



HAL
open science

Une stratégie de calcul en dynamique transitoire recouvrant les basses et moyennes fréquences

Mathilde Chevreuil, Pierre Ladevèze, Philippe Rouch

► **To cite this version:**

Mathilde Chevreuil, Pierre Ladevèze, Philippe Rouch. Une stratégie de calcul en dynamique transitoire recouvrant les basses et moyennes fréquences : Application aux charges défilantes. *Revue Européenne de Mécanique Numérique/European Journal of Computational Mechanics*, 2006, 15 (1-2-3), pp.119-130. 10.3166/remn.15.119-130 . hal-01007407

HAL Id: hal-01007407

<https://hal.science/hal-01007407>

Submitted on 17 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une stratégie de calcul en dynamique transitoire recouvrant les basses et moyennes fréquences

Application aux charges défilantes

Mathilde Chevreuil* — **Pierre Ladevèze*** — **Philippe Rouch***

* *LMT-Cachan*

ENS de Cachan / CNRS / Université Paris 6

61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex

{chevreuil, ladeveze, rouch}@lmt.ens-cachan.fr

RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous proposons une nouvelle stratégie de calcul pour la dynamique transitoire qui permet de couvrir à la fois les basses et les moyennes fréquences. C'est une approche fréquentielle dans laquelle la partie basses fréquences est traitée grâce aux éléments finis classiques, alors que les moyennes fréquences sont calculées grâce à la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes initialement introduite pour les problèmes de vibration stationnaire. Le but de ce papier est de présenter les performances de la méthode sur des structures non triviales.

ABSTRACT. The paper deals with a new computational method for transient dynamic analysis which enables one to cover both the low- and medium-frequency ranges. This is a frequency approach in which the low-frequency part is obtained through a classical technique while the medium-frequency part is handled through the Variational Theory of Complex Ray (VTCR) initially introduced for vibrations. The aim of the paper is to extend the capabilities of the method to engineering systems.

MOTS-CLÉS : dynamique transitoire, domaine fréquentiel, moyennes fréquences, TVRC, multi-échelle.

KEYWORDS: transient dynamics, frequency domain, medium frequencies, VTCR, multiscale.

1. Introduction

De nombreuses structures industrielles sont aujourd'hui dimensionnées en fonction de leur comportement dynamique. Cependant leur réponse transitoire ne peut être entièrement décrite si l'on utilise des outils classiques actuels. En effet, la partie moyennes fréquences est bien souvent ignorée à moins de raffiner le maillage éléments finis et par conséquent la discrétisation temporelle selon (Bathe, 1996) ou (Belytschko *et al.*, 2000). Toutefois, négliger le contenu moyennes fréquences du chargement conduit souvent à une forte sous-évaluation des niveaux énergétiques réels.

L'étude dynamique transitoire sur cette bande de fréquences pour des structures industrielles complexes est un véritable défi. Le présent travail, qui utilise une nouvelle stratégie de calcul pour la dynamique, répond à ce défi pour la partie transitoire de la solution. Le problème est résolu dans le domaine fréquentiel. Le problème à résoudre est alors un problème de vibration forcée sur une très grande plage de fréquences dans le cas de chargements à large spectre fréquentiel. Nous choisissons de séparer cette plage en deux domaines, les basses et les moyennes fréquences, afin de prédire la fonction de réponse en fréquence avec l'outil de calcul le plus adapté pour chacun de ces deux domaines.

Le problème majeur réside donc dans la résolution du problème de vibration forcée sur la bande moyennes fréquences. L'approche alternative aux méthodes des éléments finis que nous utilisons ici, appelée la « Théorie Variationnelle des Rayons Complexes », a été introduite dans (Ladevèze, 1996) pour le calcul des vibrations moyennes fréquences.

Jusqu'à présent, cette approche fréquentielle a été appliquée sur des exemples simples d'assemblages de poutres dans (Ladevèze, 2003; Ladevèze *et al.*, 2005a), puis a été étendue aux assemblages de plaques dans (Chevreuil *et al.*, 2005) pour montrer l'importance des moyennes fréquences.

Le but de ce papier est d'étendre les possibilités de la méthode à des problèmes se rapprochant des structures industrielles, comme les assemblages de plaques, coques et poutres soumis à des chocs et des charges en mouvement, avec un coût de calcul réduit.

2. Analyse fréquentielle du problème de référence

2.1. Problème de référence

La problème à résoudre est un problème de dynamique transitoire sous l'hypothèse des petites perturbations. Le milieu étudié occupe à l'instant initial un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. L'étude est menée sur l'intervalle de temps $[0, T]$ étudié, et le milieu est soumis aux actions extérieures suivantes pour tout t appartenant à $[0, T]$:

- un champ de déplacement \underline{U}_d sur la partie $\partial_1\Omega$ de la frontière $\partial\Omega$,

- une densité surfacique d'effort \underline{F}_d sur la partie $\partial_2\Omega$ de $\partial\Omega$ qui est la partie complémentaire de $\partial_1\Omega$,

- une densité volumique d'effort \underline{f}_d sur tout le domaine Ω .

Le repère de référence est supposé galiléen. Le problème qui traduit l'évolution du milieu sur $[0, T]$ en élasticité linéaire peut être formulé comme suit :

trouver $\underline{U}(\underline{M}, t) \in \mathcal{U}^{[0, T]}$ et $\underline{\sigma}(\underline{M}, t) \in \mathcal{S}^{[0, T]}$, pour $\underline{M} \in \Omega$ et $t \in [0, T]$, qui vérifient :

- les conditions initiales :

$$\forall \underline{M} \in \Omega \quad \underline{U}|_{t=0} = \underline{U}_0 \quad [1]$$

$$\left. \frac{d\underline{U}}{dt} \right|_{t=0} = \underline{\dot{U}}_0 \quad [2]$$

- les équations de liaison :

$$\forall t \in [0, T] \quad \underline{U}|_{\partial_1\Omega} = \underline{U}_d \quad [3]$$

- l'équation d'équilibre :

$$\forall t \in]0, T[, \quad \forall \underline{\dot{U}}^* \in \mathcal{U}_0 \quad [4]$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d^2 \underline{U}}{dt^2} \cdot \underline{\dot{U}}^* d\Omega = - \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\sigma} \underline{\varepsilon}(\underline{\dot{U}}^*)] d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{\dot{U}}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{\dot{U}}^* dS$$

ρ désigne la masse volumique, ici supposée constante par rapport au temps, et $\underline{\dot{U}} = \frac{d\underline{U}}{dt}$,

- la relation de comportement :

$$\underline{\sigma} = \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}) + \eta \mathbf{K} \dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) \quad [5]$$

\mathbf{K} est l'opérateur de Hooke, $\underline{\sigma}$ est l'opérateur des contraintes, $\underline{\varepsilon}$ est l'opérateur des déformations avec $\underline{\varepsilon}(\underline{U}) = [\text{Grad} \underline{U}]_{\text{sym}}$. Dans la suite de nos travaux, un amortissement η qui peut dépendre de la fréquence est introduit classiquement avec $\eta > 0$, pour que le problème de référence ait ainsi une solution unique.

\mathcal{U}_0 est le sous-espace de $\mathcal{U}^{[0, T]}$ associé à la valeur nulle de \underline{U}_d sur la frontière $\partial_1\Omega$.

2.2. Formulation fréquentielle

Le problème de dynamique transitoire est réécrit comme une formulation variationnelle dans le domaine fréquence-espace. Ainsi, la transformée de Fourier est appliquée à toutes les quantités dépendant du temps, conduisant alors à des fonctions dépendant de la fréquence ω que l'on note $\hat{\cdot}$:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad [6]$$

La formulation en déplacement du problème s'écrit alors :
trouver $\underline{\hat{U}}(\underline{M}, \omega) \in \mathcal{U}$, pour $\underline{M} \in \Omega$ et $\omega \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\underline{\hat{U}}_{\partial_1\Omega} = \underline{\hat{U}}_d$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall \underline{\hat{U}}^* \in \mathcal{U}_0 \quad [7]$$

$$\int_{\Omega} \left\{ -\rho\omega^2 \underline{\hat{U}} \cdot \underline{\hat{U}}^* + (1 + i\eta) \text{Tr}[\mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\hat{U}})\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{\hat{U}}^*)] \right\} d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\hat{f}}_d \cdot \underline{\hat{U}}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{\hat{F}}_d \cdot \underline{\hat{U}}^* dS$$

Par conséquent le problème à résoudre est un problème de vibration forcée sur une large bande de fréquences $[0, \omega'_c]$.

2.3. Principe de l'approche proposée

La présente approche considère une partition de la bande de fréquences $[0, \omega'_c]$ en deux parties : les basses fréquences (BF) $[0, \omega_c]$ et les moyennes fréquences (MF) $[\omega_c, \omega'_c]$. En dehors de cette bande de fréquences, l'énergie de déformation et l'énergie cinétique sont supposées négligeables. La fréquence ω_c qui sépare les BF des MF dépend de la structure étudiée et est déterminée à partir du moment où la structure fait apparaître des comportements vibratoires localisés.

Les basses fréquences $[0, \omega_c]$ sont traitées classiquement : la fonction de réponse en fréquences est calculée grâce à une méthode éléments finis (EF). Il est alors avantageux d'utiliser une base réduite construite à partir des premiers modes propres de vibration et complétée avec les modes statiques.

Quant aux moyennes fréquences, la difficulté pour modéliser et calculer ces vibrations réside dans le fait que les longueurs d'onde des phénomènes étudiés sont très petites devant les dimensions caractéristiques de la structure. La théorie variationnelle des rayons complexes (TVRC) est alors une méthode de calcul adaptée pour traiter la bande moyennes fréquences $[\omega_c, \omega'_c]$.

La solution espace-temps est finalement obtenue par transformée de Fourier inverse. Les développements de la FFT (Fast Fourier Transform) (Brigham, 1988) et son efficacité ont rendu les approches fréquentielles très attractives (Clough *et al.*, 1993).

3. Les bases de la TVRC

La théorie variationnelle des rayons complexes, introduite dans (Ladevèze, 1996), est une approche dédiée pour le calcul des vibrations moyennes fréquences. Elle peut être résumée en deux points majeurs :

- la première caractéristique de cette approche est l'utilisation d'une nouvelle formulation variationnelle qui permet d'utiliser *a priori* des approximations indépendantes par sous-structures. En effet, les conditions de transmission en déplacement et en effort aux interfaces entre sous-structures n'ont pas besoin d'être vérifiées exactement mais seulement de façon faible dans une formulation variationnelle.

- la deuxième caractéristique de la TVRC est l'introduction au sein de chaque sous-structure d'approximations à deux échelles avec un sens mécanique fort : la solution est supposée localement bien décrite dans le voisinage d'un point \underline{X} comme la superposition d'un nombre infini de modes de vibration locaux, chacun pouvant s'écrire :

$$\begin{aligned}\underline{U}^h(\underline{X}, \underline{Y}, k) &= \underline{U}^h(\underline{X}, k) e^{k \cdot \underline{Y}} \\ \underline{\sigma}^h(\underline{X}, \underline{Y}, k) &= \underline{\sigma}^h(\underline{X}, k) e^{k \cdot \underline{Y}}\end{aligned}\quad [8]$$

où \underline{X} et \underline{Y} représentent le vecteur position, \underline{X} étant associé aux variations lentes et \underline{Y} aux variations rapides. Ces modes de base, qui peuvent être des modes intérieurs, des modes de bord ou des modes de coin, vérifient exactement les équations de la dynamique et les relations de comportements de chaque sous-structure. Toutes les directions de propagation des ondes sont prises en compte et les inconnues sont des amplitudes discrétisées de longueur d'onde relativement grande.

La faisabilité et les performances de cette méthode sont démontrées dans (Ladevèze *et al.*, 2001) et dans (Rouch *et al.*, 2003). Les développements ont été implantés dans le logiciel CORAY MF (*COmplex RAYs for Medium Frequency*).

Dans l'approche fréquentielle proposée pour l'étude de la réponse dynamique transitoire, il est avantageux d'utiliser la TVRC sur une bande de fréquences relativement large (Ladevèze *et al.*, 2005b). L'idée est d'introduire une approximation à deux échelles en termes de fréquence puis de séparer les coefficients du système linéaire en coefficients variant lentement et rapidement en fonction de la fréquence. Une stratégie *ad hoc* utilise alors les quantités moyennées de la solution sur une bande de fréquences et leur partie complémentaire pour prédire le comportement des quantités d'intérêt.

4. Performances de la méthode

4.1. Assemblage de plaques soumis à un impact

La structure étudiée est un assemblage de 12 plaques bloqué en déplacement à une extrémité et soumis à un impact à l'autre extrémité (figure 1).

Les deux bandes de fréquences sont choisies selon les critères cités dans (Ladevèze *et al.*, 2005a; Chevreuil *et al.*, 2005) : la plage des basses fréquences [0, 450 Hz] se limite aux fréquences pour lesquelles il est approprié d'utiliser la méthode des éléments finis et la borne supérieure de la plage des moyennes fréquences [450 Hz, 2000 Hz] est choisie telle qu'elle prenne en compte le contenu fréquentiel représentatif du spectre du chargement.

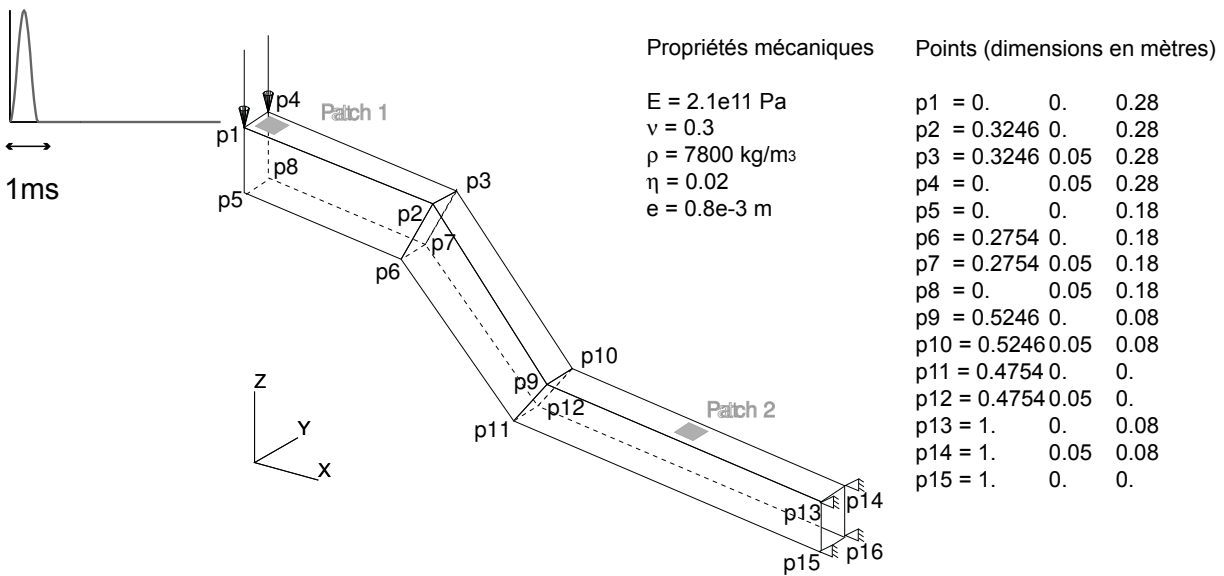


Figure 1. Assemblage de 12 plaques soumis à un choc

Les vitesses de deux points, situés dans les deux patches, obtenues avec l'approche fréquentielle proposée, contenant d'une part les moyennes fréquences et d'autre part ignorant ces dernières, sont tracées sur les figures 2 et 3.

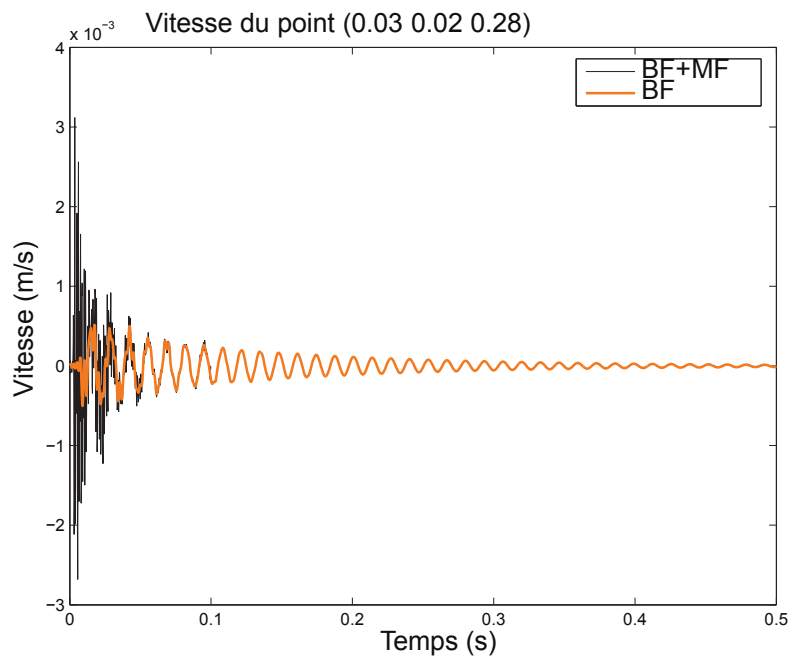


Figure 2. Importance des moyennes fréquences sur le patch 1

Cet exemple montre qu'il est indispensable de prendre en compte les moyennes fréquences dans la réponse. En effet, bien que les déplacements engendrés par les moyennes fréquences soient très petits, les vitesses et par conséquent l'énergie cinétique associée se révèlent très importantes.

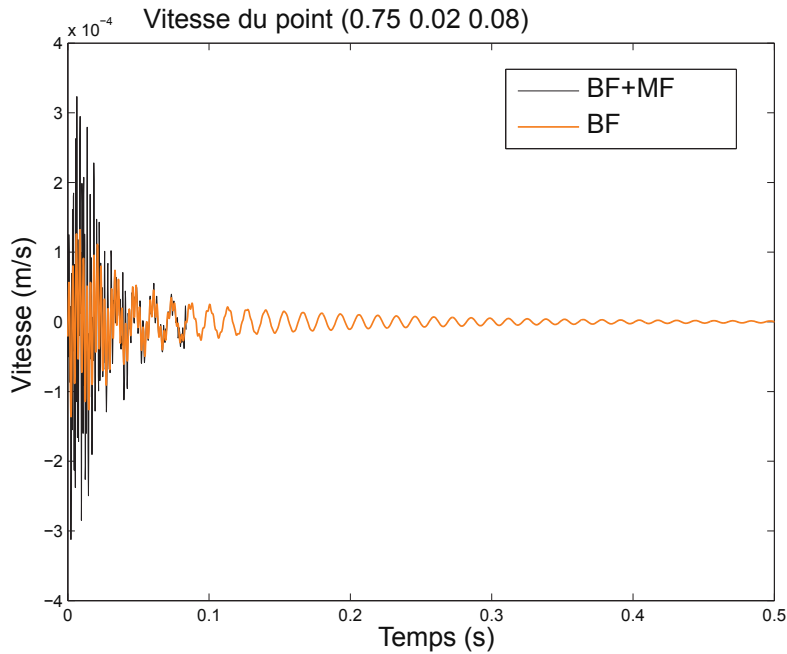


Figure 3. *Importance des moyennes fréquences sur le patch 2*

Le tableau 1 compare les coûts de calcul, pour un temps d’observation $T_o = 1$ s, entre une approche temporelle classique, basée sur les éléments finis et les schémas d’intégration numérique, et l’approche fréquentielle proposée :

- l’approche temporelle requiert au minimum 7000 pas de temps pour prédire la solution sur une durée $T_o = 1$ s avec un maillage spatial constitué de $336 \cdot 10^3$ degrés de liberté éléments finis (DDL EF) projetés sur la base modale constituée des 500 premiers modes propres ;

- dans l’approche fréquentielle, le calcul de la fonction de réponse en fréquence (FRF) est effectuée sur les basses fréquences [0, 450 Hz] avec une base réduite construite à partir des 50 premiers modes propres, et sur les moyennes fréquences [450 Hz, 2000 Hz] avec la TVRC utilisant 624 rayons complexes, la structure étant découpée en 12 sous-structures avec l’utilisation de 52 rayons complexes par sous-structure. Le nombre de calculs à effectuer pour prédire la FRF dépend du théorème de Shannon : l’échantillonnage fréquentiel doit être choisi de façon à éviter le recouvrement temporel d’une période sur la suivante et donc limiter les perturbations sur les conditions initiales de la réponse (Brigham, 1988).

Pour diminuer le nombre de problèmes de vibration forcée à résoudre sur la plage des moyennes fréquences dans l’approche fréquentielle, nous tirons partie de la rapide extinction des ondes moyennes fréquences et de la linéarité de la transformée de Fourier. Il est alors possible de traiter les contributions des basses et des moyennes fréquences indépendamment (équation 9) et ainsi utiliser deux échantillonnages fréquentiels optimisés pour chacune des plages de fréquences (Chevreuil *et al.*, 2005). Ces deux contributions sont superposées ensuite.

$$\begin{aligned}
f(t)_{t \geq 0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{BF}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{MF}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
&= f_{BF}(t) + f_{MF}(t)
\end{aligned} \tag{9}$$

L'extension aux moyennes fréquences peut ainsi être effectuée avec un coût de calcul réduit grâce à cette superposition *a posteriori* des contributions basses et moyennes fréquences et également grâce à l'utilisation de l'analyse large bande de la TVRC (cf. tableau 1). En effet dans le cas de l'assemblage de 12 plaques, la prise en compte du contenu MF est réalisée grâce à la résolution de seulement 161 problèmes de vibration forcée avec l'utilisation de 624 rayons complexes soit 624 DDL dans la TVRC.

Approche	DT		DF	
	Base réduite		Base réduite	TVRC
DDL EF	336 10 ³		20 10 ³	
Modes propres	500		50	
Rayons complexes				624
Nombre de calculs	7000		451	161
Taille du problème	7000 × 500 = 3500 10 ³		451 × 50 + 161 × 624 = 123 10 ³	

Tableau 1. Tailles des problèmes pour les approches dans le domaine temporel (DT) et dans le domaine fréquentiel (DF) sur une durée d'observation $T_o = 1$ s

4.2. Une plaque soumise à une charge défilante

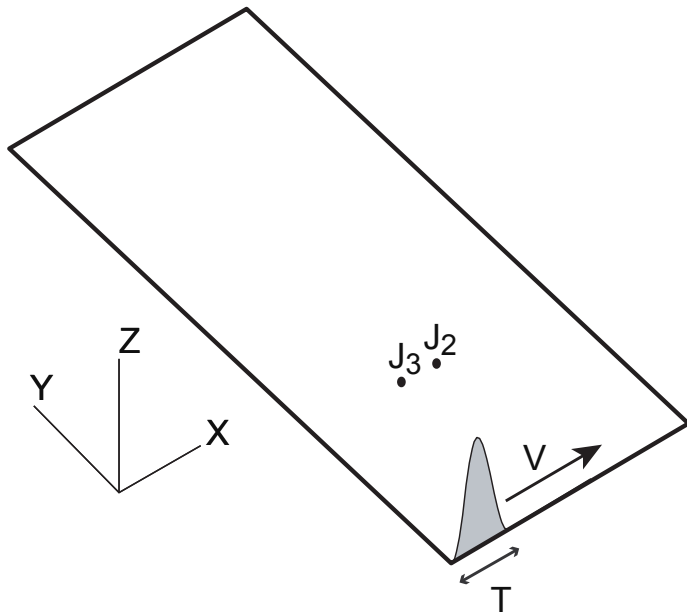
Dans le second exemple décrit dans la figure 4, un impact défilant normal à la plaque est appliqué.

L'application d'une charge en mouvement $p(t - \frac{x}{v})$ se traduit, dans le domaine fréquentiel, par le calcul d'une fonction de réponse en fréquence avec un effort harmonique en espace $e^{-i\omega \frac{x}{v}}$:

$$\hat{p}(t - \frac{x}{v}) = e^{-i\omega \frac{x}{v}} \hat{p}(t) \tag{10}$$

Il est alors très facile de prendre en compte ce type de chargement dans la TVRC. En effet dans cette méthode des quantités à deux échelles sont introduites selon l'équation (8). Le même format peut alors être adopté pour traiter le chargement harmonique en espace en posant :

$$\begin{cases} \underline{U}^h(\underline{X}, \underline{k}) = 1 \\ \underline{k} = i\omega \begin{bmatrix} -1 \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{11}$$



Propriétés mécaniques
 $E = 70 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
 $\nu = 0.3$
 $\rho = 2800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
 $\eta = 0.001$

Dimensions
 $2 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 6 \text{ mm}$

Chargement selon Z
 $T = 15 \mu\text{s}$
 $V = 7100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

$J_2 = (0.541, 0.642, 0)$
 $J_3 = (0.369, 0.642, 0)$

Figure 4. *Plaque soumise à une charge défilante*

Les figures 5 et 6 montrent la propagation des ondes de flexion hors plan obtenue respectivement par les approches temporelle (DT) et fréquentielle (DF) lors de l'application d'un impact défilant : les ondes de flexion dans une plaque étant dispersives, les ondes moyennes fréquences se propagent plus vite que les basses fréquences.

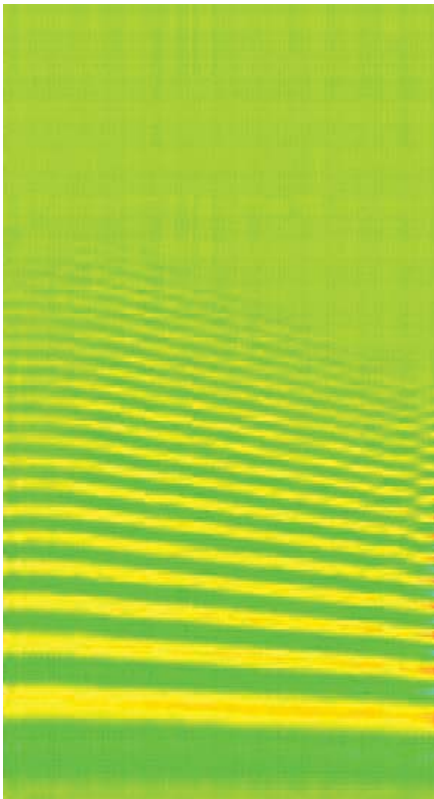


Figure 5. *Propagation des ondes de flexion à $t = 0.3 \text{ ms}$ (DT)*

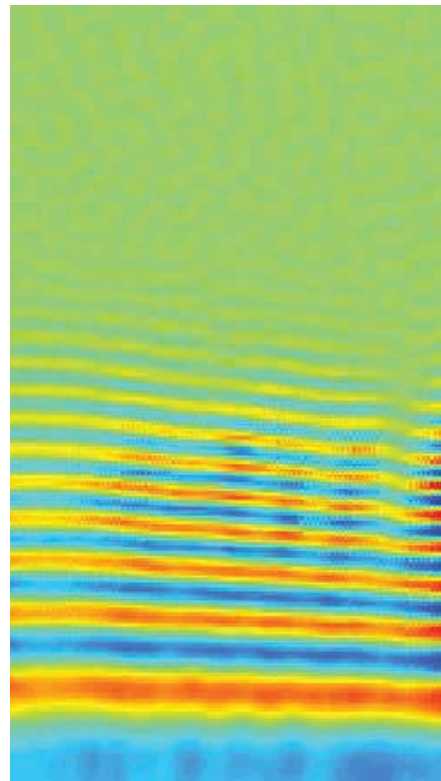


Figure 6. *Propagation des ondes de flexion à $t = 0.3 \text{ ms}$ (DF)*

Les figures 7 et 8 comparent les vitesses matérielles obtenues avec un code éléments finis classique (DT) ou avec l'approche fréquentielle proposée (DF). Les réponses sont très semblables et l'effort numérique pour chaque code est résumé dans le tableau 2 :

- la méthode EF couplée avec les schémas d'intégration numérique requiert un maillage EF de $213 \cdot 10^3$ DDL et 6700 pas de temps pour prédire la réponse sur $T_o = 10$ ms ;

- dans l'approche fréquentielle, les plages de fréquences sont choisies selon les critères rappelés dans la section 4.1 : la plage des basses fréquences retenue est $[0, 2000 \text{ Hz}]$ et celle des moyennes fréquences est $[2000 \text{ Hz}, 130 \text{ kHz}]$. Pour prédire la FRF sur $[0, 130 \text{ kHz}]$, il faut résoudre $4 \cdot 10^3$ problèmes de vibration forcée avec une base modale constituée des 516 premiers modes propres sur la plage BF, et seulement $16 \cdot 10^3$ problèmes TVRC avec son extension large bande utilisant 260 rayons complexes hors plan sur la plage MF dont 128 rayons intérieurs et 33 rayons de bord par bord.

L'avantage de l'approche fréquentielle par rapport à l'approche temporelle classique est de pouvoir prédire la réponse sur un temps d'observation très long, imposé par le théorème de Shannon, sans pour autant augmenter le coût du calcul.

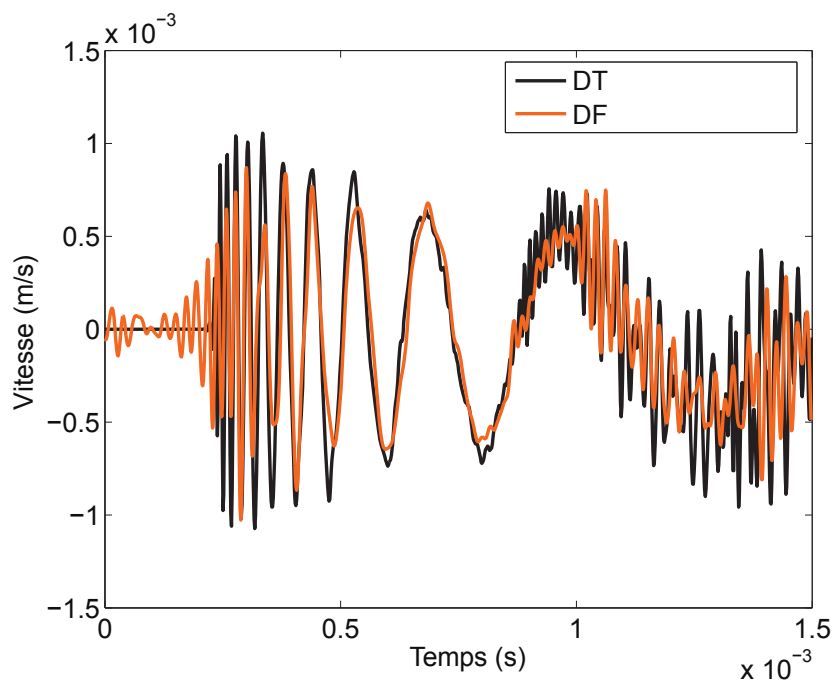


Figure 7. *Vitesse du point J2*

5. Conclusion

Une nouvelle approche pour le calcul de réponses transitoires avec un contenu fréquentiel important a été développée et ses performances sur des structures se rapprochant de problèmes industriels ont été montrées. Le point majeur de cette méthode

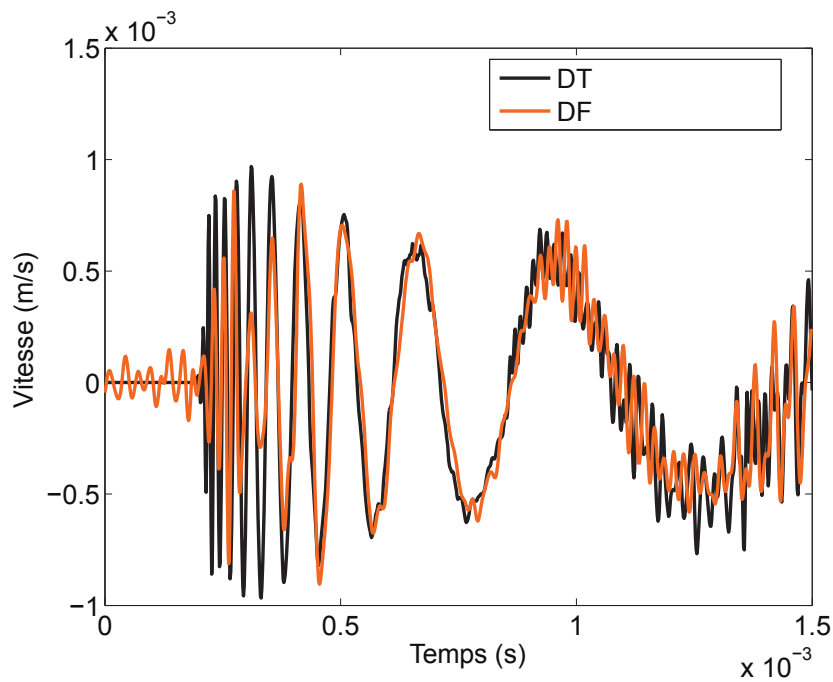


Figure 8. *Vitesse du point J3*

Approche	DT		DF	
	Méthode EF		Base réduite	TVRC
DDL	213 10 ³ DDL EF		516 modes	260 rayons
Nombre de calculs	6700		4 10 ³	16 10 ³

Tableau 2. *Tailles des problèmes pour les approches dans le domaine temporel (DT) et dans le domaine fréquentiel (DF) sur une durée d'observation $T_o = 10$ ms*

est d'inclure à la fois les basses et les moyennes fréquences dans la réponse de structures complexes avec un coût de calcul faible. L'approche présentée permet la prise en compte des non linéarités dans le domaine fréquentiel. L'extension aux non linéarités exprimées dans le domaine temporel feront l'objet de développements ultérieurs.

6. Bibliographie

Bathe K., *Finite element procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.

Belytschko T., Liu W., Moran B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley and Sons, NY, 2000.

Brigham E., *The fast Fourier transform and its applications*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1988.

Chevreuril M., Ladevèze P., Rouch P., « A new computational method for transient analyses including the low- and the medium-frequency ranges of engineering structures », *Computers and Structures*, 2005. Accepted.

- Clough R. W., Penzien J., *Dynamics of structures*, McGraw-Hill Education, 2nd edition, 1993.
- Ladevèze P., « A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II*, vol. 322, n° 12, p. 849-856, 1996.
- Ladevèze P., « A new computational method for medium-frequency vibrations and its extension to transient dynamics », in D. R. J. Owen, E. Onate, B. Suárez (eds), *Proceedings of the seventh International Conference on Computational Plasticity - Complas 2003, CIMNE, Barcelona, Spain*, on CD-ROM, 2003.
- Ladevèze P., Arnaud L., Rouch P., Blanzé C., « The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations », *Engrg. Comput.*, vol. 18, p. 193-214, 2001.
- Ladevèze P., Chevreuril M., « A new computational method for transient dynamics including the low- and the medium-frequency ranges », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, p. 503-527, 2005a.
- Ladevèze P., Riou H., « Calculation of medium-frequency vibrations over a wide frequency range », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, n° 27-29, p. 3167-3191, 2005b.
- Rouch P., Ladevèze P., « The variational theory of complex rays : a predictive tool for medium-frequency vibrations », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 192, p. 3301-3315, 2003.