



HAL
open science

Étude mécanique d'un changement de phase allotropique à l'échelle mésoscopique

Michel Coret, Stéphane Valance, R. Laniel, Julien Réthoré

► **To cite this version:**

Michel Coret, Stéphane Valance, R. Laniel, Julien Réthoré. Étude mécanique d'un changement de phase allotropique à l'échelle mésoscopique. *Matériaux & Techniques*, 2010, HS (97), pp.81-87. 10.1051/mattech/2010014 . hal-01006819

HAL Id: hal-01006819

<https://hal.science/hal-01006819>

Submitted on 10 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Étude mécanique d'un changement de phase allotropique à l'échelle mésoscopique

M. Coret, S. Valance, R. Laniel et J. Réthoré

Université de Lyon, INSA-Lyon, LaMCoS, UMR 5259, 69621 Villeurbanne, France
e-mail : michel.coret@insa-lyon.fr ; Stephane.Valance@psi.ch ; romain.laniel@univrennes1.fr ;
julien.rethore@insa-lyon.fr

Résumé – Nous proposons deux types de modélisations adaptées au calcul de changements de phase allotropiques. Seules les conséquences induites par la variation de volume sont prises en compte, de façon identique à ce que l'on trouve dans les modèles de Greenwood et Johnson. Dans les années 80, Leblond proposa un modèle basé sur la croissance d'une sphère de phase dure dans une matrice plus molle afin de déterminer les lois d'évolutions élasto-plastiques. Dans une première partie, nous proposons d'étendre le modèle de Leblond en prenant également en compte la croissance de la phase molle dans une matrice de phase dure, ce qui correspond à la fin de transformation dans le processus de refroidissement. La seconde partie est consacrée à une modélisation plus fine où l'on représente explicitement le front de transformation par fonctions de niveau. Les équations de propagation du front sont résolues par éléments finis et la simulation mécanique utilise la méthode des éléments finis étendus afin d'éviter les coûteux remaillages.

Mots-clés :
Transformation de phase ; TriP ;
Level Set ; X-FEM ; force motrice

Abstract – Mechanical study of allotropic phase change at meso-scale. Two methods are proposed in the following in order to calculate allotropic phase changes. We take into account only the consequences of the volume variation in a same way as in the Greenwood and Johnson's works. In the 80's, Leblond proposed to identify the elasto-plastic evolution law by considering the growth of a hard spherical inclusion in a soft matrix. In the first part, we propose to extend the Leblond's model by considering also the growth of the soft inclusion in the hard matrix that is closer to the end of a cooling transformation. The second part is dedicated to a finer modeling where the phase front is explicitly represented by level sets. The front propagation equations are solved by finite elements and the mechanical simulation is based on the eXtended Finite Element Method in order to avoid costly remeshing.

Key words:
Phase transformation;
transformation induced plasticity;
Level Set; X-FEM; driving force

On s'intéresse ici à la modélisation du comportement mécanique de matériau au cours d'une transformation de phase allotropique. Les matériaux visés sont ceux pour lesquels la transformation de phase induit une variation de volume non négligeable (de l'ordre de 1 %) comme on l'observe pour des bases fer, le zirconium ou bien l'uranium par exemple. Principalement pilotées par la température, ces transformations dépendent aussi, mais non nécessairement, des phénomènes de diffusion dont les alliages fer-carbone sont une parfaite illustration. Nous ne considérerons pas ici les phénomènes de diffusion mais uniquement les changements de volumes qu'induisent les transformations.

Durant la transformation, même sans sollicitation extérieure, il existe un fort niveau de contraintes internes bien que la moyenne soit nulle. Si bien que l'ajout du moindre effort extérieur génère des déformations résiduelles, également appelées, déformations plastiques de transformation. Historiquement, on trouve dans les travaux de Greenwood et Johnson [1] une première modélisation à l'échelle mésoscopique de ce phénomène. La direction du front de transformation est supposée être aléatoire, le matériau

le plus mou est élasto-plastique parfait et les déformations élastiques sont négligées. À partir des hypothèses précédentes les auteurs déterminent une relation de proportionnalité entre les déformations résiduelles et la contrainte appliquée.

Le mécanisme de Greenwood s'applique aux transformations évoluant par germination et croissance. Dans le cas des transformations dites « displacives » comme la transformation martensitique, toute sollicitation extérieure vient orientée l'apparition des plaquettes, ce qui se traduit par de la plasticité de transformation à l'échelle macroscopique [2].

Depuis ces premiers travaux, de nombreux autres ont permis d'affiner ces modèles. On notera en particulier les travaux plus fondamentaux de Leblond et al. [3–6] concernant le mécanisme de Greenwood, ou bien les travaux de Fischer et al. [7–10] où les phénomènes de Greenwood et de Magee sont pris en compte simultanément. Une extension intéressante au cas des grandes transformations est proposée dans [11].

La corps de cet article traite des effets mécaniques sur les transformations de phase en suivant le chemin initialement tracé par Greenwood puis Leblond. On s'intéressera en particulier à affiner les prédictions en fin de transformation puis au cours de celle-ci, lorsque l'on ne peut plus considérer une phase comme une unique inclusion, croissant dans une matrice infinie.

Une première partie propose une extension du modèle de Leblond pour accroître sa validité et sa précision en fin de transformation. Une seconde partie est consacrée à la simulation numérique d'une transformation de phase à l'échelle mésoscopique (échelle des grains considérés comme homogènes). Dans ces calculs, les frontières des phases sont représentées à l'aide de fonctions de niveau (level-set) et servent de support à des calculs utilisant la méthode des éléments finis étendus qui ne nécessite pas de remaillage.

Une extension symétrique du modèle de leblond

Le modèle de Leblond

Dans ces articles des années 80 [3–6] Leblond considère un matériau constitué de deux phases élasto-plastiques parfaites dont les proportions vont évoluer en fonction de la température. On suppose que ces phases ont

une raideur identique mais une limite élastique beaucoup plus élevée pour la phase α que pour la phase γ qui est dite « molle ». Enfin, la transformation se produit avec une variation de volume : $\Delta\epsilon^{T_{ref}}$ à la température T_{ref} . On note $z = \frac{V_\alpha}{V_\alpha + V_\gamma}$, la fraction volumique de phase α .

À partir des hypothèses précédentes et en considérant un front mobile, Leblond montre que le taux de déformation plastique est la somme de trois termes (Éq. (1)), respectivement proportionnels aux taux de contrainte, température et proportion de phase. On voit ici clairement que la plasticité de transformation est la conséquence de l'homogénéisation d'un matériau dont les proportions de phases ne sont pas constantes.

$$\dot{E}^p = \dot{E}_\Sigma^{cp} + \dot{E}_T^{cp} + \dot{E}^{tp} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \dot{E}^{tp} = (1-z) \left\langle \frac{\delta e^p}{\delta z} \right\rangle_{V_\gamma} \dot{z} \\ \dot{E}_T^{cp} = (1-z) \left\langle \frac{\delta e^p}{\delta T} \right\rangle_{V_\gamma} \dot{T} \\ \dot{E}_\Sigma^{cp} = (1-z) \left\langle \frac{\delta e^p}{\delta \Sigma} \right\rangle_{V_\gamma} \dot{\Sigma}. \end{cases} \quad (1)$$

Reste à déterminer les différentes valeurs moyennes de variation plastique. Pour cela, la phase dure est modélisée comme une inclusion sphérique croissant dans une phase molle obéissant à un critère de von Mises. D'autres hypothèses assez fines sur la répartition des contraintes permettent finalement d'obtenir le système d'équation (2) :

$$\begin{cases} \dot{E}^{tp} = -3 \frac{\Delta\epsilon^{T_{ref}}}{\sigma_y} S \ln(z) \dot{z} & \text{if } z > 0,03 \\ \dot{E}_T^{cp} = 3 \frac{(\alpha_\gamma - \alpha_\alpha)}{\sigma_y} z \ln(z) S \dot{T} \\ \dot{E}_\Sigma^{cp} = \frac{3}{2} \frac{(1-z)}{\sigma_y} \frac{g(z)}{E} S \dot{\Sigma}^{eq}. \end{cases} \quad (2)$$

On notera qu'une extension au cas $0 > z > 0,03$ a été obtenu par Taleb et al. [12]. La fonction g est un terme correctif obtenue numériquement par éléments finis.

Une extension symétrique

Bien que les résultats obtenus par le modèle précédent soient tout à fait acceptables, il semble étonnant de considérer uniquement la croissance d'une phase fille dans un milieu infini alors qu'une transformation complète se produit. Nous avons donc proposé [13] d'appliquer le modèle précédent en début de transformation et de considérer l'inverse en fin de transformation. Nous avons proposé de plus qu'en milieu de transformation

les deux configurations coexistent simultanément. En reprenant les travaux précédent, on obtient aisément les relations suivantes à l'échelle macroscopique :

$$\begin{cases} \dot{E}^{tp} = \frac{3}{2} \left[\frac{1-z}{\sigma_y} \left\langle \frac{\delta \epsilon^{eq}}{\delta z} \right\rangle_{V_y} + \frac{z}{\sigma_\alpha} \left\langle \frac{\delta \epsilon^{eq}}{\delta z} \right\rangle_{V_\alpha} \right] S \dot{z} \\ \dot{E}_T^{cp} = \frac{3}{2} \left[\frac{1-z}{\sigma_y} \left\langle \frac{\delta \epsilon^{eq}}{\delta T} \right\rangle_{V_y} + \frac{z}{\sigma_\alpha} \left\langle \frac{\delta \epsilon^{eq}}{\delta T} \right\rangle_{V_\alpha} \right] \dot{T} \\ \dot{E}_\Sigma^{cp} = \frac{3}{2} \left[\frac{1-z}{\sigma_y} \left\langle \frac{\delta \epsilon^{eq}}{\delta \Sigma} \right\rangle_{V_y} + \frac{z}{\sigma_\alpha} \left\langle \frac{\delta \epsilon^{eq}}{\delta \Sigma} \right\rangle_{V_\alpha} \right] \dot{\Sigma}. \end{cases} \quad (3)$$

Toutes les valeurs moyennes des taux de déformation équivalente sont calculés de façon identiques à [3, 4]. On remarquera que les volumes de phase sont simplement reliés à la fraction volumique z . Nous devons cependant introduire une nouvelle variable β qui traduit la proportion de configuration (phase dure incluse dans la phase molle ou bien l'inverse). Nous avons proposé l'heuristique suivante : en début et en fin de transformation, seule une configuration prédomine, et dans le cas intermédiaire on passe de façon linéaire de l'une à l'autre des configurations (voir Fig. 1).

On obtient finalement les taux de déformations suivant :

$$\begin{cases} \dot{E}^{tp} = \beta \dot{E}_y^{tp} + (1 - \beta) \dot{E}_\alpha^{tp} \\ \dot{E}_T^{cp} = \beta \dot{E}_{T_y}^{cp} + (1 - \beta) \dot{E}_{T_\alpha}^{cp} \\ \dot{E}_\Sigma^{cp} = \beta \dot{E}_{\Sigma_y}^{cp}. \end{cases} \quad (4)$$

On remarquera ici que le terme \dot{E}_Σ^{cp} traduit uniquement la plasticité induite par le chargement extérieur sur la phase la plus molle. Enfin, on se reportera à [13] pour les développements concernant les modèles avec écrouissage isotrope ou cinématique dans le cas de transformations au refroidissement ou au chauffage. Un exemple de calcul utilisant les différents modèles est donné sur la figure 2 dans le cas d'un essai de traction-torsion. Dans ce cas l'effort de traction est constant alors que le couple est une fonction sinusoïdale. L'extension symétrique n'apporte rien sur la prévision des déformations longitudinales qui saturent assez vite. Par contre, ce modèle apporte une légère amélioration sur la prévision des déformations de cisaillement.

Vers l'exploration numérique des transformations de phase

Il semble assez étonnant que des modèles tels que ceux présentés précédemment soient relativement performant mal-

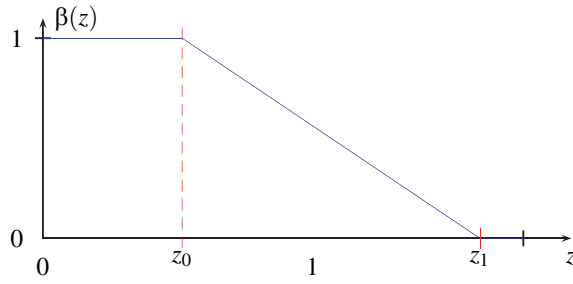


Fig. 1. Fonction β pour une transformation au refroidissement.

Fig. 1. β function for a cooling transformation.

gré le nombre important d'hypothèses nécessaires à les construire. On observe pour des contraintes imposées une bonne estimation des déformations macroscopiques. Il semble par contre totalement hors de portée de ces modèles de décrire plus finement l'état mécanique pendant la transformation à une échelle mésoscopique. On notera en particulier que les phases croissent dans des matrices infinies ou aucune interaction n'est prise en compte entre les différentes inclusions. Malheureusement, le problème devenant tellement complexe, il semble nécessaire pour aller plus loin de s'orienter vers une approche totalement numérique. L'objet de cette partie est de proposer une démarche de représentation des fronts puis son utilisation pour la simulation numérique, sans remaillage, même pour une transformation complète. La procédure repose sur l'utilisation des fonctions de niveau adjointe à la méthode des éléments finis étendus comme on le trouve dans [14, 15].

Représentation du front

La première difficulté est la représentation d'un front de transformation qui va traverser toute la structure étudiée puisque l'on souhaite simuler une transformation complète. Dans les études précédentes, ce front n'a pas de support, il progresse à la vitesse ou les éléments changent de constituant. Une bonne représentation nécessite un maillage très fin et volumique, et le front n'est jamais une surface continue. Une élégante solution a été proposée par Osher et al. à la fin des années 80 [16]. Ceux-ci proposent de représenter les hypersurfaces non pas de façon intrinsèque, mais comme la valeur particulière d'un champ scalaire correspondant à une distance signée. Si ϕ est le champ scalaire, le front Γ sera par exemple

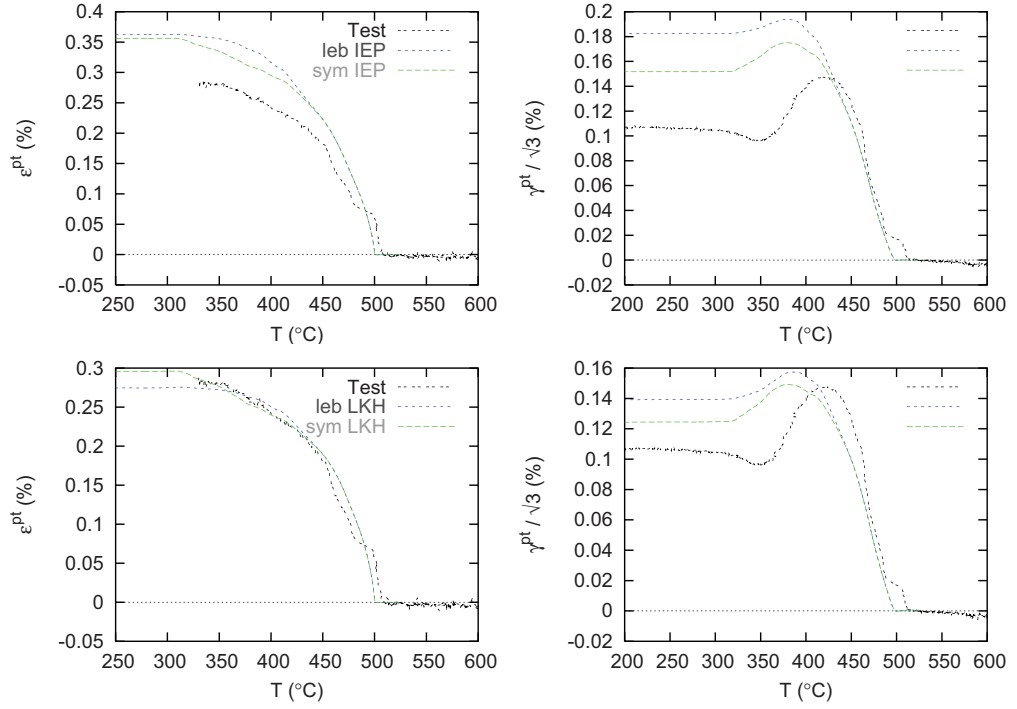


Fig. 2. Test biaxial de traction-torsion. leb : modèle de Leblond, sym : version symétrique, IEP : ideal elasto plastic law, LKH : linear kinematic.

Fig. 2. Traction-torsion biaxial test. leb: Leblond model, sym: symmetrical version, IEP: ideal elasto plastic law, LKH: linear kinematic hardening law.

représenté par l'ensemble : $\Gamma = \{ \mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}) = 0 \}$. L'évolution temporelle de ce champ est définie par une équation d'Hamilton-Jacobi :

$$\frac{D\phi}{Dt} = 0 \iff \phi_{,t} + \nabla\phi \cdot \mathbf{x}_{,t} = 0. \quad (5)$$

Si l'on appelle V_n la vitesse normale au front et si l'on suppose que $\|\nabla\phi\| = 1$, on obtient alors le système particulier 6 où f donne les valeurs initiales du champ :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \begin{cases} \phi_{,t} + V_n = 0 \\ \phi(\mathbf{x}(t), t = 0) = f(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (6)$$

Ces équations sont usuellement résolues pas différence finies, ce qui nécessite un maillage fin et régulier pour obtenir des résultats précis. Ces deux restrictions peuvent être évitées en utilisant une résolution par éléments finis. On trouve une première proposition dans les travaux de Mourad [17]. À partir de la formulation faible et en utilisant des fonction de forme éléments finis « standard », Mourad propose de résoudre le système suivant :

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t - \Delta t \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T V_e dV \quad (7)$$

avec les fonctions de forme \mathbf{N} et la matrice de masse \mathbf{M} tel que :

$$\phi = \mathbf{N}\boldsymbol{\phi} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (8)$$

Deux difficultés conséquentes restent à traiter :

- conserver la norme du gradient de ϕ à 1
- imposer la vitesse normale au front

$$\begin{cases} \|\nabla\phi\| = 1 \iff \nabla\phi \cdot \nabla\phi = 1, \forall \mathbf{x} \in \Omega/\Gamma \\ \phi = 0, \forall \mathbf{x} \in \Gamma \end{cases} \quad (9)$$

Une méthode de résolution est proposée par les auteurs dans [18]. La première équation du système 9 est résolue par l'utilisation d'une formulation faible du problème linéarisé alors que la condition aux limites est respectée par l'utilisation de fonctions de forme enrichies respectant la partition de l'unité [19]. Soit :

$$\forall \psi \in \mathbb{U} = \{ \phi \in \mathcal{U} \mid \phi = 0 \text{ sur } \Gamma \}. \quad (10)$$

Trouver ϕ_t^{k+1} tel que

$$\mathcal{A}^k(\psi, \phi_t^{k+1}) = \ell^k(\psi) \quad (11)$$

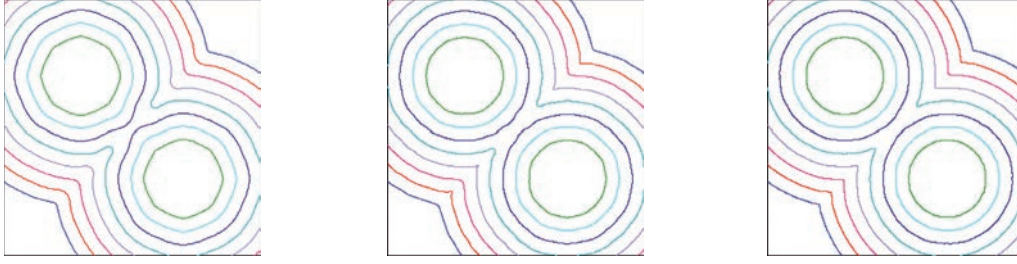


Fig. 3. Expansion d'un cercle à vitesse constante pour différentes discrétisation en utilisant des éléments quadratiques. De gauche à droite : 10×10 , 20×20 , et 40×40 éléments.

Fig. 3. Collapsing circles at constant velocity for different quadrangular element size and second order shape functions. From left to right: 10×10 , 20×20 , and 40×40 elements.

avec

$$\mathcal{A}^k(\psi, \phi_t^{k+1}) = 2 \int_{\Omega} \psi \nabla \phi_t^k \cdot \nabla \phi_t^{k+1} dV \quad (12)$$

$$\ell^k(\psi) = \int_{\Omega} \psi (1 + \nabla \phi_t^k \cdot \nabla \phi_t^k) dV. \quad (13)$$

Le champ scalaire ϕ est discrétisé en utilisant des fonctions de formes enrichies :

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) \left(\sum_{k=1}^N N_k(\mathbf{x}) \phi_t^0(\mathbf{x}_k) + \delta^0 \right) \\ \tilde{\phi}_i = \mathbf{N}_e \hat{\phi}. \quad (14)$$

Où N_i sont les fonctions de formes standard et N_k les fonctions enrichies. On se laisse de plus la possibilité d'imposer une valeur non nulle au front à travers δ^0 .

Le système discret se présente finalement sous la forme :

$$\mathbf{A}^k \hat{\phi}_t^{k+1} = \mathbf{b}^k \quad (15)$$

avec

$$\mathbf{A}^k = 2 \int_{\Omega} \mathbf{N}_e^T (\nabla \mathbf{N}_e \hat{\phi}_t^k)^T \nabla \mathbf{N}_e dV \quad (16)$$

$$\mathbf{b}^k = \int_{\Omega} (1 + (\nabla \mathbf{N}_e \hat{\phi}_t^k)^T (\nabla \mathbf{N}_e \hat{\phi}_t^k)) \mathbf{N}_e^T dV \quad (17)$$

La forme de ce système n'est pas complètement satisfaisante car il n'est pas symétrique, l'unicité ni la stabilité ne sont donc pas assurées. Dans la pratique nous utilisons donc une stabilisation de type GLS (Galerkin Least Square) [18].

On illustre cette méthode sur les figures 3. On observe ici la qualité de la solution calculée pour un nombre relativement faible d'éléments (20) pour des fonctions de formes quadratiques.

Calculs mécaniques

Les calculs mécaniques sont effectués avec le code ELFE3D développé au LaMCoS.

Avec l'utilisation des éléments finis étendus, le front de transformation n'a pas besoin d'être maillé, contrairement à d'autres approches [20]. Le matériau est donné au point de gauss en fonction de la position du front qui est donné par la fonction de niveau. Durant le calcul, si un point de gauss change de matériau, celui-ci subit également la variation de volume associée. Les variables d'écroutissage sont pour l'instant remises à zéro. À titre d'exemple, on choisit un carré unitaire dont 2 inclusions sphériques croient avec la variation de température (cf [21]). On suppose ici que la vitesse du front est connue et est constante. Au fur et à mesure que la température décroît, les inclusions grandissent et laissent apparaître de la plasticité induite par la transformation (cf. Fig. 4).

Calcul de la vitesse du front

Une solution plus satisfaisante que d'imposer la vitesse du front est de la déterminer à partir du calcul mécanique. Une possibilité consiste à utiliser la mécanique Eschelbienne [22] dans laquelle la vitesse du front \mathbf{V}_n et la force motrice \mathbf{f}^Σ sont les quantités duales de la puissance dissipée à l'interface [23].

$$[\mathbf{b}] \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{f}^\Sigma \quad \text{avec} \quad \mathbf{b} = -\nabla u \cdot \boldsymbol{\sigma} - W \mathbf{Id} \quad (18)$$

où W est la densité d'énergie interne.

Nous avons montré [21] que l'équation (18) peut être calculée à l'aide d'une intégrale indépendante de contour 19, où \mathbf{q} est un champ d'extension virtuel choisi. Une discrétisation éléments finis de la force motrice \mathbf{f}^Σ ainsi que du champ d'extension virtuel conduit à la résolution d'un système linéaire.

$$\int_{\phi^0 \cap \omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{f}^\Sigma dS + \int_{\omega} \nabla \mathbf{q} : \mathbf{b} dV = 0 \quad (19)$$

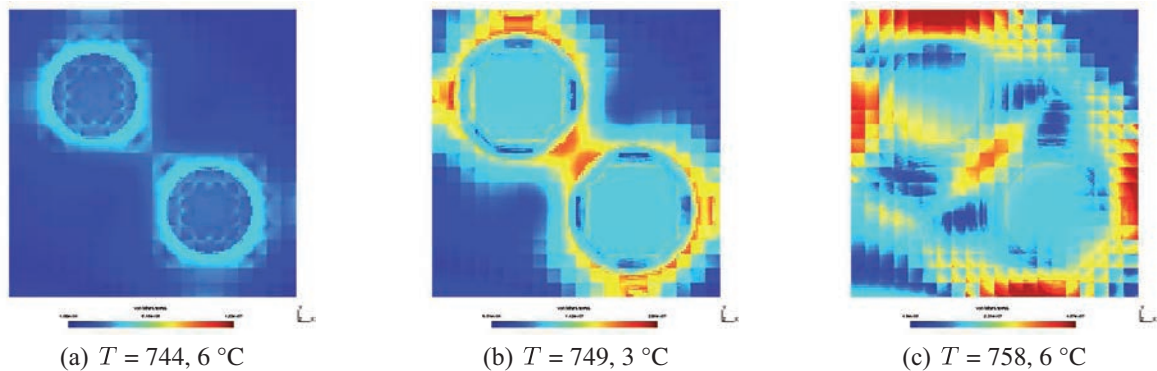


Fig. 4. Champ de contrainte de von Mises pour différentes températures.

Fig. 4. Von Mises stress field for different temperatures.

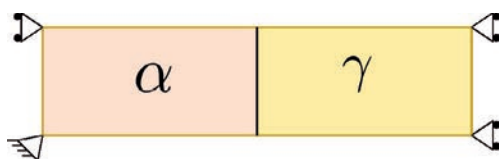


Fig. 5. Essai Satoh pour le calcul de force motrice pour un chargement thermo-mécanique.

Fig. 5. Satoh test for the computation of the driving force induced by a thermo-mechanical loading.

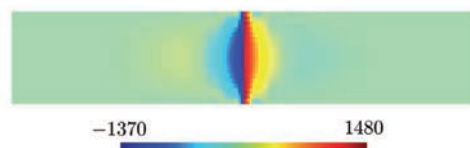


Fig. 6. Composante b_{xx} du tenseur d'Eshelby.

Fig. 6. b_{xx} component of the Eshelby tensor.

Le calcul couplé calcul mécanique/vitesse du front est en cours d'implantation dans le code ELFE3D. Un exemple de calcul sur une poutre bidimensionnelle est donné sur la figure 5. La composante normale du tenseur b_{xx} est tracé sur la figure 6.

Conclusion

Nous avons tenté à travers cet article de montrer quelques voies possibles concernant la modélisation du comportement d'un matériau pendant une transformation de phase. Déterminer les équations constitutives à l'échelle macroscopique est réellement délicat et nécessite de nombreuses hypothèses qui sont levées petit à petit. Nous avons montré dans la première partie comment améliorer le modèle de Leblond en passant plus progressivement du début à la fin d'une transformation complète. Le modèle proposé repose sur une topologie sim-

pliste de phases dont les interactions inter inclusions sont impossibles. Une représentation plus fine de ces phénomènes passe par la simulation numérique. Une difficulté importante réside dans la représentation du front de transformation. L'utilisation de fonctions de niveau couplées à un calcul utilisant les éléments finis étendus est une réelle avancée car le remaillage (très lourd en 3D) n'est pas nécessaire. Nous souhaitons tester cet outil sur des calculs 3D plus importants et avec un plus grand nombre d'inclusions. Il sera particulièrement intéressant de tester l'influence de la vitesse de propagation lorsque celle-ci est couplée au champ mécanique. Cependant certains problèmes de fond subsistent. En particulier, la façon dont nous transformons les points de Gauss qui changent de phase est encore aujourd'hui trop grossière.

Références

- [1] G.W. Greenwood, R.H. Johnson, *Proc. R. Soc.* **283** (1965) 403-422
- [2] C.L. Magee, *Nucleation of martensite, phases transformations*, ASM, Metals Park, 2^e édition, 1970
- [3] J.B. Leblond, J. Devaux, J.C. Devaux, *J. Mech. Phys. Solids* **34** (1986) 395-409
- [4] J.B. Leblond, G. Mottet, J.C. Devaux, *J. Mech. Phys. Solids* **34** (1986) 411-432
- [5] J.B. Leblond, J. Devaux, J.C. Devaux, *Int. J. Plas.* **5** (1989) 551-572
- [6] J.B. Leblond, J. Devaux, J.C. Devaux, *Int. J. Plasticity* **5** (1989) 573-591
- [7] K. Nagayama, Y. Kitajima, S. Kigami, K. Tanaka, F.D. Fischer, G. Cailletaud, *Key Eng. Mater.* **177-180** (2000) 443-448
- [8] K. Nagayama, T. Terasaki, K. Tanaka, F.D. Fischer, T. Antretter, G. Cailletaud, F. Azzouz, *Mater. Sci. Eng. A* **308** (2001) 25-37
- [9] K. Nagayama, T. Terasaki, S. Goto, K. Tanaka, T. Antretter, F.D. Fischer, G. Cailletaud, F. Azzouz, *Mater. Sci. Eng. A* **336** (2002) 30-38

- [10] K. Tanaka, T. Terasaki, S. Goto, F.D. Fischer, T. Antretter, G. Cailletaud, *Mater. Sci. Eng. A* **341** (2003) 189-196
- [11] J. Kim, S.Im, H.G. Kim, *Int. J. Plas.* **21** (2005) 1381-1408
- [12] L. Taleb, F. Sidoroff, *Int. J. Plas.* (2002)
- [13] S. Valance, M. Coret, A. Combescure, *Eur. J. Mech./A Solids* **26** (2007) 460-473
- [14] N. Moes, A. Gravouil, T. Belytschko, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **53** (2002) 2549-2568
- [15] A. Gravouil, N. Moes, T. Belytschko, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **53** (2002) 2569-2586
- [16] S. Osher, J. Sethian, *J. Comput. Phys.* **79** (1988) 12-49
- [17] H.M. Mourad, J. Dolbow, K. Garikipati, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **64** (2005) 1009-1032
- [18] S. Valance, R. de Borst, J. Réthoré, M. Coret, *Int. J. Num. Methods Eng.* **76** (2008) 1513-1527
- [19] I. Babuska, J.M. Melenk, *Int. J. Num. Methods Eng.* **40** (1997) 727-758
- [20] F. Barbe, R. Quey, L. Taleb, *Eur. J. Mech./A Solids* **26** (2007) 611-625
- [21] S. Valance, Aspects mécaniques du changement de phase allotropique à l'échelle mésoscopique, PhD thesis, INSA-LYON, 2007
- [22] J.D. Eshelby, *Philos. Trans. R. Soc. London. A, Math. Phys. Sci.* **244** (1951) 87-112
- [23] G.A. Maugin, C. Trimarco, *Meccanica* **30** (1995) 605-619