



**HAL**  
open science

# Poutre multifibre Timoshenko pour la modélisation de structures en béton armé: Théorie et applications numériques

Panagiotis Kotronis, L. Davenne, J. Mazars

► **To cite this version:**

Panagiotis Kotronis, L. Davenne, J. Mazars. Poutre multifibre Timoshenko pour la modélisation de structures en béton armé: Théorie et applications numériques. *Revue Française de Génie Civil*, 2004, 8 (2-3), pp.329-343. 10.1080/12795119.2004.9692609 . hal-01007189

**HAL Id: hal-01007189**

**<https://hal.science/hal-01007189>**

Submitted on 28 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Poutre multifibre Timoshenko pour la modélisation de structures en béton armé

## Théorie et applications numériques

**Panagiotis Kotronis\*** — **Luc Davenne\*\*** — **Jacky Mazars\***

\* *Laboratoire Sols Solides Structures (L3S)*

*INPG, UJF, CNRS & RNVO*

*Domaine universitaire BP 53*

*F-38041 Grenoble cedex 9*

*{Panagiotis.Kotronis; Jacky.Mazars}@hmg.inpg.fr*

\*\* *Laboratoire de Mécanique et de Technologie (LMT)*

*ENS Cachan, CNRS & Université Pierre et Marie Curie*

*61, avenue du Président Wilson*

*F-94235 Cachan cedex*

*Luc.Davenne@lmt.ens-cachan.fr*

---

*RÉSUMÉ. Les équations d'un élément poutre 3D multifibre Timoshenko et son utilisation pour la modélisation de structures en béton armé sont ici présentées. L'originalité de l'élément est qu'il a deux nœuds et des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur pour éviter les problèmes liés au blocage par le cisaillement. Des exemples numériques comparés avec des résultats expérimentaux montrent la pertinence de l'approche.*

*ABSTRACT. The equations of a 3D multifiber Timoshenko beam element and its use for modeling the non linear behavior of reinforced concrete structures are presented hereafter. The originality of the element is that it has two nodes and higher order interpolation functions in order to deal with shear locking phenomena. Numerical applications and comparisons with experimental results show the well funding of the approach.*

*MOTS-CLÉS : poutre Timoshenko, multifibre, béton armé, modélisation numérique.*

*KEYWORDS: Timoshenko beam, multifiber, reinforced concrete, numerical modeling.*

## 1. Introduction

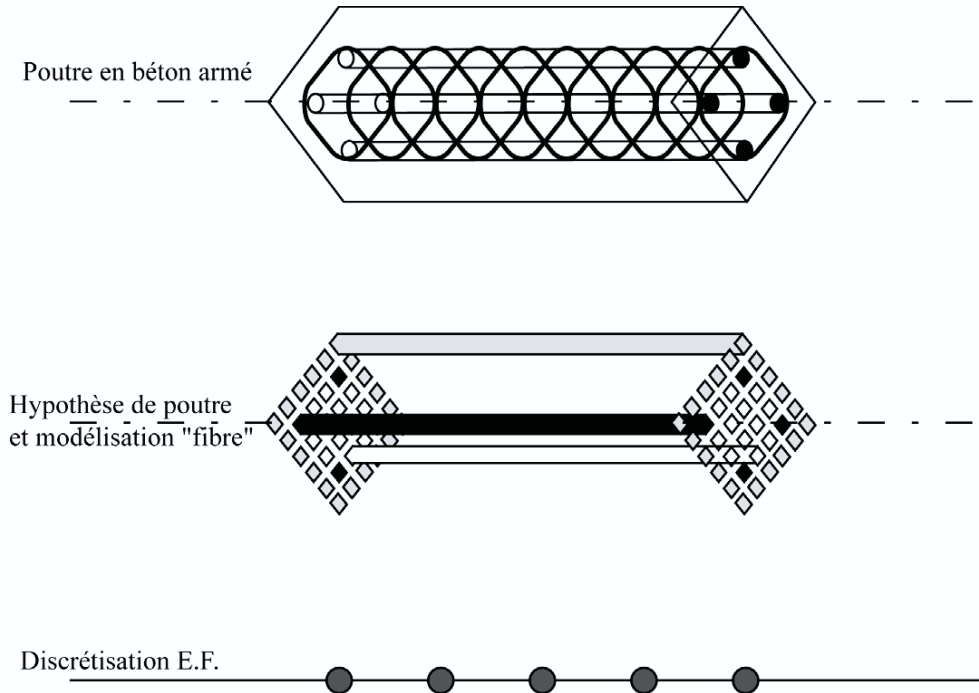
La simulation du fonctionnement des structures sous chargements sévères conduit généralement à des problèmes de grande taille, dont la résolution est délicate. La réponse des ouvrages résulte d'une forte interaction entre les effets « matériaux » (non-linéarités locales), les effets « structures » (géométrie, répartition des masses, liaisons) et les effets de l'environnement (interaction support-structure). Dans le cas d'un ouvrage en béton, les non-linéarités locales sont notamment liées à la formation, à l'ouverture et à la refermeture des fissures, d'une part, (chargement cyclique ou dynamique), à la liaison et au comportement des armatures, d'autre part. Une bonne description de ces phénomènes est un passage obligé si l'on veut représenter les variations de raideurs de la structure et avoir accès au comportement jusqu'à la ruine.

L'approche complète – *approche locale* – consiste à conjuguer une modélisation géométrique (maillages 2D ou 3D), un modèle rhéologique (formulation de la loi de comportement en 2D ou en 3D) et un modèle de chargement. Elle permet d'aborder des problèmes complexes tels que le cisaillement non linéaire et la réponse d'un ouvrage jusqu'à la ruine (Ile, 2000). Cette approche est pourtant très délicate à mettre en œuvre, demande beaucoup d'expérience de la part de l'ingénieur et ne permet pas d'envisager son utilisation systématique dans le cadre de dimensionnement d'un ouvrage.

L'approche simplifiée – *semi-globale* – constitue une approche intermédiaire où le champ de déplacements est décrit par les déplacements et les rotations d'un élément poutre, d'un élément plaque ou d'une coque, tandis que toute information concernant le comportement des matériaux est traitée au niveau local. Il s'agit dans la plupart de cas d'utiliser des éléments poutres avec les hypothèses cinématiques habituelles (Bernoulli ou Timoshenko). L'intégration du modèle rhéologique peut être réalisée en général par une intégration numérique classique sur la hauteur, si le problème est plan ou dans les deux directions de la section si le problème est tridimensionnel. Ce dernier type d'élément – dites souvent « multifibre » – est efficace pour une analyse non linéaire complexe d'éléments de structures composites tels ceux que l'on peut rencontrer par exemple en béton armé (figure 1). Dans ce cas, la présence des cadres n'est pas spécifiquement introduite mais leurs effets sont pris en compte par le non flambement des armatures longitudinales et par la possibilité d'introduire dans la loi de comportement du béton un éventuel effet de confinement. L'approche semi-globale a été adoptée avec succès pour la modélisation du comportement jusqu'à la ruine de voiles en béton armé soumis à des tremblements de terre, lorsque leur comportement est dominé par la flexion (Lago *et al.*, 1998, Mazars 1998, Ragueneau *et al.*, 2000, Mazars *et al.*, 2003) ou par le cisaillement – en introduisant un maillage de type treillis – (Mazars *et al.*, 2002, Kotronis *et al.*, 2003).

Dans la suite un élément poutre 3D multifibre Timoshenko sera présenté en détail et son utilisation avec des lois de comportement issues de la mécanique de

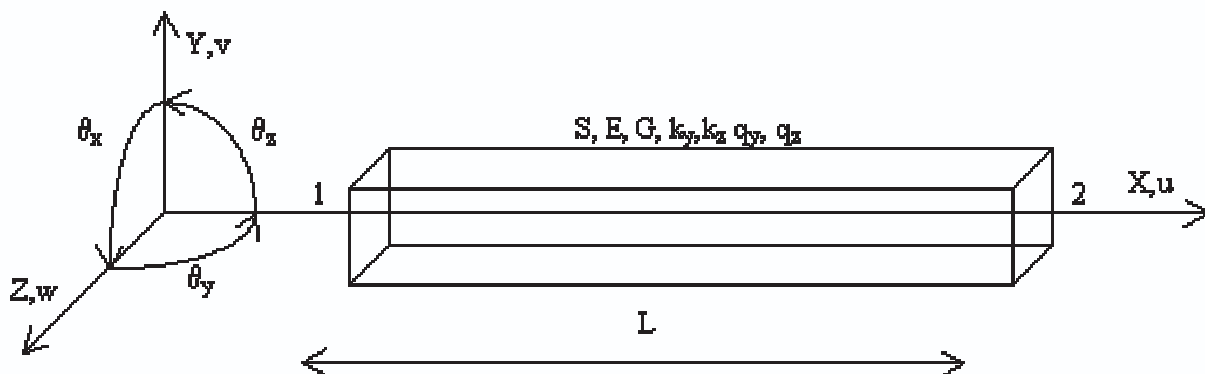
l'endommagement pour la modélisation des structures en béton armé (Kotronis 2000). Contrairement à des formulations déjà existantes dans la littérature où l'expression des déformations transversales a été modifiée afin de gérer les problèmes numériques liés au blocage par le cisaillement (Donea *et al.*, 1987, Guedes *et al.*, 1994) le choix est fait pour un élément avec deux nœuds et des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur (quadratiques et cubiques). Des exemples numériques comparés avec des résultats expérimentaux montrent la pertinence de l'approche.



**Figure 1.** Principe d'une poutre multifibre

## 2. Poutre multifibre Timoshenko à deux nœuds

### 2.1. Fonctions d'interpolation



**Figure 2.** Poutre Timoshenko 3D

Prenons une poutre Timoshenko 3D à deux nœuds, droite, orientée dans la direction  $x$ , soumise à des efforts distribués  $q_y, q_z$  avec  $S$  sa section (homogène ou hétérogène) discrétisée en fibres de coordonnées  $y, z$ ,  $E$  le module d'Young et  $G$  le module de cisaillement de chaque fibre,  $k_y$  et  $k_z$  les coefficients de correction de cisaillement de la section (figure 2). Chaque nœud a six degrés de liberté, trois translations et trois rotations stockés dans un vecteur de déplacement de dimension 12 structuré de la manière suivante :

$$\{U\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}\} \quad [1]$$

Nous considérons le champ de déplacements continu en tout point de la ligne moyenne  $x$  par rapport au champ de déplacements discrétisés de la façon suivante :

$$\{U_s\} = [N]\{U\} \quad [2]$$

$$\{U_s\}^T = \{u_s(x) \quad v_s(x) \quad w_s(x) \quad \theta_{sx}(x) \quad \theta_{sy}(x) \quad \theta_{sz}(x)\} \quad [3]$$

Le choix des fonctions d'interpolation  $[N]$  conditionne la performance numérique de l'élément. Le phénomène du blocage par cisaillement (apparition de rigidité « parasite » quand l'élément est élancé) est présent dans tous les éléments finis de poutre Timoshenko où les déplacements transversaux et les rotations sont discrétisés séparément (Stolarski *et al.*, 1983). Le blocage par cisaillement est un problème numérique qui a beaucoup intéressé les chercheurs et dont une abondance de solutions existent dans la littérature (Crisfield, 1991). Afin de nous affranchir de ce problème de verrouillage nous optons pour une interpolation polynomiale de degré supérieur (cubique ou quadratique) pour les déplacements transversaux et les rotations qui ne sont plus indépendantes. Ces approches conduisent à des éléments finis à plus de deux nœuds (deux nœuds aux extrémités, plus des nœuds intérieurs, Ibrahimbegovic *et al.*, 1992) ou à des *éléments finis à deux nœuds dont les fonctions d'interpolation dépendent des propriétés des matériaux* (De Ville de Goyet, 1989, Friedman *et al.*, 1993). Cette dernière approche est optée pour l'élément Timoshenko présenté ci-dessous dont les fonctions d'interpolation prennent la forme suivante :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3^* & 0 & -N_4^* & 0 & 0 & 0 & N_5^* & 0 & -N_6^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_7^* & 0 & N_8^* & 0 & 0 & 0 & -N_9^* & 0 & N_{10}^* & 0 \\ 0 & N_7 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & N_9 & 0 & 0 & 0 & N_{10} \end{bmatrix} \quad [4]$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} ; \quad N_2 = \frac{x}{L} ; \quad N_3 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \phi\left(\frac{x}{L}\right) + 1 + \phi \right\}$$

$$N_4 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(2 + \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(1 + \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$N_5 = -\frac{1}{1+\phi} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \phi\left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$N_6 = \frac{L}{1+\phi} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(1 - \frac{\phi}{2}\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{\phi}{2}\left(\frac{x}{L}\right) \right\} ; \quad N_7 = \frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$N_8 = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - (4+\phi)\left(\frac{x}{L}\right) + (1+\phi) \right\} ; \quad N_9 = -\frac{6}{(1+\phi)L} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$N_{10} = \frac{1}{1+\phi} \left\{ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - (2-\phi)\left(\frac{x}{L}\right) \right\}$$

Avec  $N_i^* = N_i(\phi^*)$ ,  $\phi$  et  $\phi^*$  le rapport entre la rigidité de flexion et la rigidité de cisaillement de l'élément dans les axes correspondantes ( $E$  et  $G$  varient avec  $y$  et  $z$ ) :

$$\phi = \frac{12}{L^2} \left( \frac{\int_S E y^2 dS}{k_y \int_S G dS} \right) ; \quad \phi^* = \frac{12}{L^2} \left( \frac{\int_S E z^2 dS}{k_z \int_S G dS} \right) \quad [5]$$

REMARQUE. — Les fonctions d'interpolation dépendent des propriétés des matériaux. Contrairement à la formulation classique d'une poutre Timoshenko (Pégon, 1994), la section doit être constante le long de l'élément et un premier passage est nécessaire afin de déterminer ses propriétés élastiques. La performance de l'élément dans le régime linéaire dépend largement de la précision de ce premier calcul. Sa performance dans le régime non linéaire n'est pas influencée par la suite puisque les fonctions d'interpolation ne sont calculées qu'une seule fois et sont considérées ensuite comme constantes.

## 2.2. Matrice de rigidité et vecteur de forces

L'hypothèse des sections planes de la poutre Timoshenko permet d'exprimer les déplacements d'un point quelconque de la poutre en fonction des déplacements d'un

point situé sur l'axe de référence  $x$  et de déplacements dus à la rotation de la section  $S$  :

$$u(x, y, z) = u_s(x) - y\theta_{xz}(x) + z\theta_{xy}(x) \quad [6]$$

$$v(x, y, z) = v_s(x) - z\theta_{xx}(x)$$

$$w(x, y, z) = w_s(x) + y\theta_{xx}(x)$$

Le champ des déformations prend alors la forme suivante :

$$\varepsilon_{xx} = u'_s(x) - y\theta'_{xz}(x) + z\theta'_{xy}(x) \quad [7]$$

$$2\varepsilon_{xy} = v'_s(x) - \theta_{xz}(x) - z\theta'_{xx}(x)$$

$$2\varepsilon_{xz} = w'_s(x) + \theta_{xy}(x) + y\theta'_{xx}(x)$$

Avec (') le symbole de la dérivée par rapport à  $x$ . En introduisant les équations [7] dans le principe des travaux virtuels nous obtenons :

$$\int_{V_0} (\delta\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + 2\delta\varepsilon_{xy}\sigma_{xy} + 2\delta\varepsilon_{xz}\sigma_{xz}) dV_0 = \int_0^L \delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z dx \quad [8]$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \int_0^L N\delta u'_s(x) + T_y\delta\beta_{yz}(x) + T_z\delta\beta_{xz}(x) + M_x\delta\theta'_{xx}(x) + M_y\delta\theta'_{xy}(x) + M_z\delta\theta'_{xz}(x) dx \\ &= \int_0^L \delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z dx \end{aligned}$$

avec :

$$N = \int_S \sigma_{xx} dS ; T_y = \int_S \sigma_{xy} dS ; T_z = \int_S \sigma_{xz} dS \quad [9]$$

$$M_z = -\int_S y\sigma_{xx} dS ; M_y = \int_S z\sigma_{xx} dS ; M_x = \int_S (-z\sigma_{xy} + y\sigma_{xz}) dS$$

$$\beta_{yz}(x) = v'_s(x) - \theta_{xz}(x) ; \beta_{xz}(x) = w'_s(x) + \theta_{xy}(x)$$

La théorie des poutres et les équations d'élasticité nous donnent :

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} ; \sigma_{xy} = G2\varepsilon_{xy} ; \sigma_{xz} = G2\varepsilon_{xz} \quad [10]$$

Sans adopter des hypothèses particulières sur l'intersection de l'axe  $x$  avec la section de la poutre ou sur l'orientation des axes  $y, z$ , la relation entre les contraintes « généralisées » (forces dans la section)  $\{F\}$  et les déformations « généralisées »  $\{D\}$  prend la forme (Guedes *et al.*, 1994) :

$$\{F\} = [K_s] \{D\} \quad [11]$$

$$\{F\}^T = \{N \quad T_y \quad T_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z\} \quad [12]$$

$$\{D\} = \{u'_s(x) \quad \beta_y(x) \quad \beta_z(x) \quad \theta'_{x'}(x) \quad \theta'_{y'}(x) \quad \theta'_{z'}(x)\} \quad [13]$$

La matrice de rigidité de la section devient finalement :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} K_{s11} & 0 & 0 & 0 & K_{s15} & K_{s16} \\ & K_{s22} & 0 & K_{s24} & 0 & 0 \\ & & K_{s33} & K_{s34} & 0 & 0 \\ & & & K_{s44} & 0 & 0 \\ & & & & K_{s55} & K_{s56} \\ \text{sym} & & & & & K_{s66} \end{bmatrix} \quad [14]$$

$$K_{s11} = \int_S E dS \quad ; \quad K_{s15} = \int_S E z dS \quad ; \quad K_{s16} = - \int_S E y dS \quad ; \quad K_{s22} = k_y \int_S G dS$$

$$K_{s24} = -k_y \int_S G z dS \quad ; \quad K_{s33} = k_z \int_S G dS \quad ; \quad K_{s34} = k_z \int_S G y dS$$

$$K_{s44} = \int_S G (k_z y^2 + k_y z^2) dS \quad ; \quad K_{s55} = \int_S E z^2 dS \quad ; \quad K_{s56} = - \int_S E y z dS$$

$$K_{s66} = \int_S E y^2 dS$$

L'introduction des équations (11) dans le principe des travaux virtuels conduit à :

$$\int_0^L \delta \{D\}^T [K_s] \{D\} dx - \int_0^L \delta v_s(x) q_y + \delta w_s(x) q_z dx = 0 \quad [15]$$

L'équation qui donne les déformations généralisées en fonction des déplacements nodaux est :



$$\{D\} = [B]\{U\} \quad [16]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3' - N_7' & 0 & 0 & 0 & N_4' - N_8' & 0 & N_5' - N_9' & 0 & 0 & 0 & N_6' - N_{10}' \\ 0 & 0 & N_3^* - N_7^* & 0 & -N_4^* + N_8^* & 0 & 0 & 0 & N_5^* - N_9^* & 0 & -N_6^* + N_{10}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_7^* & 0 & N_8^* & 0 & 0 & 0 & -N_9^* & 0 & N_{10}^* & 0 \\ 0 & N_7' & 0 & 0 & 0 & N_8' & 0 & N_9' & 0 & 0 & 0 & N_{10}' \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité de l'élément est finalement donnée par :

$$[K_{elem}] = \int_0^L [B]^T [K_s] [B] dx \quad [17]$$

Le calcul des forces nodales dues à un état de contraintes internes donné se fait finalement par l'intégrale :

$$\{F_{nod}\} = \int_0^L [B]^T \{F_{integr}\} dx \quad [18]$$

avec  $\{F_{integr}\}$  le vecteur des forces de la section issu de l'intégration des contraintes dans les fibres (voir [9]).

#### REMARQUES.

— Lorsque le comportement du matériau est linéaire, l'élément poutre est homogène dans sa longueur et l'intégration de l'équation [17] peut être faite analytiquement. Lorsque le comportement est non linéaire deux points d'intégration le long de la poutre sont nécessaires afin d'intégrer correctement les fonctions d'interpolation utilisées (cubiques et quadratiques).

— Pour des sections homogènes de comportement linéaire et quand l'axe de référence  $x$  coïncide avec l'axe neutre de la poutre la matrice de rigidité de l'élément ainsi calculée est la même que la matrice de rigidité exacte d'un élément Timoshenko (Przemieniecki, 1985). Un seul élément fini est donc suffisant pour calculer les déplacements exacts d'une poutre soumise à des chargements statiques. Pour des sections hétérogènes la qualité des résultats dépend de la précision de calculs des propriétés élastiques de la section.

— L'élément est exempt de verrouillage. Lorsque l'élancement devient grand  $\phi \rightarrow 0$ ,  $\phi^* \rightarrow 0$  et la matrice de rigidité tend vers celle d'un élément Bernoulli.

— Le vecteur  $\{F_{integr}\}$  est égal au vecteur  $\{F\}$  en régime élastique.

### 2.3. Matrice de masse

En partant du travail virtuel des efforts d'inertie la matrice de masse de la section devient (Guedes *et al.*, 1994) :

$$[M_s] = \begin{bmatrix} M_{s11} & 0 & 0 & 0 & M_{s15} & M_{s16} \\ & M_{s22} & 0 & M_{s24} & 0 & 0 \\ & & M_{s33} & M_{s34} & 0 & 0 \\ & & & M_{s44} & 0 & 0 \\ & & & & M_{s55} & M_{s56} \\ sym & & & & & M_{s66} \end{bmatrix} \quad [19]$$

$$M_{s11} = \int_S \rho \, dS \quad ; \quad M_{s15} = \int_S \rho \xi \, dS \quad ; \quad M_{s16} = -\int_S \rho y \, dS \quad ; \quad M_{s22} = k_y \int_S \rho \, dS$$

$$M_{s24} = -k_y \int_S \rho \xi \, dS \quad ; \quad M_{s33} = k_\xi \int_S \rho \, dS \quad ; \quad M_{s34} = k_\xi \int_S \rho y \, dS$$

$$M_{s44} = \int_S \rho (k_\xi y^2 + k_y \xi^2) \, dS \quad ; \quad M_{s55} = \int_S \rho \xi^2 \, dS$$

$$M_{s56} = -\int_S \rho y \xi \, dS \quad ; \quad M_{s66} = \int_S \rho y^2 \, dS$$

avec  $\rho$  qui peut varier en fonction de  $y$  et  $\xi$ . La matrice de masse de l'élément est donnée par :

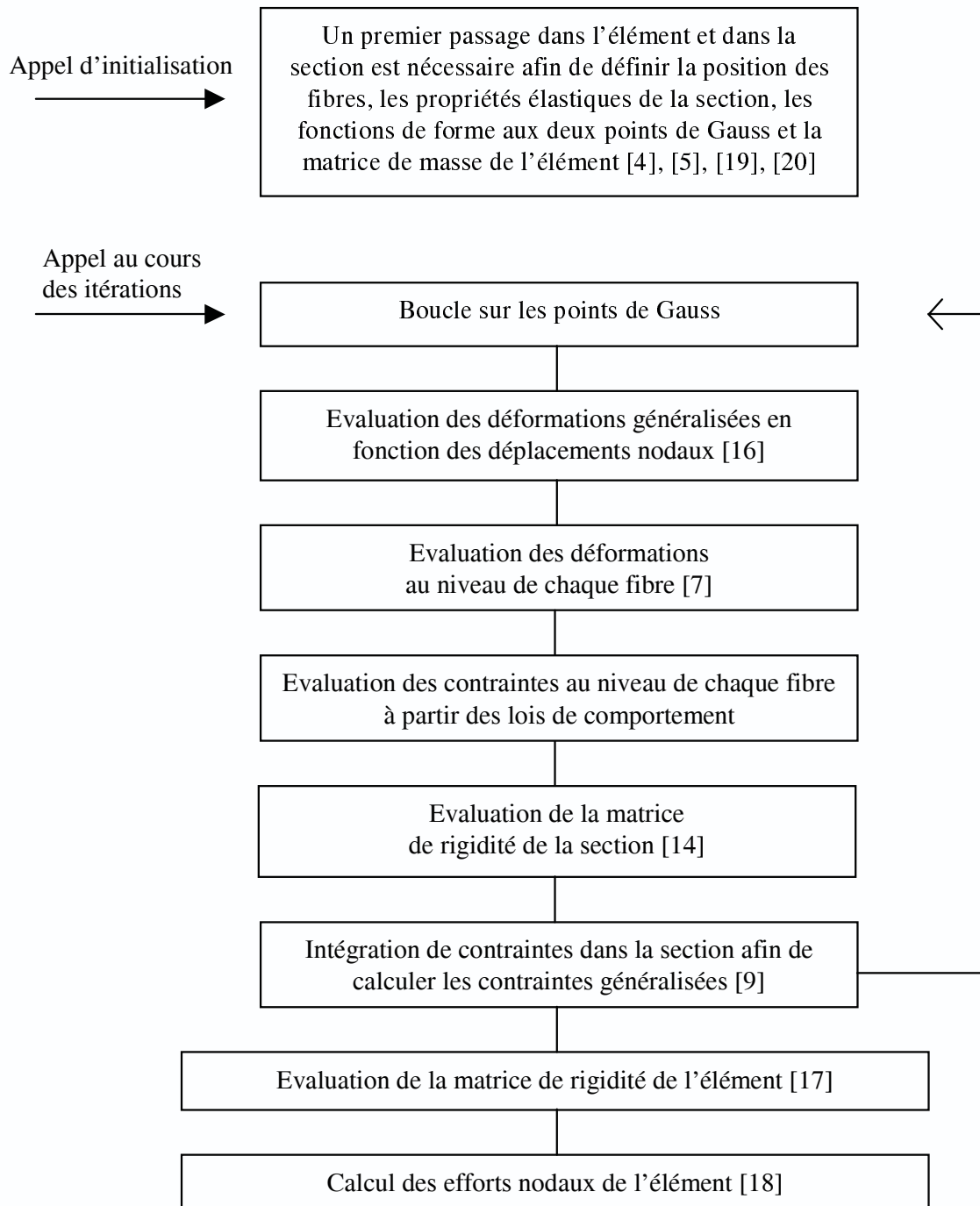
$$[M_{elem}] = \int_0^L [N]^T [M_s] [N] \, dx \quad [20]$$

REMARQUE. — Cette expression de la matrice de masse est rarement présentée dans la littérature. Dans la plupart des codes éléments finis elle est remplacée par la matrice de masse de type Bernoulli (ainsi les termes de correction de cisaillement interviennent uniquement dans la matrice de raideur). L'utilisation de cette matrice de masse améliore la performance de l'élément pour les modes supérieures (Corn, 1998).

### 2.4. Implémentation numérique

Dans le cadre d'une modélisation de type multifibre, il y a deux « niveaux » d'intégration. Il y a la modélisation dite « longitudinale » qui sera représentée par une poutre (de support géométrique linéique avec deux points de Gauss sur la

longueur) et une modélisation plane de la section (perpendiculaire au support géométrique, discrétisée avec des fibres qui jouent le rôle des points d'intégration dans la section). Nous présentons ci-dessous les grandes lignes de l'implémentation numérique de l'élément (figure 3). Uniquement les calculs au niveau de l'élément sont présentés, tout ce qui concerne l'algorithmique globale (incrément, itérations, assemblages, vérification d'équilibre...) est indépendant et ne concerne pas directement la présentation faite dans cet article. Le sous-programme « élément » est appelé par le programme principal avec différentes requêtes (figure 3).



**Figure 3.** Implémentation numérique

### 3. Exemple d'application

L'élément multifibre Timoshenko présenté aux paragraphes précédents a été implanté dans la librairie d'éléments FEDEAS (Filippou, 1996) de code FEAP (Taylor, 2000). L'existence déjà dans le code d'un élément multifibre de cinématique Bernoulli a facilité l'implémentation (Spacone *et al.*, 1996). Afin de vérifier sa performance plusieurs études numériques ont été déjà effectuées (Kotronis, 2000). Ci-dessous, la modélisation du comportement d'un poteau en béton armé testé sous flexion biaxiale et effort normal constant est présentée (Bousias *et al.*, 1995, essai S7). Les caractéristiques géométriques de spécimen et les détails du ferrailage sont décrits sur la figure 4. Pendant l'essai le poteau a été chargé avec une histoire alternée des déplacements en X et en Y (quatre niveaux 0,4 m, 0,6 m, 0,8 m et 1,0 m, le parcours de chaque niveau étant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) et un effort normal constant égal à 0,21 MN (figure 4). Le poteau est discrétisé en 10 éléments avec deux sections dans la longueur (deux points de Gauss). 36 fibres sont utilisées pour modéliser le béton et 8 fibres supplémentaires pour modéliser le ferrailage. La dalle inférieure n'a pas été modélisée et le poteau est considéré encastré à la base. Le comportement non linéaire du béton est modélisé à l'aide d'une loi basée sur la mécanique de l'endommagement (La Borderie, 1991) et celui des armatures avec la loi Menegotto-Pinto (Menegotto *et al.*, 1973). Ces lois sont utilisées dans leur version uniaxiale et les paramètres utilisés pour les matériaux sont regroupés dans le tableau 1. Le cisaillement et la torsion sont considérés élastiques et les effets de confinement n'ont pas été pris en compte.

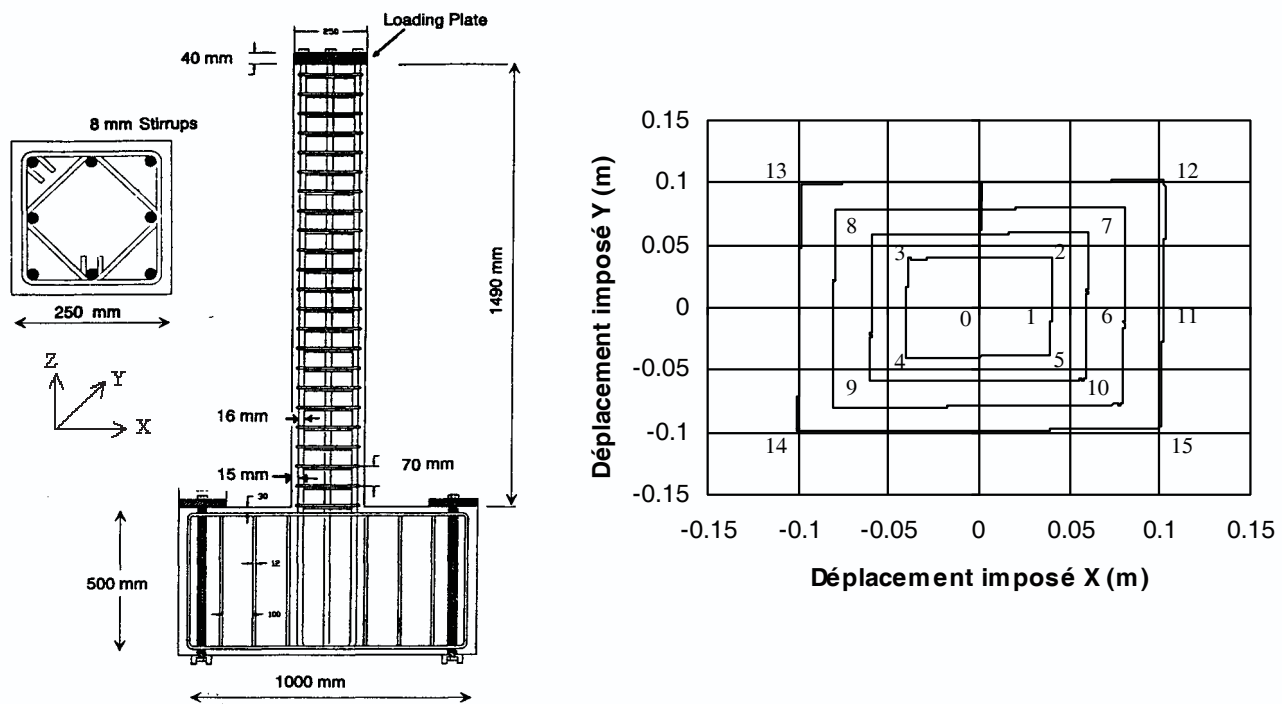
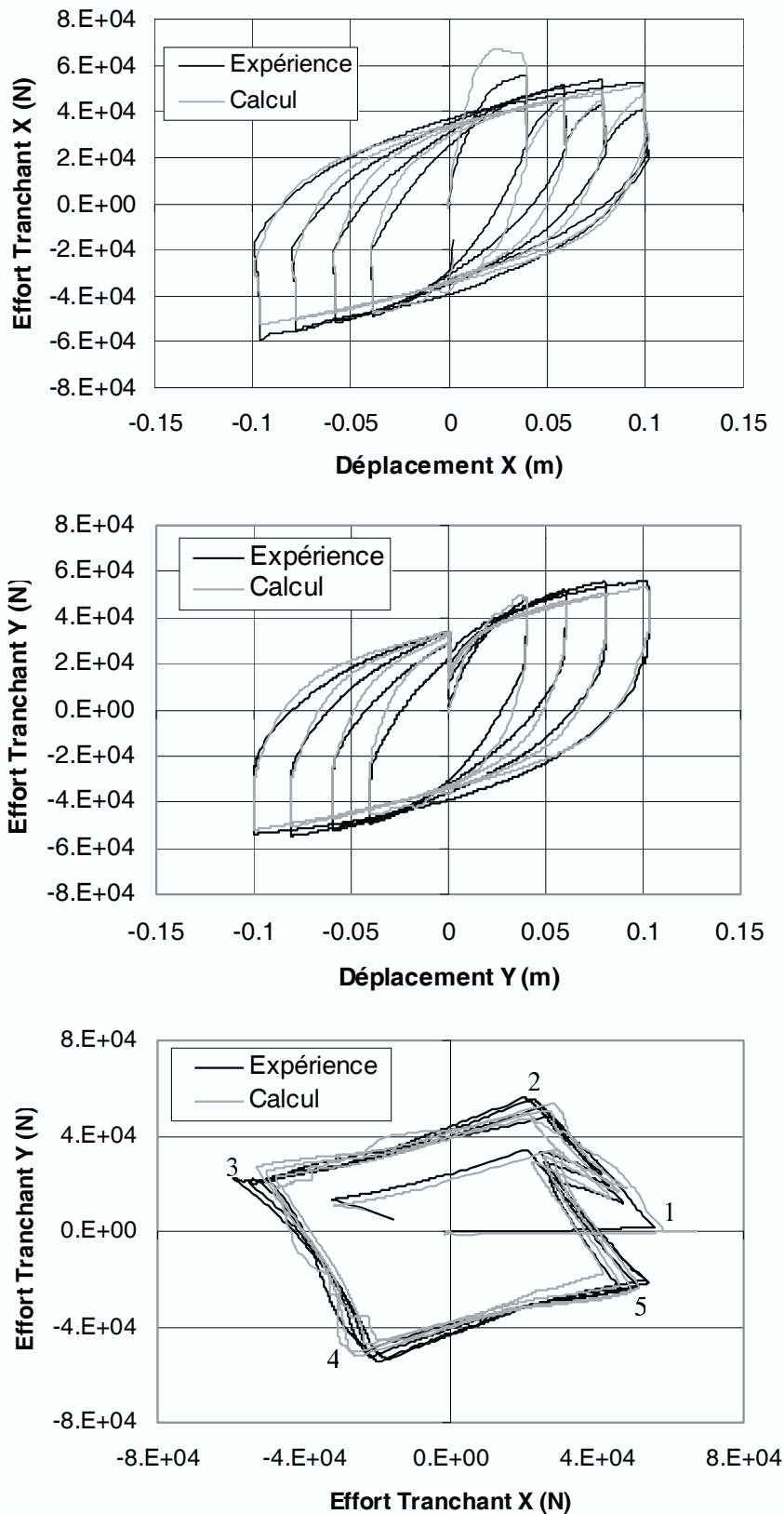


Figure 4. Description de l'essai S7



**Figure 5.** Comparaison essais-calculs

Malgré un léger écart lors du premier cycle (dû probablement à une surestimation des performances des matériaux et le fait que l'endommagement initial de la maquette dû aux retraits n'est pas pris en compte), les résultats de la simulation sont satisfaisants et prouvent la capacité de l'élément de modéliser le comportement

global non linéaire du spécimen pour les quatre niveaux (figure 5). Les boucles d'hystérésis sont correctement reproduites, ainsi que les valeurs maximales des efforts dans les deux directions.

|                                   |             |
|-----------------------------------|-------------|
| Module Young (béton)              | 20 000 MPa  |
| Coefficient de Poisson (béton)    | 0,2         |
| Résistance en compression (béton) | 29 MPa      |
| Résistance en traction (béton)    | 2,6 MPa     |
| Module Young (acier)              | 200 000 MPa |
| Coefficient de Poisson (acier)    | 0,3         |
| Limite élastique (acier)          | 460 MPa     |
| Résistance ultime (acier)         | 710 MPa     |
| Déformation ultime (acier)        | 11 %        |

**Tableau 1.** *Propriétés des matériaux utilisés pour la modélisation*

#### 4. Conclusion

Dans le cadre de ce travail un élément poutre 3D multifibre Timoshenko a été développé et présenté en détail. L'originalité de l'élément est qu'il permet de traiter les problèmes numériques dus au blocage par cisaillement, auxquels les éléments traditionnels de ce type sont sensibles, en utilisant des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur qui dépendent des propriétés des matériaux. Un exemple numérique comparé avec des résultats expérimentaux montre la pertinence de l'approche.

Dans un avenir proche l'élément sera utilisé au mieux de ses capacités, en prenant en compte le cisaillement non linéaire. Dans cet objectif des lois tridimensionnelles doivent être utilisées pour le béton, lois qui doivent être numériquement robustes et capables de simuler correctement son comportement sous chargements dynamiques complexes. Pour des problèmes de torsion, le calcul correct des déformations de cisaillement passe par la résolution du problème de gauchissement (en Laplacien) dans la section droite. Dans le cas de sections de forme quelconque composé de plusieurs matériaux, cette résolution peut se faire par analogie thermique (Casaux *et al.*, 2003) et l'on voit que l'influence du gauchissement sur le comportement non linéaire en torsion est très importante.

## Remerciements

Le présent travail a été financé par le programme européen ICONS - Innovative seismic design COncEpts for New and existing Structures - dans le cadre du réseau TMR – Training and Mobility of Researchers – (CAFEEL - ECOEST/ICONS 2001). Les auteurs tiennent à remercier Stathis Bousias de l'Université de Patras (Grèce) pour leur avoir fourni les résultats de la campagne expérimentale.

## 5. Bibliographie

- Bousias S.N., Verzeletti G., Fardis M.N., Guitierrez E., “Load-Path effects in column biaxial bending and axial force”, *Journal of Eng. Mechanics, ASCE*, 121(5), p. 596-605, 1995.
- CAFEEL-ECOEST/ICONS., Thematic report N.5. Shear Walls Structures. Editors J.M. Reynouard, M.N. Fardis, September, 2001.
- Casaux G., Ragueneau Fr., Mazars J., « Structures sous séisme : enrichissement cinématique d'éléments en torsion », *VI<sup>e</sup> Colloque National Génie Parasismique, Aspects dynamiques et vibratoires en génie civil, AFPS'03*, 1-3 juillet, papier n° 68, 2003.
- Corn S., Simplification de modèles éléments finis de structures à comportement dynamique de poutre, Thèse de doctorat de l'UFR des sciences et techniques de l'Université Franche-Comté, 1988.
- Crisfield M.A., *Nonlinear Finite Element analysis of solids and structures*, vol. I, John Wiley, Chichester, 1991.
- De Ville de Goyet V., L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique, Thèse de doctorat de l'Université de Liège, 1989.
- Donea J., Lamain L.G., “A modified representation of transverse shear in  $C^0$  quadrilateral plate elements”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 63, p. 183-207, 1987.
- Filippou F.C., “Nonlinear static and dynamic analysis for evaluation of structures”, *3<sup>rd</sup> European Conference on Structural Dynamics Eurodyn 96*, Florence Italy, 395-402, 1996.
- Friedman Z., Kosmatka J.B., “An improved two-node Timoshenko beam finite element”, *Computers and structures*, vol. 47, n° 3, p. 473-481, 1993.
- Guedes J., Pégon P., Pinto A., “A fibre Timoshenko beam element in CASTEM 2000”, Special publication, Nr. I.94.31, JRC, I-21020 Ispra, Italy, 1994.
- Ibrahimbegovic A., Frey F., Finite element analysis of linear and non linear deformations of elastic initially curved beams. LSC internal report 92/02, January, Dep. of Civil Eng. Swiss Federal Institute of Technology, LSC, DGC,EPFL, Lausanne, 1992.
- Ile N., Contribution à la compréhension du fonctionnement des voiles en béton armé sous sollicitation dynamique, Thèse de Génie Civil, INSA de Lyon, 2000.
- Kotronis P., Cisaillement dynamique de murs en béton armé. Modèles simplifiés 2D et 3D, Thèse de doctorat ENS Cachan, 2000.

- Kotronis P., Mazars J., Davenne L., “The equivalent reinforced concrete model for simulating the behavior of shear walls under dynamic loading”, *Engineering Fracture Mechanics*, issues 7-8, p. 1085-1097, 2003.
- La Borderie C.L., Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable: modélisation et application à l’analyse des structures en béton, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1991.
- Lago A., Combescure D., Numerical analysis of CAMUS III using a fiber model. Non linear push over and dynamic analysis, Rapports DMT SEMT/EMSI/RT/ 98-054 A, CEA Saclay, 1998.
- Mazars, J., “French advanced research on structural walls: An overview on recent seismic programs”, *Proceedings of the 11<sup>th</sup> European Conference on Earthquake Engineering*, Invited Lectures, Paris, CD-ROM, 1998.
- Mazars J., Kotronis P., Davenne L., “A new modelling strategy for the behaviour of shear walls under dynamic loading”, *Earthquake Engineering and Structural dynamics*, vol. 31, issue 4, p. 937-954, 2002.
- Mazars J., Colombo A., Kotronis P., Ile N., Casaux G., Ragueneau F., Fischinger M., Marusic D., “Numerical modelling for earthquake engineering: the case of lightly RC structural walls”, Keynote paper, *Proc. EURO-C 2003, Computational modelling of Concrete structures*, eds. N. Bicanic, R. de Borst, H. Mang & G. Meschke, p. 869-880, St. Johann im Pongau, Austria, 17-20 March, 2003.
- Menegotto M., Pinto P.E., “Method of analysis for cyclically loaded R.C. plane frames including changes in geometry and non-elastic behaviour of elements under combined normal force and bending”, *Symposium on the Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well Defined Repeated Loads*, International Assn. for Bridge and Structural Engineering, Zurich, p. 15-22, 1973.
- Pegon P., “A Timoshenko simple beam element in CASTEM 2000”, Special publication, Nr. I.94.04, JRC, I-21020 Ispra, Italy, 1994
- Przemieniecki J.S., *Theory of matrix structural analysis*, Dover Pubns, October 1985.
- Ragueneau F., La Borderie Ch., Mazars J., “Damage Model for Concrete Like Materials Coupling Cracking and Friction”, *Contribution towards Structural Damping: First Uniaxial Application, Mechanics Cohesive Frictional Materials*, vol. 5, p. 607-625, 2000.
- Spacone E., Filippou F.C., Taucer F.F., “Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of R/C Frames. I: Formulation”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 25, N. 7., p. 711-725, 1996.
- Stolarski H., Belytschko T., “Shear and membrane locking in C° elements”, *Computers methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 41, 1983.
- Taylor R.L., FEAP: A finite element analysis program, version 7.3 manual. University of California, Berkeley, 2000.