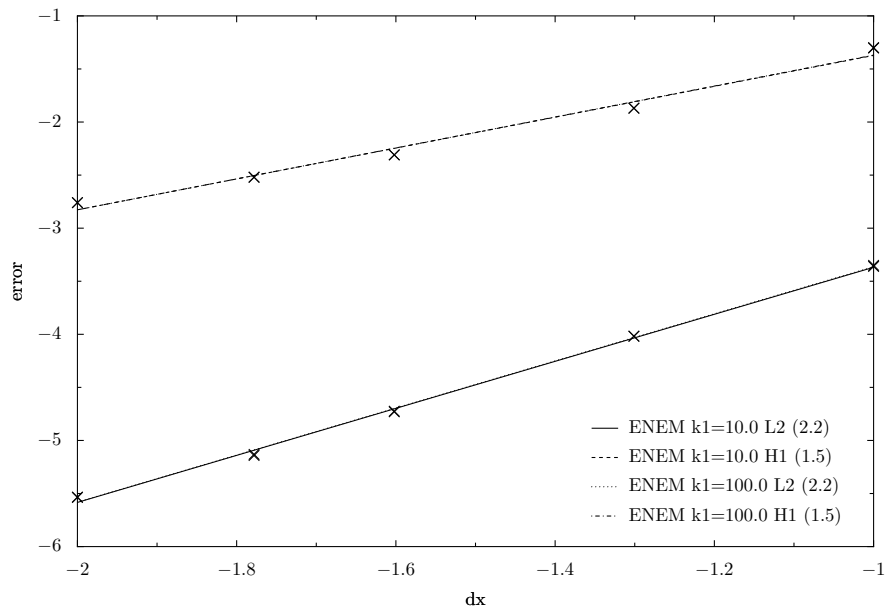


Figure 1.19. Erreur d'approximation pour différents rapports de conductivités thermiques.

de discrétisation NEM simples et rapides à construire ; (iii) des formulations NEM-Hermite ; (iv) des fonctions bulles hiérarchiques dans le cadre de la NEM et (v) des approximations NEM enrichies.

1.4. Bibliographie

[ALF 06a] ALFARO I., YVONNET J., CUETO E., CHINESTA F., « Meshless methods with application to metal forming », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, in press, 2006.

- [ALF 06b] ALFARO I., BEL D., CUETO E., DOBLARÉ M., CHINESTA F., « Three-dimensional simulation of aluminium extrusion by the α -shape based natural element method », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(33-36), 4269-4286, 2006.
- [BAT 86] BATHE K.J., *Finite Element procedures*, Prentice Hall, 1986.
- [BEL 94] BELYTSCHKO T., LU Y.Y., GU L., « Element-free Galerkin methods », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 229-256, 1994.
- [BRE 00] BREITKOPF P., TOUZOT P., VILLON P., « Double grid diffuse collocation method », *Computational mechanics*, 25, 199-206, 2000.
- [BRE 04] BREITKOPF P., CHINESTA F., VILLON P., RASSINEUX A., YVONNET J., « A mixed natural neighbor and diffuse element framework for meshfree methods development », *Computational Mechanics WCCM VI in conjunction with APCOM'04*, Beijing, China, Tsinghua University Press & Springer-Verlag, 2004.
- [CHA 93] CHAPPELLE D., BATHE K.-J., « The inf-sup test », *Comput. Struct.*, 48, 745-760, 1993.
- [CUE 02] CUETO E., CEGONINO J., CALVO B., DOBLARÉ M., « On the imposition of essential boundary conditions in Natural neighbor Galerkin Methods », *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 19, 361-376, 2002.
- [DEL 34] DELAUNAY B., « Sur la sphère vide. A la memoire de Georges Voronoï », *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennyh Nau.* 7, 793-800, 1934
- [GON 04a] GONZALEZ D., CUETO E., MARTINEZ M.A., DOBLARÉ M., « Numerical integration in Natural neighbor Galerkin methods », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60/12, 2077-2104, 2004.
- [GON 04b] GONZALEZ D., CUETO E., DOBLARÉ M., « Volumetric locking in natural neighbour Galerkin methods », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, 611-632, 2004.
- [HIY 02] HIYOSHI H., SUGIHARA K., « Improving continuity of Voronoi-based interpolation over Delaunay spheres », *Computational Geometry*, 22, 167-183, 2002.
- [LIU 95] LIU W.K., JUN S., ZHANG Y.F., « Reproducing Kernel Particle Methods », *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 21, 1081-1106, 1995.
- [LIU 96] LIU W.K., CHEN Y., JUN S., BELYTSCHKO T., PAN C., , URAS R.A., « Overview and applications of the reproducing kernel particle methods », *Archives of computational methods in engineering : state of the art reviews*, 3, 3-80, 1996.
- [LUC 77] LUCY L.B., « A numerical approach to the testing of fusion process », *The Astronomic Journal*, 88, 1013-1024, 1977.
- [MAR 03] MATRINEZ M.A., CUETO E., DOBLARÉ M., CHINESTA F. « Natural element meshless simulation of flows involving short fiber suspensions », *Journal of Non-Newtonian Fluids Mechanics*, 115(1), 51-78, 2003.
- [MEL 96] MELENK J.M., BABUŠKA I., « The partition of unity finite element method : basic theory and applications », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 289-314, 1996.

- [MUN 93] MUNKRES J.R., *Elements of algebraic topology*, Perseus Press, 7-14, 1993.
- [NAY 92] NAYROLES B., TOUZOT G., VILLON P., « Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements », *Computational Mechanics*, 10, 307-318, 1992.
- [ORG 96] ORGAN D., FLEMING M., TERRY T., BELYTSCHKO T., « Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency », *New Advances in Adaptive Computational Mechanics*, 19, 1-11, 1996.
- [PIP 93] PIPER B., « Properties of local coordinates based on Dirichlet tessellations », *Computing Suppl.*, 8, 227-239, 1993.
- [RAC 00] RASSINEUX A., VILLON P., SAVIGNAT J.M., STAB O., « Surface remeshing by local Hermite diffuse interpolation », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(1-2), 10-20, 2000.
- [SAM 95] SAMBRIDGE M., BRAUN J., MCQUEEN M., « Geophysical parameterization and interpolation of irregular data using natural neighbors », *Geophys. I. J. Int.*, 122, 837-857, 1995.
- [SIB 80] SIBSON R., « A vector Identity for the Dirichlet tessellations », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 87, 151-155, 1980.
- [SUK 98a] SUKUMAR N., MORAN B., BELYTSCHKO T., « The natural elements method in solid mechanics », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, 839-887, 1998.
- [SUK 98b] SUKUMAR N., « The natural elements method in solid mechanics », *Ph.D. Dissertation*. Northwestern University, Evanston, Illinois, 1998.
- [VOR 08] VORONOÏ G.M., « Nouvelles applications des paramètres continus la théorie des formes quadratiques, Deuxième Mémoire », *J. Reine Angew. Math.*, 134, 198-287, 1908.
- [YVO 04] YVONNET J., RYCKELYNCK D., LORONG P., CHINESTA F., « A new extension of the natural element method for non convex and discontinuous problems, the constrained natural element method (C-NEM) », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60/8, 1451-1474, 2004.
- [YVO 05] YVONNET J., CHINESTA F., « An hybrid element-free Galerkin natural element method for direct imposition of boundary conditions and faster three-dimensional computations », *Third MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, MIT, Cambridge, USA, 2005.
- [YVO 06] VILLON P., CHINESTA F., « Natural Element Approximations Involving Bubbles for Treating Mechanical Models in Incompressible Media », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, à paraître.
- [ZIE 83] ZIENKIEWICZ O.C., DE J.P., GAGO S.R., KELLY D.W., « The hierarchical concept in finite element analysis », *Computers and Structures*, 16, 53-65, 1983.