



**HAL**  
open science

## Mathématiques, les pieds dans l'eau

Carine Lucas, Frédéric Darboux

► **To cite this version:**

Carine Lucas, Frédéric Darboux. Mathématiques, les pieds dans l'eau. 2. Printemps des Mathématiques, May 2010, Lycée Alphonse Daudet, Nîmes, France. hal-01005061

**HAL Id: hal-01005061**

**<https://hal.science/hal-01005061v1>**

Submitted on 6 Jun 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Mathématiques, les pieds dans l'eau.

2<sup>e</sup> "Printemps des Mathématiques"

Lycée A. Daudet - Laboratoire J.-P. Serre

Frédéric Darboux et Carine Lucas

INRA et laboratoire MAPMO - Orléans



7 mai 2010

# Jean-Gaston DARBOUX



[Source : Ernest Lebon]

- Mathématicien nîmois (1842-1917)
- Élève (médiocre selon son proviseur) au lycée de Nîmes [Source : lycée Darboux]
- Travaux en analyse et en géométrie

Intégrale de Darboux

[Source : Benutzer Günther]

- Grande somme de Darboux
- Petite somme de Darboux

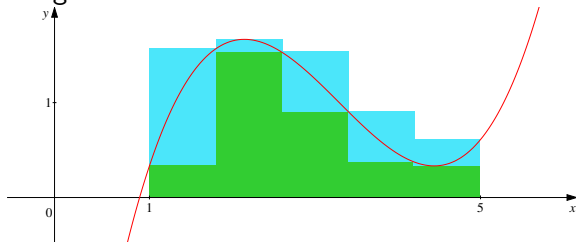
# Jean-Gaston DARBOUX



- Mathématicien nîmois (1842-1917)
- Élève (médiocre selon son proviseur) au lycée de Nîmes [Source : lycée Darboux]
- Travaux en analyse et en géométrie

[Source : Ernest Lebon]

## Intégrale de Darboux



[Source : Benutzer Gunther]

- Grande somme de Darboux
- Petite somme de Darboux

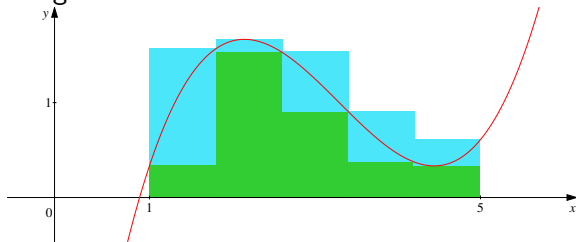
# Jean-Gaston DARBOUX



- Mathématicien nîmois (1842-1917)
- Élève (médiocre selon son proviseur) au lycée de Nîmes [Source : lycée Darboux]
- Travaux en analyse et en géométrie

[Source : Ernest Lebon]

## Intégrale de Darboux



[Source : Benutzer Gunther]

- Grande somme de Darboux
- Petite somme de Darboux

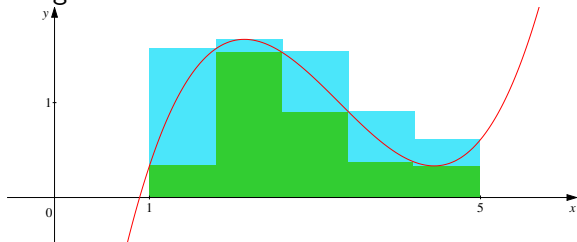
# Jean-Gaston DARBOUX



- Mathématicien nîmois (1842-1917)
- Élève (médiocre selon son proviseur) au lycée de Nîmes [Source : lycée Darboux]
- Travaux en analyse et en géométrie

[Source : Ernest Lebon]

## Intégrale de Darboux



[Source : Benutzer Gunther]

- Grande somme de Darboux
- Petite somme de Darboux

# Jean-Gaston DARBOUX

## Honoré par sa ville natale

- Buste dans la cour d'honneur du lycée Daudet
- Rue Darboux (entre av. J. Jaurès et rue Dhuoda)
- Lycée Darboux

## Appartenant à une lignée de mathématiciens

- Élève de M. CHASLES ( $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ).
- A formé d'autres mathématiciens, tel Émile BOREL.

# Jean-Gaston DARBOUX

## Honoré par sa ville natale

- Buste dans la cour d'honneur du lycée Daudet
- Rue Darboux (entre av. J. Jaurès et rue Dhuoda)
- Lycée Darboux

## Appartenant à une lignée de mathématiciens

- Élève de M. CHASLES ( $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ).
- A formé d'autres mathématiciens, tel Émile BOREL.



# Frédéric DARBOUX

## Formation

- "Licence" de géologie — 1993 — *Univ. J. Fourier, Grenoble*
- "Master 1" de géologie — 1994 — *Univ. J. Fourier, Grenoble*
- "Master 2" de géologie — 1995 — *Univ. de Rennes 1*
- Magistère en sciences de la Terre — 1995 — *École normale (très) supérieure, Lyon*
- Doctorat en sciences de la Terre — 1999 — *Univ. de Rennes 1*

## De la géologie profonde à la surface

- Maitrise : mise en place d'un granite cévenol
- DEA : forme des vallées en Bretagne
- Doctorat : ruissellement et érosion des sols sur les versants

# Frédéric DARBOUX

## Formation

- "Licence" de géologie — 1993 — *Univ. J. Fourier, Grenoble*
- "Master 1" de géologie — 1994 — *Univ. J. Fourier, Grenoble*
- "Master 2" de géologie — 1995 — *Univ. de Rennes 1*
- Magistère en sciences de la Terre — 1995 — *École normale (très) supérieure, Lyon*
- Doctorat en sciences de la Terre — 1999 — *Univ. de Rennes 1*

## De la géologie profonde à la surface

- Maitrise : mise en place d'un granite cévenol
- DEA : forme des vallées en Bretagne
- Doctorat : ruissellement et érosion des sols sur les versants

# Frédéric DARBOUX

## Emplois

- Chercheur — 2000-2001 — *Purdue univ., USA*
- Chercheur — 2002-... — *Science du sol, INRA, Orléans*

Institut National de la Recherche Agronomique  
Agriculture — Alimentation — Environnement

## Pas *que* des agronomes

- Labo. de Science du sol d'Orléans : 25 personnes, 1 agronome
- Personnels de l'INRA : chercheurs, mais surtout des ingénieurs et des techniciens.

# Frédéric DARBOUX

## Emplois

- Chercheur — 2000-2001 — *Purdue univ., USA*
- Chercheur — 2002-... — *Science du sol, INRA, Orléans*



**Institut National de la Recherche Agronomique**

Agriculture — Alimentation — Environnement

## Pas *que* des agronomes

- Labo. de Science du sol d'Orléans : 25 personnes, 1 agronome
- Personnels de l'INRA : chercheurs, mais surtout des ingénieurs et des techniciens.

# Frédéric DARBOUX

## Emplois

- Chercheur — 2000-2001 — *Purdue univ., USA*
- Chercheur — 2002-... — *Science du sol, INRA, Orléans*



**Institut National de la Recherche Agronomique**  
Agriculture — Alimentation — Environnement

## Pas *que* des agronomes

- Labo. de Science du sol d'Orléans : 25 personnes, 1 agronome
- Personnels de l'INRA : chercheurs, mais surtout des ingénieurs et des techniciens.

# Frédéric DARBOUX

## Emplois

- Chercheur — 2000-2001 — *Purdue univ., USA*
- Chercheur — 2002-... — *Science du sol, INRA, Orléans*



**Institut National de la Recherche Agronomique**  
Agriculture — Alimentation — Environnement

## Pas *que* des agronomes

- Labo. de Science du sol d'Orléans : 25 personnes, 1 agronome
- Personnels de l'INRA : chercheurs, mais surtout des ingénieurs et des techniciens.

# Frédéric DARBOUX

## Emplois

- Chercheur — 2000-2001 — *Purdue univ., USA*
- Chercheur — 2002-... — *Science du sol, INRA, Orléans*



**Institut National de la Recherche Agronomique**  
Agriculture — Alimentation — Environnement

## *Pas que des agronomes*

- Labo. de Science du sol d'Orléans : 25 personnes, 1 agronome
- Personnels de l'INRA : chercheurs, mais surtout des ingénieurs et des techniciens.

# Frédéric DARBOUX

## Emplois

- Chercheur — 2000-2001 — *Purdue univ., USA*
- Chercheur — 2002-... — *Science du sol, INRA, Orléans*



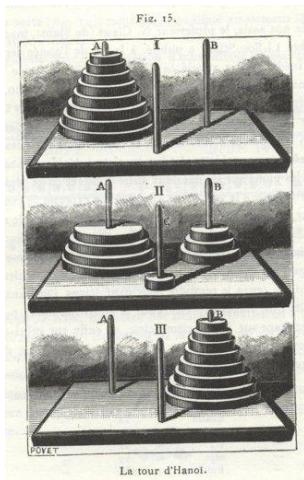
**Institut National de la Recherche Agronomique**  
Agriculture — Alimentation — Environnement

## Pas *que* des agronomes

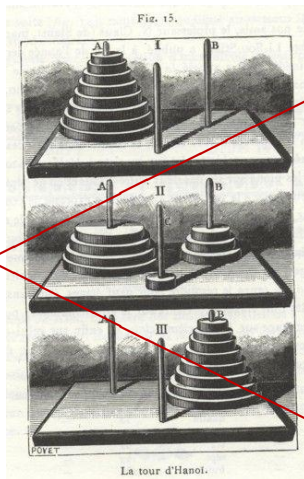
- Labo. de Science du sol d'Orléans : 25 personnes, 1 agronome
- Personnels de l'INRA : chercheurs, mais surtout des ingénieurs et des techniciens.



# Edouard LUCAS



# Edouard LUCAS



# Carine LUCAS - Cursus post-bac

- classes préparatoires MPSI - MP *Lycée A. Daudet*
- Licence *Université J. Fourier, Grenoble*
- Maitrise
- 2<sup>e</sup> année de Master
- Thèse en Maths Appliquées *Université J. Fourier, Grenoble*

# Carine LUCAS - Cursus post-bac

- classes préparatoires MPSI - MP
- Licence
- Maitrise
- 2<sup>e</sup> année de Master
- Thèse en Maths Appliquées

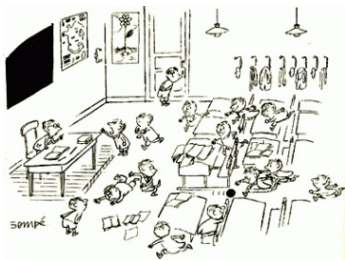
*Lycée A. Daudet*

*Université J. Fourier, Grenoble*

*Université J. Fourier, Grenoble*

depuis 2008 : Maître de conférence à l'Université d'Orléans  
laboratoire de Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans

## Enseignement



## Recherche



THEOREME 1. - On a l'inégalité

$$\sum_{r \in G} \frac{|K_r|(|K_r| - 1)}{K^2} \log \left( \frac{|K_r| - 1}{K \in \Lambda_r} \right) + \frac{K-1}{K^2} \sum_{r \in G} \sum_{s \in \Lambda_r} |\log |\alpha_s||$$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{K}\right) \frac{2D}{K} \sum_{n=1}^K h(\alpha_n) + \frac{D}{K} \left(1 + \frac{|G|}{2D} + \log \frac{K}{2}\right)$$

<http://www.lsv.ens-cachan.fr/~bouyer/TiNicolas/nico.htm>

# Les sols — Une grande diversité

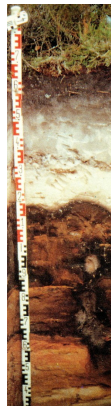
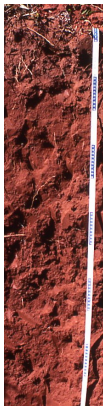


[Source : Discovery]

# Les sols — Une grande diversité



[Source : Discovery]



[Source : M. Isambert, D. Michot, A. Ruellan, C. Walter]

# Les sols — une interface

À l'interface entre :

- le sous-sol (géosphère)
- l'eau (hydrosphère)
- la vie (biosphère)
- l'atmosphère

Un milieu complexe

# Les sols — une interface

À l'interface entre :

- le sous-sol (géosphère)
- l'eau (hydrosphère)
- la vie (biosphère)
- l'atmosphère

Un milieu complexe



# Les sols — Une interface aux multiples fonctions

## Fonctions

- **environnementales**
  - stockage et épuration de l'eau
  - rétention et transformation des polluants
  - réservoir de biodiversité
  - ...
- **économiques**
  - production agricole et forestière
  - source de matières premières
  - ...
- **sociales et culturelles**
  - support des activités humaines
  - conservation du patrimoine archéologique
  - ...

# Les sols — Une interface aux multiples fonctions

## Fonctions

- environnementales
  - stockage et épuration de l'eau
  - rétention et transformation des polluants
  - réservoir de biodiversité
  - ...
- économiques
  - production agricole et forestière
  - source de matières premières
  - ...
- sociales et culturelles
  - support des activités humaines
  - conservation du patrimoine archéologique
  - ...

# Les sols — Une interface aux multiples fonctions

## Fonctions

- environnementales
  - stockage et épuration de l'eau
  - rétention et transformation des polluants
  - réservoir de biodiversité
  - ...
- économiques
  - production agricole et forestière
  - source de matières premières
  - ...
- sociales et culturelles
  - support des activités humaines
  - conservation du patrimoine archéologique
  - ...

# Les sols — Une interface aux multiples fonctions

## Fonctions

- environnementales
  - stockage et épuration de l'eau
  - rétention et transformation des polluants
  - réservoir de biodiversité
  - ...
- économiques
  - production agricole et forestière
  - source de matières premières
  - ...
- sociales et culturelles
  - support des activités humaines
  - conservation du patrimoine archéologique
  - ...

# Les sols — Un patrimoine menacé

## Une ressource non renouvelable

### Un patrimoine menacé par :

- le ruissellement et l'érosion
- la contamination
- l'imperméabilisation (constructions)
- le tassement
- la réduction de la biodiversité
- la salinisation

# Les sols — Un patrimoine menacé

## Une ressource non renouvelable

### Un patrimoine menacé par :

- le ruissellement et l'érosion
- la contamination
- l'imperméabilisation (constructions)
- le tassement
- la réduction de la biodiversité
- la salinisation

# Les sols — Un patrimoine menacé

## Une ressource non renouvelable

### Un patrimoine menacé par :

- le ruissellement et l'érosion
- la contamination
- l'imperméabilisation (constructions)
- le tassement
- la réduction de la biodiversité
- la salinisation

# Ruissellement et Érosion — Conséquences

## Un transfert de l'amont vers l'aval

### En amont : semis



[Source : Y. Le Bissonnais]



# Ruissellement et Érosion — Conséquences

**Un transfert de l'amont vers l'aval**

En amont : ravine



[Source : Y. Le Bissonnais]

# Ruissellement et Érosion — Conséquences

## Un transfert de l'amont vers l'aval

### En amont : perte de la ressource

- Diminution de l'épaisseur des sols
- Disparition de certaines fonctions

# Ruissellement et Érosion — Conséquences

## Un transfert de l'amont vers l'aval

### En aval : coulées boueuses



[Source : Pompiers 76]

# Ruissellement et Érosion — Conséquences

## Un transfert de l'amont vers l'aval

### En aval : pollution des eaux

- Turbidité
- Développement d'algues

# Ruissellement et Érosion — Lutte

## Le bassin versant : une notion clef



[Source : A. Couturier]

# Ruissellement et Érosion — lutte

## Ré-aménagement : bassin de rétention



[Source : DRAF 76]

# Ruissellement et Érosion — lutte

## Ré-aménagement : diguette



[Source : SmageAa]

# Ruissellement et Érosion — lutte

## Ré-aménagement : bande enherbée



[Source : EPTB]



# Ruissellement et Érosion — lutte

## Ré-aménagement : couvert



[Source : Y. Le Bissonais]

# Ruissellement et Érosion — Lutte

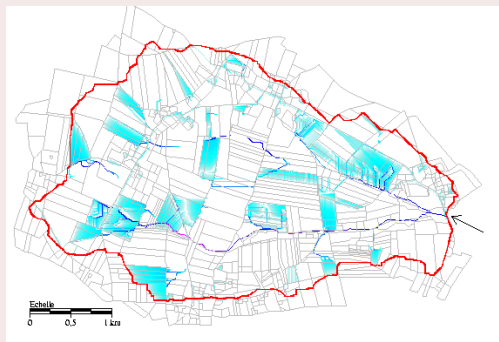
Mais où les localiser ?



[Source : A. Couturier]

# Ruissellement et Érosion — Simulation

## Logiciels d'aide à la décision : simulation du ruissellement



[Source : V. Souchère]

2 choses essentielles :

- Prévoir les zones sources
- Prévoir la localisation des écoulements

# Ruissellement et Érosion — Simulation

## Logiciels d'aide à la décision : simulation du ruissellement



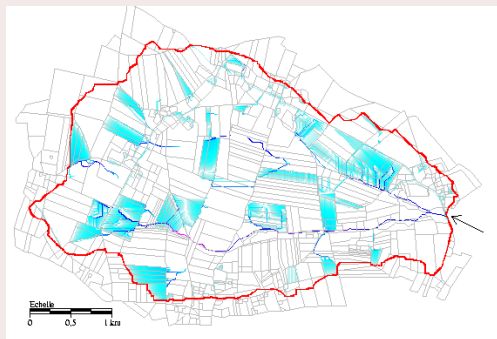
[Source : V. Souchère]

## 2 choses essentielles :

- Prévoir les zones sources
- Prévoir la localisation des écoulements

# Ruissellement et Érosion — Simulation

## Logiciels d'aide à la décision : simulation du ruissellement



[Source : V. Souchère]

## 2 choses essentielles :

- Prévoir les zones sources
- Prévoir la localisation des écoulements

# Ruissellement et Érosion — Processus

Dans un champ :



[Source : José Luis, univ. Austin TX]

# Ruissellement et Érosion — Processus

Dans un champ :



# Ruissellement et Érosion — Processus

2 objets peuvent contrôler la direction du ruissellement :

- topographie
- sillons

2 objets d'échelles et de formes très différentes



# Ruissellement et Érosion — Processus

2 objets peuvent contrôler la direction du ruissellement :

- topographie
- sillons

2 objets d'échelles et de formes très différentes

# Ruissellement et Érosion — Simulation

## Comment prendre en compte à *la fois* les sillons et la topographie ?

- Mesures avec une résolution de 1 cm x 1 cm ... sur quelques mètres-carrés.
- Dans les logiciels d'aide à la décision : résolution 10 m x 10 m

⇒ on ne peut y pas représenter explicitement les sillons.

Axe de progression :

prendre en compte les sillons sans "vraiment" les représenter.

# Ruissellement et Érosion — Simulation

Comment prendre en compte *à la fois* les sillons et la topographie ?

- Mesures avec une résolution de 1 cm x 1 cm ... sur quelques mètres-carrés.
- Dans les logiciels d'aide à la décision : résolution 10 m x 10 m

⇒ on ne peut y pas représenter explicitement les sillons.

Axe de progression :

prendre en compte les sillons sans "vraiment" les représenter.

# Ruissellement et Érosion — Simulation

Comment prendre en compte *à la fois* les sillons et la topographie ?

- Mesures avec une résolution de 1 cm x 1 cm ... sur quelques mètres-carrés.
- Dans les logiciels d'aide à la décision : résolution 10 m x 10 m

⇒ on ne peut y pas représenter explicitement les sillons.

Axe de progression :

prendre en compte les sillons sans "vraiment" les représenter.

# Ruissellement et Érosion — Simulation

Comment prendre en compte *à la fois* les sillons et la topographie ?

- Mesures avec une résolution de 1 cm x 1 cm ... sur quelques mètres-carrés.
- Dans les logiciels d'aide à la décision : résolution 10 m x 10 m

⇒ on ne peut y pas représenter explicitement les sillons.

Axe de progression :

prendre en compte les sillons sans "vraiment" les représenter.

# Ruissellement et Érosion — Simulation

Comment prendre en compte *à la fois* les sillons et la topographie ?

- Mesures avec une résolution de 1 cm x 1 cm ... sur quelques mètres-carrés.
- Dans les logiciels d'aide à la décision : résolution 10 m x 10 m

⇒ on ne peut y pas représenter explicitement les sillons.

Axe de progression :

prendre en compte les sillons sans "vraiment" les représenter.

# Ruissellement et Érosion — Simulation

Comment prendre en compte *à la fois* les sillons et la topographie ?

- Mesures avec une résolution de 1 cm x 1 cm ... sur quelques mètres-carrés.
- Dans les logiciels d'aide à la décision : résolution 10 m x 10 m

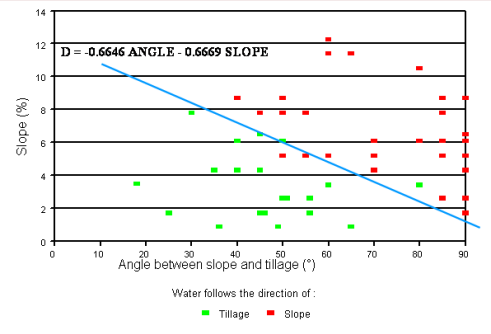
⇒ on ne peut y pas représenter explicitement les sillons.

**Axe de progression :**

prendre en compte les sillons sans "vraiment" les représenter.

# Ruissellement et Érosion — Terrain

## Travaux de terrain par V. Souchère (1998)

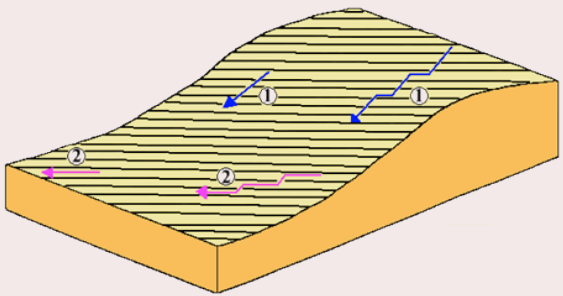


Fonction discriminante prédisant la direction du ruissellement selon la pente et l'angle entre sillons et pente



# Ruissellement et Érosion — Simulation

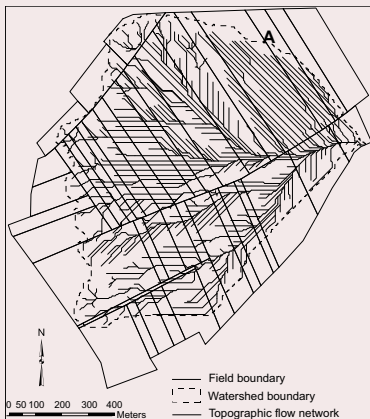
## Inclusion dans un logiciel : Comportement



# Ruissellement et Érosion — Simulation

## Inclusion dans un logiciel : validation

### Topographie seule



### Topographie et sillons



[Source : A. Couturier]

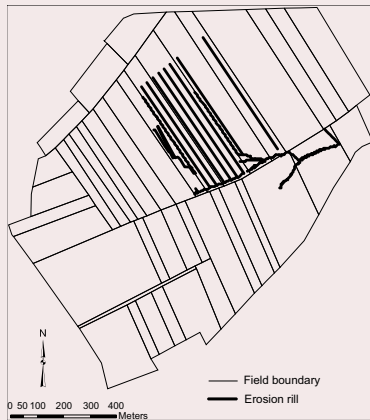
# Ruissellement et Érosion — Simulation

## Inclusion dans un logiciel : validation

### Topographie seule



### Réseau de rigoles

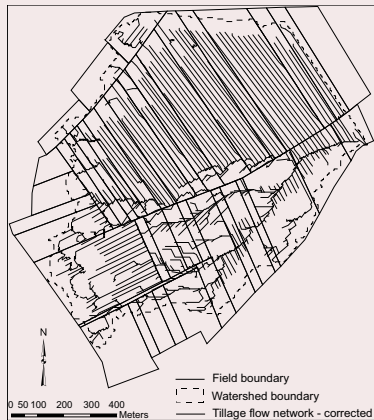


[Source : A. Couturier]

# Ruissellement et Érosion — Simulation

## Inclusion dans un logiciel : validation

### Topographie et sillons



### Réseau de rigoles



[Source : A. Couturier]

# Ruissellement et Érosion — Bilan et axe de progrès

## Bilan de la prise en compte des sillons

- Amélioration de la représentation du ruissellement
- Amélioration des capacités d'aide à la décision des logiciels

### Logiciels actuels :

- ne prennent pas en compte les hauteurs d'eau (pas de débordement en cours de pluie)
- uniquement basés sur "quelques" observations de terrain.

## Axe de progrès

- Ruissellement très difficilement mesurable  
⇒ Etudes de terrain n'offrent pas de marges de progression significatives.
- Faire appel aux mathématiques pour mieux comprendre l'interaction entre topographie et sillon

# Ruissellement et Érosion — Bilan et axe de progrès

## Bilan de la prise en compte des sillons

- Amélioration de la représentation du ruissellement
- Amélioration des capacités d'aide à la décision des logiciels

### Logiciels actuels :

- ne prennent pas en compte les hauteurs d'eau (pas de débordement en cours de pluie)
- uniquement basés sur "quelques" observations de terrain.

## Axe de progrès

- Ruissellement très difficilement mesurable  
⇒ Etudes de terrain n'offrent pas de marges de progression significatives.
- Faire appel aux mathématiques pour mieux comprendre l'interaction entre topographie et sillon

# Ruissellement et Érosion — Bilan et axe de progrès

## Bilan de la prise en compte des sillons

- Amélioration de la représentation du ruissellement
- Amélioration des capacités d'aide à la décision des logiciels

### Logiciels actuels :

- ne prennent pas en compte les hauteurs d'eau (pas de débordement en cours de pluie)
- uniquement basés sur "quelques" observations de terrain.

## Axe de progrès

- Ruissellement très difficilement mesurable  
⇒ Etudes de terrain n'offrent pas de marges de progression significatives.
- Faire appel aux mathématiques pour mieux comprendre l'interaction entre topographie et sillon

# Ruissellement et Érosion — Bilan et axe de progrès

## Bilan de la prise en compte des sillons

- Amélioration de la représentation du ruissellement
- Amélioration des capacités d'aide à la décision des logiciels

### Logiciels actuels :

- ne prennent pas en compte les hauteurs d'eau (pas de débordement en cours de pluie)
- uniquement basés sur "quelques" observations de terrain.

## Axe de progrès

- Ruissellement très difficilement mesurable  
⇒ Etudes de terrain n'offrent pas de marges de progression significatives.
- Faire appel aux mathématiques pour mieux comprendre l'interaction entre topographie et sillon



# Ruissellement et Érosion — Bilan et axe de progrès

## Bilan de la prise en compte des sillons

- Amélioration de la représentation du ruissellement
- Amélioration des capacités d'aide à la décision des logiciels

### Logiciels actuels :

- ne prennent pas en compte les hauteurs d'eau (pas de débordement en cours de pluie)
- uniquement basés sur "quelques" observations de terrain.

## Axe de progrès

- Ruissellement très difficilement mesurable  
⇒ Etudes de terrain n'offrent pas de marges de progression significatives.
- Faire appel aux mathématiques pour mieux comprendre l'interaction entre topographie et sillon

# Ruissellement et Érosion — Bilan et axe de progrès

## Bilan de la prise en compte des sillons

- Amélioration de la représentation du ruissellement
- Amélioration des capacités d'aide à la décision des logiciels

### Logiciels actuels :

- ne prennent pas en compte les hauteurs d'eau (pas de débordement en cours de pluie)
- uniquement basés sur "quelques" observations de terrain.

## Axe de progrès

- Ruissellement très difficilement mesurable  
⇒ Etudes de terrain n'offrent pas de marges de progression significatives.
- Faire appel aux mathématiques pour mieux comprendre l'interaction entre topographie et sillon

# Ruissellement et Érosion — Bilan et axe de progrès

## Bilan de la prise en compte des sillons

- Amélioration de la représentation du ruissellement
- Amélioration des capacités d'aide à la décision des logiciels

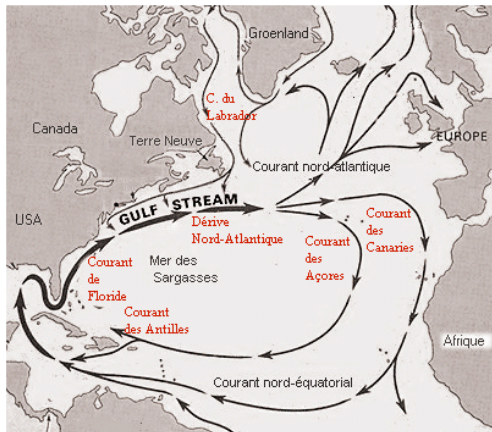
### Logiciels actuels :

- ne prennent pas en compte les hauteurs d'eau (pas de débordement en cours de pluie)
- uniquement basés sur "quelques" observations de terrain.

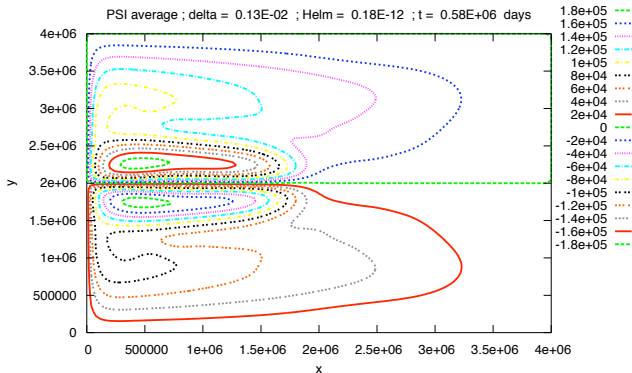
## Axe de progrès

- Ruissellement très difficilement mesurable  
⇒ Etudes de terrain n'offrent pas de marges de progression significatives.
- **Faire appel aux mathématiques pour mieux comprendre l'interaction entre topographie et sillon**

# Thèse en maths, appliquées aux océans



# Thèse en maths, appliquées aux océans

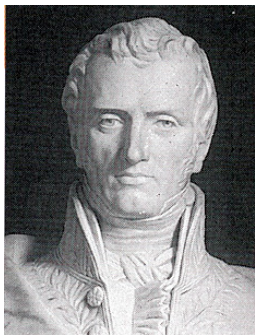


# Approche mathématique du problème

Equations de la mécanique des fluides = représentation mathématique du comportement physique des fluides.

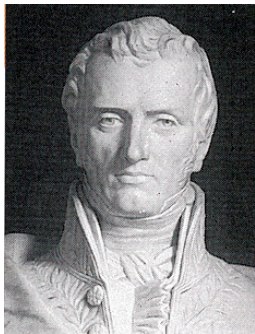
- Equations de Navier-Stokes
- Equations de Saint-Venant
- Problème des sillons sur des terrains agricoles
- Résolution numérique
- Programme informatique : logiciel FullSWOF\_2D
- Difficultés
- Un autre modèle

# Navier et Stokes

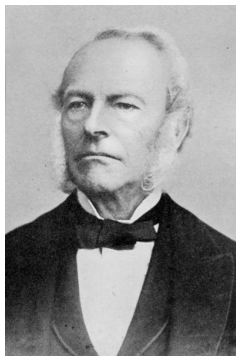


Claude Navier ■ ■ (1785-1831)  
Spécialiste de mécanique  
Equation correcte - méthode  
fausse (1821-1822)

# Navier et Stokes



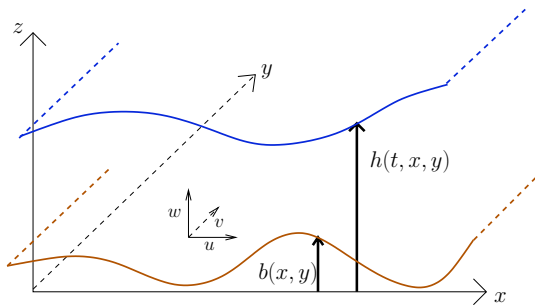
Claude Navier 🇫🇷 (1785-1831)  
Spécialiste de mécanique  
Equation correcte - méthode  
fausse (1821-1822)



George Stokes 🇬🇧 (1819-1903)  
Mathématicien et physicien  
Justification de l'équation



# Equations de Navier-Stokes



$\rho$  densité du fluide

$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$  vecteur vitesse

$\sigma$  tenseur des contraintes  
(dépend du type de fluide)

$f$  force extérieure

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla U \right) = \nabla \cdot \sigma + f$$



HYDRODYNAMIQUE. — *Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit; par M. DE SAINT-VENANT.*

« 1. Le Mémoire sur les *marées fluviales* de M. l'ingénieur des Ponts et Chaussées Partiot, qui vient d'être présenté à l'Académie, et dont j'ai inséré un Extrait au *Compte rendu* de la séance du 10 juillet 1871 (t. LXXIII, p. 91), contient une idée qui, étant complétée, et modifiée dans sa forme, me paraît pouvoir conduire à une solution, depuis longtemps désirée, du problème du mouvement non permanent des eaux dans les canaux découverts; ce qui comprend, outre les marées dont il est question, les *crues* des rivières, ainsi que le retrait de leurs eaux, temporairement gonflées par des pluies abondantes.

6. *Théorie et équations générales du mouvenant non permanent des eaux courantes.* — Cette théorie, dont le Mémoire que m'a communiqué M. Partiot m'a donné l'occasion de faire l'étude, peut être présentée d'une manière directe et générale, sans invoquer la formule de propagation des ondes ou des intumescences due à Lagrange.

Soit en effet, à l'époque du temps quelconque  $t$ , dans un canal ou une rivière :

U la vitesse moyenne des eaux à travers une section transversale  $\omega$ , dont  $s$  est l'abscisse, sensiblement horizontale, comptée à partir d'un endroit quelconque de son cours.

Le niveau de la surface fluide peut hausser ou baisser en chaque point

Égalant le produit de cette superficie par cette épaisseur, à  $\omega ds$ , réduisant et divisant par  $\Delta t ds$ , on obtient, pour la condition de continuité ou de conservation du volume,

$$(19) \quad \frac{d\omega}{dt} + \frac{d(\omega U)}{ds} = 0.$$

2<sup>e</sup> équation. Exprimons l'équilibre dynamique, pour le temps  $\Delta t$ , des quantités de mouvement de la même tranche, décomposées ou estimées dans une direction unique, en nous bornant à un canal à section rectangulaire de profondeur variable  $y$  et de largeur constante  $a$ , d'où  $\omega = ay$ .

Appelons, pour cette section  $\omega$  :

$\zeta$  l'ordonnée verticale de la superficie au-dessous d'un plan horizontal,

$\chi$  le périmètre mouillé,

$\rho$  la densité, ou  $\rho g$  le poids de l'unité de volume,

$\rho g F$  le frottement du fond par unité superficielle.

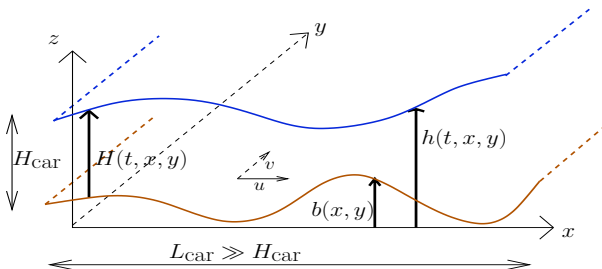
» Égalant la somme des trois premières quantités à la troisième, et divisant tout par  $\rho g \omega ds \Delta t$ , on a la deuxième équation

$$(20) \quad \frac{d\zeta}{ds} = \frac{1}{g} \frac{dU}{dt} + \frac{U}{g} \frac{dU}{ds} + \frac{\chi}{\omega} \frac{F}{\rho g}.$$

» On trouverait absolument la même chose en opérant les décompositions dans une autre direction, si elle était peu différente. En effet,

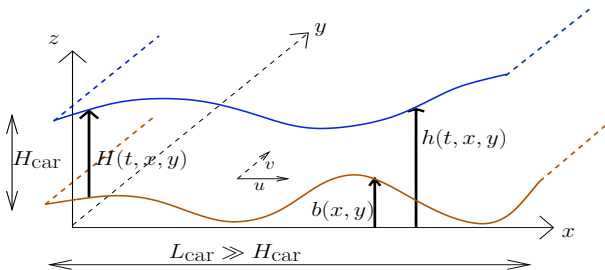
# Equations de Saint-Venant

Domaine dont la hauteur est petite par rapport à la longueur :



# Equations de Saint-Venant

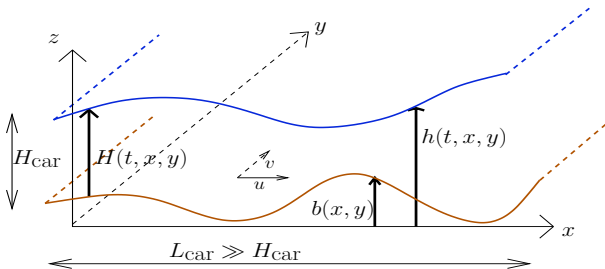
Domaine dont la hauteur est petite par rapport à la longueur :



on fait une **moyenne de la vitesse sur la hauteur d'eau**

# Equations de Saint-Venant

Domaine dont la hauteur est petite par rapport à la longueur :



on fait une **moyenne de la vitesse sur la hauteur d'eau**

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0, \quad \text{fluide homogène } (\rho \text{ constant}),$$

$$H \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -ku, \quad g \text{ gravité},$$

$$H \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} \right) = -kv, \quad k \text{ coeff. de frottement de fond.}$$

# Résultats mathématiques

inégalité d'énergie  
(équations multipliées par  $u$  et  $v$  resp.)  
inegalité d' "entropie" |  $\implies$  existence de solutions



# Résultats mathématiques

inégalité d'énergie  
(équations multipliées par  $u$  et  $v$  resp.)  
inegalité d' "entropie"  $\left| \right. \implies$  existence de solutions

au sens faible :

pour  $\phi$  fonction régulière,

$$\int_{\text{domaine}} \text{équation} \times \phi = 0.$$

# Résultats mathématiques

inégalité d'énergie  
(équations multipliées par  $u$  et  $v$  resp.)  
inegalité d' "entropie"  $\left| \right. \implies$  existence de solutions

au sens faible :

pour  $\phi$  fonction régulière,

$$\int_{\text{domaine}} \text{équation} \times \phi = 0.$$

Besoin de rajouter certains termes de viscosité ...

# Cas des sillons : équations de Saint-Venant ?



grandeurs caractéristiques : hauteur d'eau : qqes mm  $\rightarrow$  1 cm  
longueur du domaine : 1m



# Cas des sillons : équations de Saint-Venant ?



grandeurs caractéristiques : hauteur d'eau : qqes mm  $\rightarrow$  1 cm  
longueur du domaine : 1m

On va utiliser les équations de Saint-Venant.

???

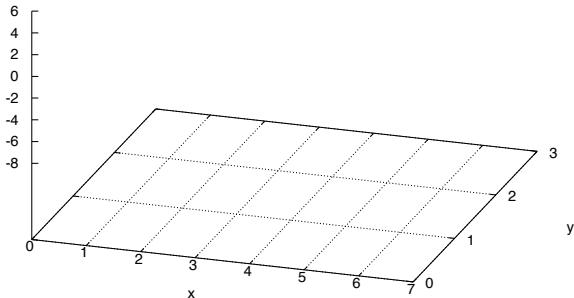
# Résolution numérique

Résolution exacte : impossible, équations trop complexes !

Résolution approchée

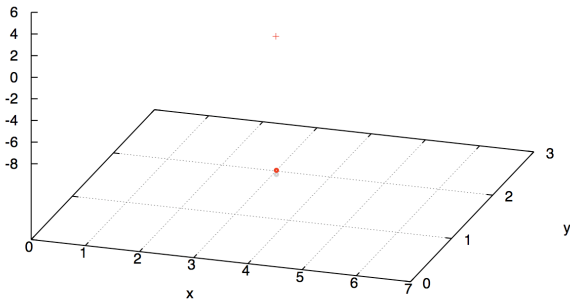
# Résolution numérique

Résolution exacte : impossible, équations trop complexes!  
Résolution approchée



# Résolution numérique

Résolution exacte : impossible, équations trop complexes !  
Résolution approchée

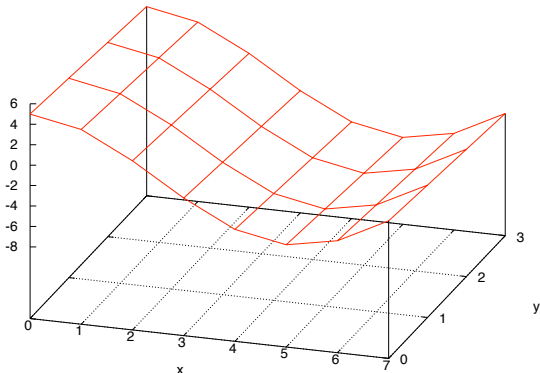




# Résolution numérique

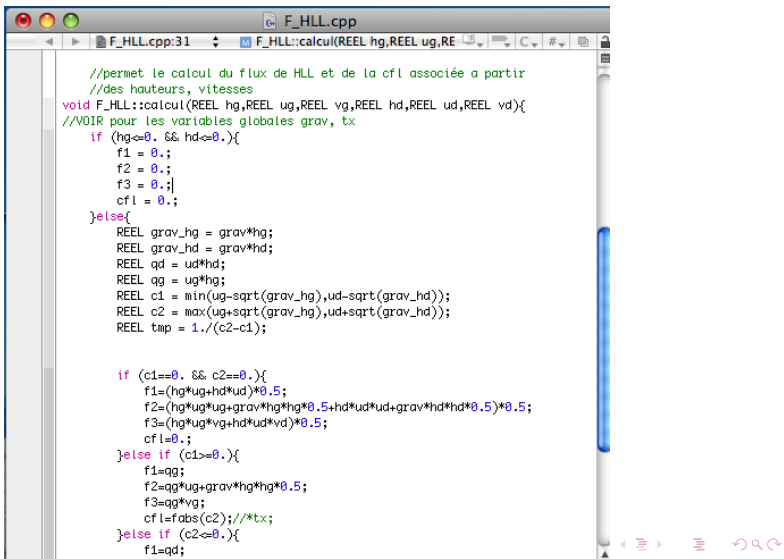
Résolution exacte : impossible, équations trop complexes !

Résolution **approchée**



# Code FullSWOF\_2D

Logiciel réalisé par *Olivier Delestre* (MAPMO) lors de sa thèse.



```
F_HLL.cpp:31 F_HLL::calcul(REEL hg,REEL ug,REEL vg,REEL hd,REEL ud,REEL vd){
//VOIR pour les variables globales grav, tx
if (hg<=0. && hd<=0.){
f1 = 0.;
f2 = 0.;
f3 = 0.;
cfl = 0.;
}else{
REEL grav_hg = grav*hg;
REEL grav_hd = grav*hd;
REEL qd = ud*hd;
REEL qg = ug*hg;
REEL c1 = min(ug-sqrt(grav_hg),ud-sqrt(grav_hd));
REEL c2 = max(ug+sqrt(grav_hg),ud+sqrt(grav_hd));
REEL tmp = 1./(c2-c1);

if (c1==0. && c2==0.){
f1=(hg*ug+hd*ud)*0.5;
f2=(hg*ug*ug+grav*hg*hg*0.5+hd*ud*ud+grav*hd*hd*0.5)*0.5;
f3=(hg*ug*vg+hd*ud*vd)*0.5;
cfl=0.;
}else if (c1>=0.){
f1=qg;
f2=qg*ug+grav*hg*hg*0.5;
f3=qg*vg;
cfl=fabs(c2);/**tx;
}else if (c2<=0.){
f1=qd;
```

# Code FullSWOF\_2D

Logiciel réalisé par *Olivier Delestre* (MAPMO) lors de sa thèse.

paramètres d'entrée :

- choix des paramètres de grille et de temps
- choix des méthodes numériques
- topographie (valeurs en chaque point de la grille)
- conditions sur les bords du domaine
- conditions initiales ( $t = 0$  pour tous les points de la grille)



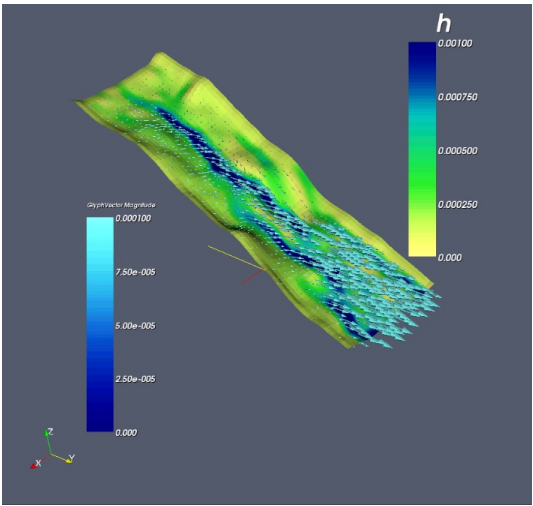
FullSWOF\_2D



sorties :

- hauteur d'eau  $H$
  - vitesse  $u$  et  $v$
- pour les instants choisis, en chaque point de grille.

# Code FullSWOF\_ 2D : résultats

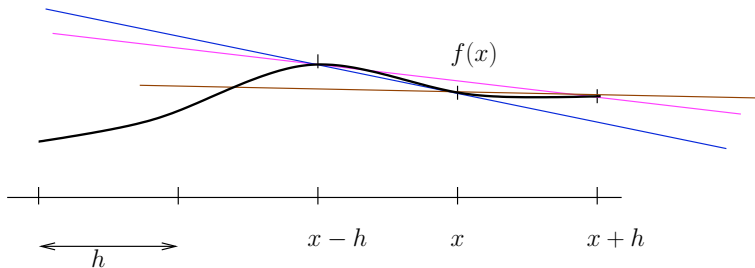


Mohammed El Bouajaji

# Difficultés numériques

Il existe plusieurs approximations pour une même quantité

$$\text{ex : } \frac{\partial f}{\partial x}(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \text{ ou } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ ou } \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$



⇒ plusieurs méthodes / schémas numériques.

# Difficultés numériques

Il existe plusieurs approximations pour une même quantité

$$\text{ex : } \frac{\partial f}{\partial x}(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \text{ ou } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ ou } \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

⇒ plusieurs méthodes / schémas numériques.

- certains schémas numériques ne conservent pas la positivité de la hauteur d'eau  $H$
- erreurs commises par les approximations des schémas numériques
- erreurs aggravées par les valeurs de la hauteur d'eau  $\approx$  mm

# Difficultés de modélisation

1/2

Modélisation = mise sous forme d'équations d'un phénomène physique (ou biologique, chimique)

Modélisation = mise sous forme d'équations d'un phénomène physique (ou biologique, chimique)

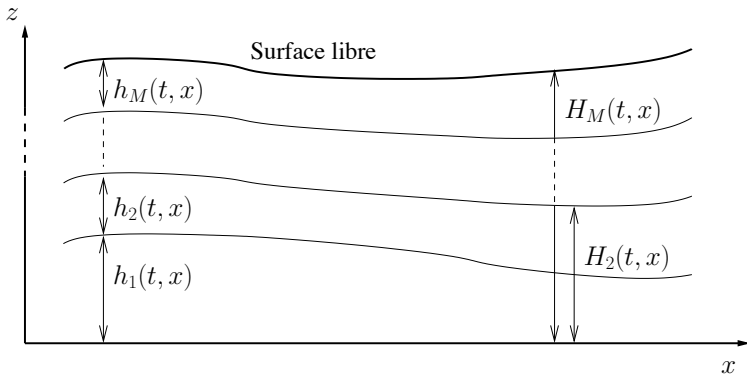
- valeurs des paramètres (ex : coeff. d'infiltration)
- modélisation du frottement de fond
- éq. de SV : approximation sur toute la colonne de fluide  $\implies$   
éq. de SV multicouches



## Difficultés de modélisation

2/2

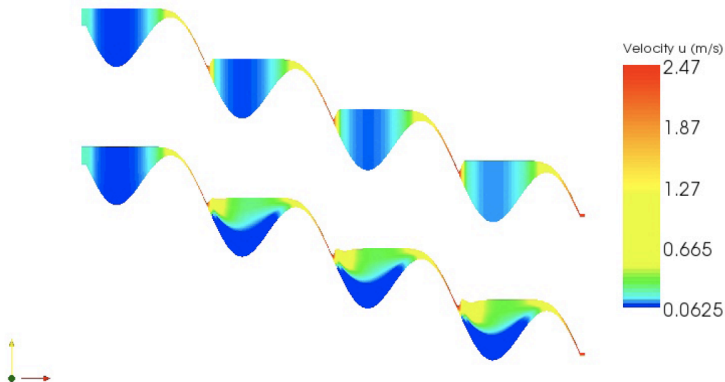
Saint-Venant multicouches : au lieu de considérer une seule couche uniforme, on décompose le domaine en **plusieurs couches**.



# Difficultés de modélisation

2/2

Saint-Venant multicouches : au lieu de considérer une seule couche uniforme, on décompose le domaine en **plusieurs couches**.

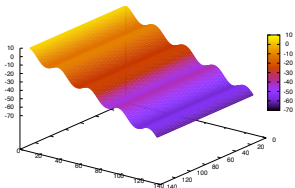
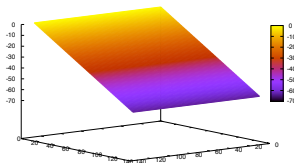


Vitesse de l'eau - 1 et 5 couches (E. Audusse, M.O. Bristeau, J. Sainte-Marie)

# Coeff de frottement anisotrope

1/2

Pb : on a une tôle ondulée avec des sillons et de l'eau qui s'écoule ;  
on veut remplacer la tôle par un plan,  
quel frottement au fond doit-on rajouter pour ralentir l'eau ?



+  
frottement  
qui ralentit  
l'écoulement

## Coeff de frottement anisotrope

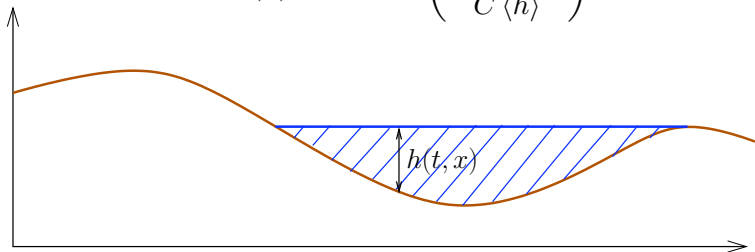
2/2

Travail effectué par *Ulrich Razafison* (MAPMO).

Dans l'équation  $H \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -ku$ ,

on ajoute un autre frottement de la forme  $K(h)hu$  où

$$K(h) = K_0 \exp \left( \frac{-h + \langle h \rangle}{C \langle h \rangle} \right),$$



## Coeff de frottement anisotrope

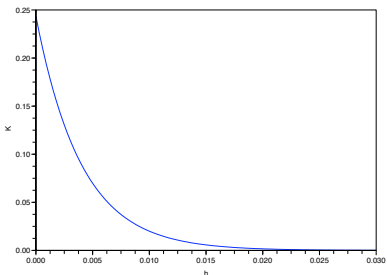
2/2

Travail effectué par *Ulrich Razafison* (MAPMO).

Dans l'équation  $H \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -ku$ ,

on ajoute un autre frottement de la forme  $K(h)hu$  où

$$K(h) = K_0 \exp \left( \frac{-h + \langle h \rangle}{C \langle h \rangle} \right),$$

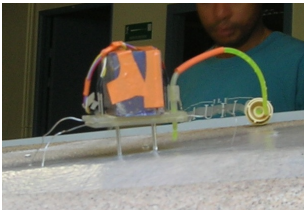


# L'hydrologie vue par une matheuse ... quelques surprises !

- expériences de labo : plages de valeur des paramètres à fixer à l'avance ... sans trop savoir

# L'hydrologie vue par une matheuse ... quelques surprises !

- expériences de labo : plages de valeur des paramètres à fixer à l'avance ... sans trop savoir
- utilisation de techniques " maison " : araignées et poivre cohabitent



# L'hydrologie vue par une matheuse ... quelques surprises !

- expériences de labo : plages de valeur des paramètres à fixer à l'avance ... sans trop savoir
- utilisation de techniques " maison " : araignées et poivre cohabitent
- problèmes techniques inattendus (configurations irréalisables à cause de la taille d'un appareil)



# L'hydrologie vue par une matheuse ... quelques surprises !

- expériences de labo : plages de valeur des paramètres à fixer à l'avance ... sans trop savoir
- utilisation de techniques " maison " : araignées et poivre cohabitent
- problèmes techniques inattendus (configurations irréalisables à cause de la taille d'un appareil)
- problèmes dus à la nature



# Différences — Modèles

- Modèle et modèle
- Termes sources
- Problèmes faciles et problèmes difficiles
  - Passage du 1D au 2D
  - Équation d'un sinussoïde inclinée

# Différences — Modèles

- **Modèle et modèle**
- Termes sources
- Problèmes faciles et problèmes difficiles
  - Passage du 1D au 2D
  - Équation d'un sinussoïde inclinée

# Différences — Modèles

- **Modèle et modèle**
- **Termes sources**
- Problèmes faciles et problèmes difficiles
  - Passage du 1D au 2D
  - Équation d'un sinussoïde inclinée

# Différences — Modèles

- Modèle et modèle
- Termes sources
- Problèmes faciles et problèmes difficiles
  - Passage du 1D au 2D
  - Équation d'un sinussoïde inclinée

## Différences — Modèles

- Modèle et modèle
- Termes sources
- Problèmes faciles et problèmes difficiles
  - Passage du 1D au 2D
  - Équation d'un sinusoïde inclinée

# Différences — Modèles

- Modèle et modèle
- Termes sources
- Problèmes faciles et problèmes difficiles
  - Passage du 1D au 2D
  - Équation d'un sinussoïde inclinée

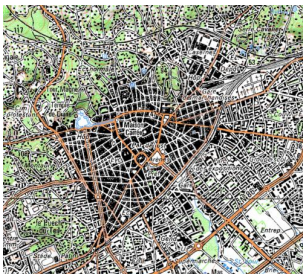






# Différences — Échelle

Quelle est la carte à grande échelle ?

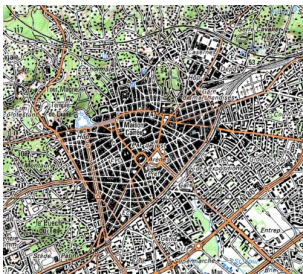


# Différences — Échelle

Quelle est la carte à grande échelle ?



$\frac{1}{200\ 000}$



$\frac{1}{25\ 000}$

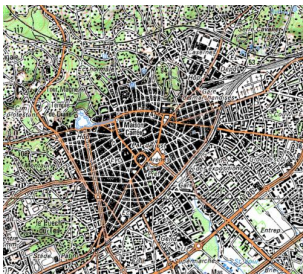
# Différences — Échelle

## Quelle est la carte à grande échelle ?



$\frac{1}{200\ 000}$

<



$\frac{1}{25\ 000}$

# Différences — Échelle

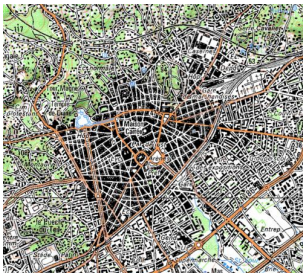
## Quelle est la carte à grande échelle ?



$\frac{1}{200\ 000}$

Petite échelle

<



$\frac{1}{25\ 000}$

Grande échelle

# Différences — Échelle

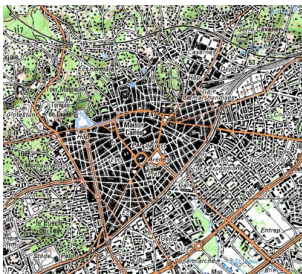
Quelle est la carte à grande échelle ?



$$\frac{1}{200\ 000}$$

Petite échelle

<



$$\frac{1}{25\ 000}$$

Grande échelle

C'est mathématique !

# Points communs

- programmation

- L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

```
\frame{\frametitle{Difficult\`es num\`eriques}
Il existe plusieurs approximations pour une m\^eme quantit\`e \\\[0.3cm]
ex :  $\frac{d}{dx} f(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$  ou  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  ou  $\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ 
\only<1>{\vspace{0.4cm}}
\includegraphics<1>[width=10cm]{deriv} \only<1>{\vspace{0.5cm}}
 $\implies$  plusieurs \textcolor{darkred}{m\`ethodes / sch\`emas num\`eriques}. \\\[0.5cm]
}
```

# Points communs

- programmation
- L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

```
\frame{\frametitle{Difficult\`es num\`eriques}
Il existe plusieurs approximations pour une m\^eme quantit\`e \\\[0.3cm]
ex :  $\frac{d}{dx} f(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$  ou  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  ou  $\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ 
\only<1>{\vspace{0.4cm}}
\includegraphics<1>[width=10cm]{deriv} \only<1>{\vspace{0.5cm}}
 $\implies$  plusieurs \textcolor{darkred}{m\`ethodes / sch\`emas num\`eriques}. \\\[0.5cm]
}
```



