



**HAL**  
open science

# EQUATION DE DIRAC-WEYL-FOCK LE LONG D' UN CHAMP CHRONOLOGIQUE

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. EQUATION DE DIRAC-WEYL-FOCK LE LONG D' UN CHAMP CHRONOLOGIQUE. 2014. hal-01002898v1

**HAL Id: hal-01002898**

**<https://hal.science/hal-01002898v1>**

Submitted on 6 Jun 2014 (v1), last revised 28 May 2015 (v8)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# EQUATION DE DIRAC-WEYL-FOCK LE LONG D'UN CHAMP CHRONOLOGIQUE

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. We shall to be quantified the  $(p, q)$ -tensors of the universe thanks to process  $\nabla^\gamma$ -quantification. This method can be generalized for all the states of a physical system. We give some results on the notion about the space-time which allows to go through parts of the universe where lives a chronological field. This foliation enable a generalization of the Schrödinger equation and the Dirac-Weyl-Fock equation.

## 1. LE PRINCIPE DE QUANTIFICATION

### I)Le principe de superposition

A chaque système physique de l'univers  $\Omega$  est associé un fibré  $\zeta = (E, \Omega, p, \mathcal{H})$  muni d'une connexion  $\nabla$  et de fibre hilbertienne. L'état du système est défini par une section locale du fibré  $\Gamma(\zeta)$ . Toute superposition linéaire d'états  $s = \sum_i c_i s_i$ , avec  $c_i$  appartenant à  $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$  et  $\sum_i |c_i|^2 \leq 1$  est un état accessible si les  $\{s_i(\omega)\}$  forment une base hilbertienne de  $E_\omega$  en chaque événement  $\omega$  de l'univers  $\Omega$ .

### II)La mesure des grandeurs physiques

a) L'évolution d'un système physique sur un ouvert  $U \subset \Omega$ , est la donnée d'une section hermitienne  $\Phi$  du fibré  $E^* \otimes E$  sur  $U$ .

b) Soit  $s(\omega)$  l'état dans lequel se trouve le système en  $\omega \in \Omega$  où on effectue la mesure, les seuls résultats possibles sont les valeurs propres  $\lambda_\alpha(\omega)$  de l'observable  $\Phi(\omega)$ .

c) Notons  $\hat{\mathcal{P}}_\alpha(\omega) : E_\omega \rightarrow E_\omega$ , le projecteur sur le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_\alpha(\omega)$ . La probabilité de trouver la valeur  $\lambda_\alpha(\omega)$  lors d'une mesure  $\Phi(\omega)$  est  $p_\alpha = \frac{\|s_\alpha(\omega)\|_\omega^2}{\|s(\omega)\|_\omega^2}$ , où  $s_\alpha(\omega) = \hat{\mathcal{P}}_\alpha(\omega)(s(\omega))$ .

d) Après une mesure en  $\omega$  donnant  $\lambda_\alpha(\omega)$ , le nouvel état du système est  $s_\alpha(\omega)$ .

### III)L'équation d'évolution

Si  $s$  est l'état d'un système, tant que le système n'est soumis à aucune observation,  $s$  vérifie l'équation d'évolution

$$\Phi(s) = \lambda s, \quad (1.1)$$

$\lambda$  est une fonction propre de  $\Phi$  définie localement sur  $U$ ,  $\Phi$  est l'opérateur d'évolution du système.

## 2. LA $\nabla^\gamma$ -QUANTIFICATION

Dans ce qui suit  $(E, \pi, \Omega, F)$  est un fibré vectoriel réel ou complexe de dimension finie, de fibre  $F$ , dont la base est l'univers  $\Omega$  qui est une  $C^\infty$ -variété de dimension

---

*Key words and phrases.* Champ chronologique, dérivée de Lie, section de Dirac, connexion.  
Remerciements à Guy Cherbit.

quatre. On note  $\Lambda^n \Omega = \wedge^n T^* \Omega$ , le fibré des  $n$ -formes différentielles sur  $\Omega$ . L'espace des  $(p, q)$ -tenseurs,  $p$  fois covariant et  $q$  fois contravariant, est noté

$$T^{p,q} \Omega = (\otimes^p T^* \Omega) \otimes (\otimes^q T \Omega), \quad (2.1)$$

et l'espace total  $E$  du fibré est l'espace des états, il est muni d'une connexion

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\Lambda^1 \Omega \otimes E). \quad (2.2)$$

**Definition 1.** 1) Une section  $\gamma$  du fibré  $L(\Lambda^1 \Omega \otimes E, E)$  est une section de Dirac du fibré des états  $E$ .

2) On définit la section  $\nabla^\gamma$  de  $\text{End}(E)$  par

$$\nabla^\gamma s = \gamma(\nabla s), \quad s \in \Gamma(E). \quad (2.3)$$

Les endomorphismes de Dirac sont définis par

$$\gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s), \quad d \in \Lambda^1 \Omega \text{ et } s \in \Gamma(E). \quad (2.4)$$

Le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac  $\{\gamma^{d^\mu}\}$  est

$$[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}] = \sum_{s \in \text{Perm}\{1,2,\dots,n\}} \varepsilon(s) \gamma^{d^{s(1)}} \circ \gamma^{d^{s(2)}} \circ \dots \circ \gamma^{d^{s(n-1)}} \circ \gamma^{d^{s(n)}}, \quad (2.5)$$

et l'anticommutateur ou crochet de Poisson est défini par,

$$\{\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}\} = \sum_{s \in \text{Perm}\{1,2,\dots,n\}} \gamma^{d^{s(1)}} \circ \gamma^{d^{s(2)}} \circ \dots \circ \gamma^{d^{s(n-1)}} \circ \gamma^{d^{s(n)}}. \quad (2.6)$$

Le commutateur définit une section de  $L(\Lambda^n \Omega \otimes E, E)$ . On définit l'extension de rang  $n$  d'une section  $\gamma$ , par la section  $\gamma_n \in \Gamma(L(\Lambda^n(\Omega) \otimes E, E))$  où

$$\gamma_n((d^1 \wedge d^2 \wedge \dots \wedge d^n) \otimes s) = [\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}](s), \quad (2.7)$$

et on prolonge  $\gamma_n$  par  $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ -linéarité sur  $\Lambda^n(\Omega) \otimes E$ .

Toute connexion sur  $\nabla$  a une extension  $d_n^\nabla : \Gamma(\Lambda^n(\Omega) \otimes E) \rightarrow \Gamma(\Lambda^{n+1}(\Omega) \otimes E)$  avec,  $d_0^\nabla = \nabla$ ,  $\Lambda^0(\Omega) \otimes E = E$  et  $d_n^\nabla(\psi \otimes s) = d\psi \otimes s + (-1)^n \psi \wedge \nabla s$ ,  $\psi \in \Lambda^n(\Omega)$ . L'équation de Dirac-Einstein au rang  $n$  s'écrit

$$\gamma_n(\nabla_{n-1} s) = \lambda s, \quad (2.8)$$

avec  $\nabla_{n-1} = d_{n-1}^\nabla \circ \dots \circ d_0^\nabla$ .

**Definition 2.** Une équation d'évolution d'ordre  $n$ , des états du fibré  $E$  sur un ouvert  $U \subset \Omega$ , est une équation de la forme 2.8. On note  $E(\nabla, \gamma, \lambda, n)$  cette équation.

Pour un "local frame" sur  $E(U)$ , les matrices associées  $\gamma^d$  sont les matrices de Dirac. Si l'équation d'évolution d'un système quantique est  $\Phi = \gamma_n \circ \nabla_{n-1}$ , le principe de quantification devient le principe de  $\nabla^\gamma$ -quantification au rang  $n$ .

**Example 1.** L'équation  $E(\nabla, \gamma, \lambda, 1)$  est une équation d'évolution qui généralise l'équation de Dirac dans les espaces courbes [1] lorsque l'on pose,  $\lambda = -i \frac{mc}{\hbar}$ . Le fibré  $E$  est l'un des deux fibrés  $E = \Omega \times \mathbb{C}^4$  ou  $E = T_{\mathbb{C}} \Omega$  et les endomorphismes de Dirac  $\gamma^\mu = \gamma(d^\mu)$  dans la base duale  $\{d^\mu\}$  de  $\{\partial_\mu\}$ , vérifient la relation d'anticommutation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4, \quad (2.9)$$

avec  $(g_{\mu\nu})$  est la matrice de la métrique de Lorentz  $g$  sur  $\Omega$  dans la base  $\{\partial_\mu\}$ .

**Definition 3.** Une équation relativiste quantique est une équation qui lie la connexion  $\nabla$  à la section de Dirac  $\gamma$ . Une relation de ce type sera notée  $R(\nabla, \gamma)$ . Si cette équation dépend de l'équation d'évolution  $E(\nabla, \gamma, \lambda, n)$ , on note  $R(\nabla, \gamma, \lambda, n)$ .

Dans le cas des champs l'équation relativiste  $R(\nabla, \gamma)$  a été établie dans l'équation 4.7 et 4.11. L'équation d'évolution  $E(\nabla, \gamma, \lambda, 1)$  a été démontrée en 3.26. Pour généraliser cette équation à tous les états de l'univers, il faut déterminer un tenseur qui joue un rôle analogue au tenseur de Ricci pour la connexion  $\nabla$  définie sur le fibré des états  $E$ .

### 3. REPRÉSENTATION DANS DES CARTES DE TRIVIALISATION DES FIBRÉS

Dans ce qui suit,  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  une carte de l'ouvert  $U$  de l'univers  $\Omega$ , sur laquelle les fibrés  $T\Omega$  et  $E$  sont trivialisables. Soit  $\{\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, 1 \leq \mu \leq 4\}$  les champs de vecteurs sur  $U$  linéairement indépendants associés et  $\{d^\nu = dx^\nu, 1 \leq \nu \leq 4\}$  la base duale. Sur  $E(U)$  il existe un "local frame", noté:  $\{e_\alpha, 1 \leq \alpha \leq n\}$ ,  $n = \dim E$ .

3.0.1. *Écriture locale de l'équation de Dirac-Einstein  $E(\nabla, \gamma, \lambda, 1)$ .* Soit  $s = s^\alpha e_\alpha$  alors  $\nabla s = \nabla(s^\alpha e_\alpha) = ds^\alpha \otimes e_\alpha + s^\alpha \nabla e_\alpha = ds^\alpha \otimes e_\alpha + s^\alpha \Gamma_{\alpha j}^\beta d^j \otimes e_\beta$ . Sur  $U$  la connexion peut s'écrire localement

$$\nabla e_\alpha = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes e_\beta, \quad (3.1)$$

avec des  $C^\infty$  fonctions  $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$  sur  $U$  à valeurs complexes ou réelles,  $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta$  sont les symboles de Christoffel associés à la connexion  $\nabla$ . On a,  $ds^\alpha = \partial_\nu s^\alpha d^\nu$  et  $\nabla s = \partial_\nu s^\alpha d^\nu \otimes e_\alpha + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta d^\nu \otimes e_\beta = (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \otimes e_\beta$ . La section de Dirac  $\gamma$  de  $E$  a pour représentation

$$\gamma(d^\nu \otimes e_\beta) = \gamma_\beta^{\nu\sigma} e_\sigma, \quad (3.2)$$

et si  $\gamma^\nu = \gamma(d^\nu)$  alors  $(\gamma^\nu)_\beta^\alpha = \gamma_\beta^{\nu\alpha}$ .

$$\nabla \gamma s = \gamma((\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) d^\nu \otimes e_\beta) = (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \gamma(d^\nu \otimes e_\beta)$$

$\nabla \gamma s = \gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) e_\sigma$ . L'équation de Dirac-Einstein  $E(\nabla, \gamma, \lambda, 1)$  s'écrit localement,

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) = \lambda s^\sigma \text{ pour tout } \sigma, 1 \leq \sigma \leq n. \quad (3.3)$$

Les matrices de Dirac  $\gamma^\mu$ ,  $1 \leq \mu \leq 4$ , sont des matrices carrées d'ordre  $n$  dont les coefficients sont des applications  $C^\infty$  sur  $U$ , à valeurs réelles ou complexes. On note

$$(D_\nu s)^\beta = \partial_\nu s^\beta + s^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta, \quad (3.4)$$

$D_\nu$  est la section locale de  $\text{End}(E)$  définie par,  $D_\nu = L_\nu + \Gamma_\nu$ , où  $\Gamma_\nu$  est la section locale de  $\text{End}(E)$  dont la matrice, dans le "local frame", est  $(\Gamma_\nu)_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$  et  $L_\nu$  est la dérivée de Lie le long du champ  $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  avec,  $L_\nu s = (\partial_\nu s^\alpha) e_\alpha$ .

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (D_\nu s)^\beta = \lambda s^\sigma \text{ pour tout } \sigma, 1 \leq \sigma \leq n. \quad (3.5)$$

L'équation précédente s'écrit

$$\gamma^\nu D_\nu (s) = \lambda s, \quad (3.6)$$

et l'opérateur de l'équation d'évolution est,

$$\Phi = \gamma^\nu D_\nu. \quad (3.7)$$

On a une équation d'évolution au sens de la  $\nabla^\gamma$ -quantification si  $\Phi$  est une section localement hermitienne.

**Definition 4.**  $\Phi$  est l'opérateur de l'équation d'évolution du premier ordre des états.

L'application aux champs est immédiate si on pose  $E = T_{\mathbb{C}}\Omega$ , l'équation d'évolution des champs

$$\gamma^\nu D_\nu X = \lambda X, \quad (3.8)$$

$\lambda \in \text{Spec}_U(\Phi)$  et  $D_\nu = L_\nu + \Gamma_\nu$ . Les valeurs propres sont proportionnelles aux masses des particules (6.2).

Le principe de quantification des champs s'énonce ainsi:

"Si aucune mesure n'est faite dans la carte  $U$ , le champ  $X$  évolue suivant l'équation  $\Phi X = \lambda X$ , où  $\lambda \in \text{Spec}_U(\Phi)$ . Le champ  $X$  est un champ propre de l'opérateur d'évolution  $\Phi$ . Si une mesure en  $\omega \in U \subset \Omega$  est  $a = a(\omega)$ , alors  $a$  est une valeur propre de  $\Phi(\omega)$ . Le champ prend la valeur  $X_a(\omega)$  où  $X_a(\omega) = \hat{\mathcal{P}}_a(\omega)(X(\omega))$ ,  $\hat{\mathcal{P}}_a(\omega)$  est le projecteur sur le sous-espace propre associé à la valeur propre  $a$ . La probabilité de trouver la valeur  $a$  lors de la mesure est

$$p_a = \frac{\|X_a(\omega)\|_\omega^2}{\|X(\omega)\|_\omega^2}, \quad (3.9)$$

et l'équation d'évolution du champ est  $\Phi X = \lambda X$  pour un  $\lambda \in \text{Spec}_U(\Phi)$ , vérifiant  $\lambda(\omega) = a$  et un champ  $X(\omega) = X_a(\omega)$ ."

On a donc fixé en l'évènement  $\omega$ , de nouvelles conditions à l'évolution du système. On a perturbé l'évolution du champ  $X$  en faisant une mesure sur ce champ.

3.0.2. *Quantification des métriques.* A partir d'une connexion  $\nabla$  sur les champs, on peut étendre l'endomorphisme  $\nabla_X$  aux tenseurs de façon unique avec deux conditions sur  $\nabla_X$ ,  $\nabla_X$  commute avec les contractions, c'est-à-dire,  $\nabla_X(c(S)) = c(\nabla_X(S))$  et  $\nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X(S) \otimes T + S \otimes \nabla_X(T)$ .

La connexion sur les  $(2,0)$ -tenseurs est définie à partir de la connexion initiale  $\nabla$  sur les champs en posant,  $\nabla(d^1 \otimes d^2) = \nabla(d^1) \otimes d^2 + d^1 \otimes \nabla(d^2)$  et si on se restreint aux sections définies sur une carte  $U$  de l'univers, dans la base  $\{\partial_\mu\}$ , l'isomorphisme de dualisation,  $\Theta(d^\mu) = \partial_\mu$  permet de définir la connexion duale, notée encore  $\nabla_X(d)$ , par

$$\nabla_X(d) = \Theta^{-1} \nabla_X \Theta(d). \quad (3.10)$$

On peut étendre cette connexion sur l'ensemble de l'univers  $\Omega$ , en prenant un recouvrement localement fini par des cartes  $\{U\}$  et une partition de l'unité  $\{\varphi^U\}$  subordonnée à ce recouvrement,  $\varphi^U \nabla_U$  est la connexion cherchée, c'est la connexion duale sur  $U$ . En particulier,

$$\nabla_{\partial_\beta}(d^\sigma) = \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma*} d^\mu = \Theta^{-1} \nabla_{\partial_\beta} \Theta(d^\sigma) \quad (3.11)$$

$$\nabla_{\partial_\beta}(d^\sigma) = \Theta^{-1} \nabla_{\partial_\beta}(\partial_\sigma) = \Theta^{-1} \left( \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \partial_\mu \right) = \Gamma_{\sigma\beta}^\mu d^\mu \text{ et } \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma*} = \Gamma_{\sigma\beta}^\mu, \quad (3.12)$$

$$\nabla_{\partial_\beta}(d^\sigma \otimes d^\tau) = \nabla(d^\sigma \otimes d^\tau)(\partial_\beta) = (\Gamma_{\rho\gamma\delta}^{\sigma\tau} d^\rho \otimes d^\gamma \otimes d^\delta)(\partial_\beta) \quad (3.13)$$

$$\nabla_{\partial_\beta}(d^\sigma \otimes d^\tau) = \Gamma_{\rho\gamma\delta}^{\sigma\tau} d^\rho(\partial_\beta) d^\gamma \otimes d^\delta = \Gamma_{\beta\gamma\delta}^{\sigma\tau} d^\gamma \otimes d^\delta. \quad (3.14)$$

$$\nabla_{\partial_\beta}(d^\sigma \otimes d^\tau) = \Gamma_{\beta\theta}^{\sigma*} d^\theta \otimes d^\tau + \Gamma_{\beta\theta}^{\tau*} d^\sigma \otimes d^\theta = \Gamma_{\beta\sigma}^\theta d^\theta \otimes d^\tau + \Gamma_{\beta\tau}^\theta d^\sigma \otimes d^\theta, \quad (3.15)$$

$$\nabla_{\partial_\beta} (d^\sigma \otimes d^\tau) = \left( \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma \delta_\nu^\tau + \Gamma_{\beta\tau}^\nu \delta_\gamma^\sigma \right) d^\gamma \otimes d^\nu, \quad (3.16)$$

et,

$$\Gamma_{\beta\gamma\nu}^{\sigma\tau} = \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma \delta_\nu^\tau + \Gamma_{\beta\tau}^\nu \delta_\gamma^\sigma, \quad (3.17)$$

$\delta_\nu^\tau$  et  $\delta_\gamma^\sigma$  sont les symboles de Kronecker.

Il y a une façon naturelle de décrire les endomorphismes de Dirac sur les  $(2, 0)$ -tenseurs, si  $\gamma$  est une section de Dirac du fibré des champs, c'est également une section du fibré dual

$$\gamma \in \Gamma (T\Omega \otimes T^*\Omega \otimes T\Omega) \approx \Gamma (T\Omega \otimes T\Omega \otimes T^*\Omega) \quad (3.18)$$

et,

$$\gamma \in \Gamma (\mathbb{L} (\Lambda^1\Omega, \text{End} (T\Omega))) \approx \Gamma (\mathbb{L} (\Lambda^1\Omega, \text{End} (\Lambda^1\Omega))). \quad (3.19)$$

On a

$$(\gamma^d)^* (\zeta) = \zeta \circ \gamma^d, \quad \zeta \text{ et } d \in \Lambda^1\Omega. \quad (3.20)$$

Ensuite, pour obtenir la section de Dirac sur les  $(2, 0)$ -tenseurs, on pose

$$[\gamma^d] = (\gamma^d)^* \otimes (\gamma^d)^*. \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu] (d^\nu \otimes d^\tau) &= \gamma_{\rho\sigma}^{\mu\nu\tau} d^\rho \otimes d^\sigma = (\gamma^\mu)^* (d^\nu) \otimes (\gamma^\mu)^* (d^\tau), \\ (\gamma^\mu)^* (d^\nu) (\partial_\rho) &= d^\nu \circ \gamma^\mu (\partial_\rho) = d^\nu (\gamma_\rho^{\mu\sigma} \partial_\sigma) = \gamma_\rho^{\mu\nu} \text{ et } (\gamma^\mu)^* (d^\nu) = \gamma_\rho^{\mu\nu} d^\rho, \\ [\gamma^\mu] (d^\nu \otimes d^\tau) &= \gamma_\rho^{\mu\nu} \gamma_\sigma^{\mu\tau} d^\rho \otimes d^\sigma, \text{ il suit} \end{aligned}$$

$$\gamma_{\rho\sigma}^{\mu\nu\tau} = \gamma_\rho^{\mu\nu} \gamma_\sigma^{\mu\tau}. \quad (3.22)$$

On remplace les résultats précédents dans l'équation,

$$\gamma_{\rho\sigma}^{\mu\nu\tau} (\partial_\mu a_{\nu\tau} + a_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu\tau}^{\alpha\beta}) = \lambda a_{\rho\sigma}, \quad (3.23)$$

on obtient

$$\gamma_\rho^{\mu\nu} \gamma_\sigma^{\mu\tau} (\partial_\mu a_{\nu\tau} + a_{\alpha\beta} (\Gamma_{\mu\alpha}^\nu \delta_\tau^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\tau \delta_\alpha^\nu)) = \lambda a_{\rho\sigma}, \quad (3.24)$$

$$\gamma_\rho^{\mu\nu} \gamma_\sigma^{\mu\tau} (\partial_\mu a_{\nu\tau} + a_{\alpha\tau} \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + a_{\nu\beta} \Gamma_{\mu\beta}^\tau) = \lambda a_{\rho\sigma} \quad (3.25)$$

L'écriture matricielle de l'équation est

$$\text{tr} \gamma^\mu (\mathbb{L}_\mu A + \Gamma_\mu A + A^{\text{tr}} \Gamma_\mu) \gamma^\mu = \lambda A, \quad (3.26)$$

$\gamma^\mu = \left( (\gamma^\mu)^\nu_\rho \right)$  avec,  $(\gamma^\mu)^\nu_\rho = \gamma_\rho^{\mu\nu}$ ,  $(\mathbb{L}_\mu A)^\nu_\tau = \partial_\mu a_{\nu\tau}$ ,  $(A)^\alpha_\beta = a_{\alpha\beta}$ ,  $(\Gamma_\nu)^\beta_\alpha = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$  et  $\text{tr} \gamma^\mu$ ,  $\text{tr} \Gamma_\mu$  sont les transposées des matrices  $\gamma^\mu$  et  $\Gamma_\mu$ .

**Theorem 1.** Si une pseudo-métrique riemannienne  $g$  suit une équation d'évolution de Dirac-Einstein alors dans toute carte  $U$  sa matrice  $G = (g_{ij})$  vérifie l'équation

$$\text{tr} \gamma^\mu (\mathbb{L}_\mu G + \Gamma_\mu G + \text{tr} (\Gamma_\mu G)) \gamma^\mu = \lambda G, \quad (3.27)$$

où  $\Gamma_\mu$ , avec  $(\Gamma_\mu)^\beta_\alpha = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ , sont les matrices de Christoffel de la connexion et  $\gamma^\mu = \gamma(d^\mu)$  sont les matrices de Dirac associées à l'équation d'évolution. L'opérateur d'évolution est noté  $\Delta$ ,

$$\Delta(g)(X, Y) = \text{tr} (\gamma^\mu \mathbf{X}) (\mathbb{L}_\mu G + \Gamma_\mu G + \text{tr} (\Gamma_\mu G)) \gamma^\mu \mathbf{Y}, \quad (3.28)$$

où  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sont les matrices unicolonnes associées aux champs  $X$  et  $Y$  dans la base  $\{\partial_\mu\}$ .

## 4. EQUATION RELATIVISTE QUANTIQUE

On rappelle que l'équation relativiste quantique est l'équation qui lie la connexion  $\nabla$  à la section de Dirac  $\gamma$  définie sur les états. On part du principe physique que tout système physique peut être quantifié par le procédé de quantification énoncé plus haut. L'équation relativiste d'Einstein est obtenue pour une connexion  $\nabla$  qui est la connexion de Levi-Civita d'une métrique  $g$ . La connexion  $\nabla$  ne permet pas, en général, de définir une métrique sur l'univers  $\Omega$ , il faut donc trouver un tenseur qui joue le rôle du tenseur métrique. La section de Dirac  $\gamma$  nous permet de construire ce tenseur si le fibré est  $E = T_{\mathbb{C}}\Omega$ .

**Definition 5.** *Le tenseur de Poisson  $\gamma^{\alpha\beta}$  est défini par,*

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{8} \text{Trace} (\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\}) = \frac{1}{4} \text{Trace} (\gamma^\alpha \gamma^\beta). \quad (4.1)$$

**Remark 1.** *Lorsque  $\gamma^{\alpha\beta}$  est régulier,  $\gamma_{\alpha\beta}$  joue le rôle d'un tenseur métrique. Le tenseur de Poisson mesure l'anticommutativité des endomorphismes de Dirac.*

Pour le tenseur de courbure les notations standards sont,

$$R^\nabla (X, Y) (Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (4.2)$$

$$R^\nabla (\partial_\alpha, \partial_\beta) (\partial_\sigma) = \nabla_{\partial_\alpha} \nabla_{\partial_\beta} \partial_\sigma - \nabla_{\partial_\beta} \nabla_{\partial_\alpha} \partial_\sigma = R^\mu_{\sigma\beta\alpha} \partial_\mu, \quad (4.3)$$

et le tenseur de Ricci s'écrit

$$\text{Ric}_{\alpha\beta} = R^\nu_{\alpha\nu\beta}. \quad (4.4)$$

La courbure scalaire de  $\nabla$  est,

$$R = \gamma^{\alpha\beta} \text{Ric}_{\alpha\beta}. \quad (4.5)$$

**Theorem 2.** *Si le tenseur de Poisson est régulier, l'équation relativiste d'Einstein est*

$$\text{Ric}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R \gamma_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad (4.6)$$

avec  $T_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}$ ,  $T^{\alpha\beta}$  est le tenseur énergie-impulsion. Si le tenseur de Poisson n'est pas régulier

$$\text{Ric}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R \gamma^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}, \quad \text{Ric}^{\alpha\beta} = \text{Ric}_{hk} \gamma^{h\alpha} \gamma^{k\beta}. \quad (4.7)$$

L'équation d'évolution des champs est donnée par

$$\Phi X = \lambda X, \quad (4.8)$$

et l'équation d'évolution des métriques

$$\Delta g = \lambda g. \quad (4.9)$$

*Proof.* On contracte deux fois l'équation relativiste d'Einstein et on utilise l'égalité fondamentale 2.9 car dans le cas de l'existence d'une métrique  $g$  on a,  $g^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta}$ . Les équations d'évolution ont été démontrées plus haut.  $\square$

Tout  $(p, q)$ -tenseur évolue suivant une équation  $E(\nabla, \gamma, \lambda, 1)$  où  $\nabla$  est l'unique extension à  $T^{p,q}\Omega$  de la connexion initiale  $\nabla$  sur les champs et  $\gamma$  est l'unique extension à  $T^{p,q}\Omega$  de la section  $\gamma$  de Dirac des champs. L'équation relativiste quantique associée est,

$$\text{Ric}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R \gamma^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}. \quad (4.10)$$

La quantification d'ordre  $n \geq 1$  est donnée par l'équation d'évolution  $E(\nabla, \gamma, \lambda, n)$ . On peut généraliser ce procédé de quantification à tous les fibrés hermitiens et établir les équations d'évolution  $E(\nabla, \gamma, \lambda, n)$  dans une carte, la seule difficulté est la généralisation de la notion de tenseur de Ricci dans un fibré quelconque. Si cette construction est possible on pourra définir à chaque équation d'évolution d'un état de l'univers une équation relativiste liant la connexion  $\nabla$  à la section de Dirac  $\gamma$  du fibré. Le choix de la connexion  $\nabla$  est imposé, naturellement, par la nature hermitienne du fibré des états  $E$ .

On généralise l'équation quantique relativiste d'Einstein en introduisant la constante cosmologique  $\Lambda_0$  dans cette équation,

$$Ric^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R\gamma^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta} + \Lambda_0\gamma^{\alpha\beta}. \quad (4.11)$$

On retombe sur l'équation générale d'Einstein lorsque le tenseur de Poisson  $\gamma^{\alpha\beta}$  s'identifie à  $g^{\alpha\beta}$ .

**Remark 2.** *L'équation d'évolution de Dirac-Einstein peut être définie à partir d'une connexion de Koszul sans l'apport d'une métrique de Lorentz et la section de Dirac est une solution de l'équation quantique relativiste définie par cette connexion.*

## 5. FEUILLETAGE EN ESPACE-TEMPS DES PARTIES DE L'UNIVERS

Dans tout ce qui suit, on se place sur une partie  $\Omega$  de l'univers sur laquelle aucune mesure n'est faite sur la métrique  $g$ . On suppose que  $\Omega$  est une variété Lorentzienne, connexe, orientée en temps, c'est-à-dire, qu'il existe au moins un champ  $T : \Omega \rightarrow T\Omega$  de genre temps  $\forall \omega \in \Omega, g(\omega)(T(\omega), T(\omega)) < 0$ . Pour l'espace-temps de Minkowski  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ ,  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$  et le champ  $T = \frac{\partial}{\partial t}$  donne l'orientation du temps.

Soit  $T_\omega = \mathbb{R}T(\omega)$ , le sous-espace vectoriel de dimension 1, engendré par le vecteur  $T(\omega) \in T_\omega(\Omega)$ . Ce sous-espace est non isotrope pour la forme bilinéaire  $g(\omega)$  sur  $T_\omega(\Omega)$  et scinde  $T_\omega(\Omega)$  en une somme orthogonale unique  $T_\omega(\Omega) = T_\omega \oplus E_\omega$ , où  $E_\omega = T_\omega^\perp$ . Les restrictions  $g(\omega)|_{E_\omega}$  et  $-g(\omega)|_{T_\omega}$  sont définies positives. Tout champ  $X : \Omega \rightarrow T(\Omega)$  se décompose en  $X = X_E - tT$ , où  $t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une  $C^\infty$ -application,  $X_E$  est un champ espace, c'est-à-dire,  $X_E(\omega) \in E_\omega$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . En particulier,  $|X_E(\omega)|_g^2 = g(\omega)(X_E(\omega), X_E(\omega)) > 0$  si  $X_E(\omega) \neq o_{T_\omega(\Omega)}$ .

**Definition 6.** *Un champ  $X$  est orienté vers le  $T$ -futur si  $X = X_E - tT$ , avec  $t > 0$  et vers le  $T$ -passé si  $t < 0$ .*

La partie espace de l'espace tangent est  $\mathcal{E}\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times E_\omega$  et la partie chronologique est  $\mathcal{T}\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times T_\omega$ .

**Lemma 1.** 
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times E_\omega & & \mathcal{T}\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times T_\omega \\ \downarrow \pi_{\mathcal{E}} & \text{et} & \downarrow \pi_{\mathcal{T}} \\ \Omega & & \Omega \end{array}$$
 sont des fibrés. Le

fibré chronologique est trivial et  $T\Omega$  est la somme de Whitney de ces deux fibrés,  $T\Omega = \mathcal{E}\Omega \oplus \mathcal{T}\Omega$ .

*Proof.* Il suffit de montrer que 
$$\begin{array}{c} \mathcal{E}\Omega \\ \downarrow \pi_{\mathcal{E}} \\ \Omega \end{array}$$
 est un fibré. Soit  $U$  un ouvert connexe

de  $\Omega$  sur lequel  $TU$  est trivialisable. Il existe des champs de vecteurs  $A, B, C$  et  $D$  définis sur  $U$ , linéairement indépendants. On peut scinder chaque champ

en sa partie espace et sa partie chronologique  $A = A_E + aT$ ,  $B = B_E + bT$ ,  $C = C_E + cT$  et  $D = D_E + dT$  où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $U$ . On cherche des champs orthogonaux à  $T$  pour la forme bilinéaire  $g$  qui sont linéairement indépendants. On pose  $\Gamma = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ , la condition  $g(\Gamma, T) = 0$  est équivalente à  $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0$ . Si  $X = -bA + aB - dC + cD$ ,  $Y = cA - dB - aC + bD$ ,  $Z = -dA - cB + bC + aD$  alors pour tout  $\omega \in U$ ,  $\text{Vect}(X(\omega), Y(\omega), Z(\omega)) = E_\omega = \mathbb{R}T(\omega)^\perp$  car

$$\det \begin{pmatrix} -b & c & -d & a \\ a & -d & -c & b \\ -d & -a & b & c \\ c & b & a & d \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 0 \iff a = b = c = d = 0.$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(U) = \cup_{\omega \in U} E_\omega & \xrightarrow{\psi} & U \times \mathbb{R}^3 \\ \downarrow \pi_E & & \downarrow \text{Pr}_1 \\ U & \xrightarrow{\text{Id}_U} & U \end{array}, \text{ avec } \psi(v) = (\omega, x, y, z) \text{ et}$$

$v = xX(\omega) + yY(\omega) + zZ(\omega)$  est l'isomorphisme de trivialité locale.  $\square$

Remarquons que sur le fibré espace,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times E_\omega & & \\ \downarrow \pi_{\mathcal{E}} & & \text{, on a sur chaque fibre } E_\omega \text{ une forme bilinéaire définie} \\ \Omega & & \end{array}$$

positive, notée  $g^R$ , définie par  $g^R(X, Y) = g(X, Y)$  et la métrique de Lorentz  $g$ , permet de définir une métrique riemannienne locale  $g_R$  de la façon suivante, si  $|X|^2 = |X_E|^2 - t^2$  alors  $|X|_R^2 = |X_E|^2 + t^2$  avec,  $|X|^2 = g(X, X)$  et  $|X|_R^2 = g_R(X, X)$ .

**Theorem 3.** *Le système de Pfaff  $\omega \rightarrow \tau(\omega) = E_\omega$  est complètement intégrable, pour chaque  $\omega \in \Omega$ , la composante connexe de l'intégrale associée à ce système est une variété connexe dite feuille d'espace en  $\omega$  et est notée  $\mathcal{E}_\omega$ .*

*Proof.* On utilise le principe de sommation d'Einstein. Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ , une carte de  $\Omega$ . On pose  $\{\partial_i\}$  le "local frame" associé, si  $X \in \Gamma^\infty(T\Omega)$  alors en coordonnées locales  $X = a^i \partial_i \in T_u\Omega$ , où  $a^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une  $C^\infty$ -application. Si  $Y = b^j \partial_j$  alors  $[X, Y] = c^i \partial_i$  avec,  $c^i = a^j (\partial_j b^i) - b^j (\partial_j a^i)$ .

On note  $T = t^i \partial_i$ , le champ chronologique. Il faut vérifier que si  $g(X, T) = 0$  et  $g(Y, T) = 0$  sur  $U$ , alors  $g([X, Y], T) = 0$  sur  $U$ .

On a  $g(X, T) = a^i t^j g_{ij} = 0$ , de même  $b^i t^j g_{ij} = 0$  avec,  $g(\partial_i, \partial_j) = g_{ij}$ . Ensuite, on calcule  $g([X, Y], T) = c^i t^j g_{ij} = (a^k (\partial_k b^j) - b^k (\partial_k a^j)) t^j g_{ij} = a^k t^j g_{ij} (\partial_k b^j) - b^k t^j g_{ij} (\partial_k a^j)$ , les conditions  $a^i t^j g_{ij} = 0$  et  $b^i t^j g_{ij} = 0$  impliquent  $\partial_k (a^i t^j g_{ij}) = 0$  et  $\partial_k (b^i t^j g_{ij}) = 0$ . On en déduit  $g([X, Y], T) = -a^k b^i \partial_k (t^j g_{ij}) + b^k a^i \partial_k (t^j g_{ij}) = 0$ .

Donc,  $\tau$  est complètement intégrable. Si  $\mathcal{E}_\omega$  est la composante connexe de l'intégrale de  $\tau$  contenant  $\omega$ ,  $\mathcal{E}_\omega$  est une sous-variété de dimension 3 de  $\Omega$ . De plus,  $\cup_{\omega \in \Omega} \mathcal{E}_\omega = \Omega$ .  $\square$

**Conclusion 1.** *Les parties espace-temps  $\Omega$  de l'univers sont des variétés de dimension 4 connexes, muni d'une métrique de Lorentz  $g$  et d'une chronologie définie par un champ local  $T$ , tel que  $g(T, T) = -1$ . Chaque chronologie permet de feuilletter  $\Omega$  en deux feuilletages orthogonaux pour la métrique  $g$ . L'un est le feuilletage espace, noté  $\mathcal{E}$ , dont les feuilles sont des sous-variétés connexes sans bord, de dimension 3 de  $\Omega$ , dites feuilles d'espace, l'autre est le feuilletage chronologique noté  $\mathcal{T}$ , dont les feuilles sont des sous-variétés connexes sans bord, de dimension 1 de  $\Omega$ , dites*

feuilles chronologiques. Ces feuilles chronologiques ne peuvent être que  $\mathbb{S}^1$  ou  $\mathbb{R}$ . Chaque champ  $X$  se décompose de façon unique, sous la forme  $X = X_E - tT$ , où  $X_E(\omega) \in T_\omega(E) = E_\omega$ ,  $t \in C^\infty(\Omega)$  et  $E$  est l'unique feuille du feuilletage de  $\mathcal{E}$  contenant  $\omega$ .

La notion de changement local de coordonnées entre deux espace-temps définis par les champs chronologiques  $T$  et  $S$  est la donnée d'une section  $\theta$ , définie sur un ouvert connexe  $U \subseteq \Omega$  du fibré  $\text{Hom}(T\Omega) = \Lambda^1(\Omega) \otimes T\Omega$  telle que  $\theta \otimes T = S$  et  $g(\theta \otimes X, \theta \otimes Y) = g(X, Y)$  sur  $U \subseteq \Omega$  pour tout champ  $X, Y$  de  $\Omega$ . On rappelle que pour un champ  $X$  de  $\Omega$  défini sur  $U$ ,  $\theta \otimes X(\omega) = \theta(\omega)(X(\omega))$  et l'application  $\omega \rightarrow \theta(\omega) : T_\omega\Omega \rightarrow T_\omega\Omega$  avec,  $\theta(\omega)$  est une  $g(\omega)$ -isométrie. On peut remarquer que ce changement d'espace-temps est un opérateur d'évolution.

**Theorem 4.** *Pour tous les champs chronologiques  $T$  et  $S$ , il existe un changement local de coordonnées.*

*Proof.* On prend un ouvert  $U$  sur lequel  $T\Omega$  est trivialisable, on se donne quatre champs  $A, B, C$  et  $D$  linéairement indépendants. On peut construire 3 champs  $X^1, Y^1$  et  $Z^1$  tels que  $\text{Vect}(X^1, Y^1, Z^1) = (\mathbb{R}T)^\perp$ , par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmit, on peut construire 3 champs  $X_1, Y_1, Z_1$  formant une base orthonormale de  $(\mathbb{R}T)^\perp$  pour la métrique riemannienne  $g_R$  qui est la restriction de  $g$  à  $(\mathbb{R}T)^\perp$ . On note  $\theta_1$ , l'application qui envoie  $X_1$  sur  $A$ ,  $Y_1$  sur  $B$ ,  $Z_1$  sur  $C$  et  $T$  sur  $D$ . De façon identique, on construit  $\theta_2$  l'application qui envoie  $X_2$  sur  $A$ ,  $Y_2$  sur  $B$ ,  $Z_2$  sur  $C$  et  $S$  sur  $D$ , alors l'application  $\theta = \theta_2^{-1} \circ \theta_1$  répond à la question car les procédés de construction sont  $C^\infty$ .  $\square$

## 6. EQUATION DE SCHRÖDINGER-DIRAC

En mécanique quantique relativiste, l'état d'un électron libre est représenté par une fonction d'onde  $\Psi(t, x)$  avec  $\Psi(t, \bullet) \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$  pour tout  $t$ . Cette fonction est solution de l'équation de Dirac libre  $i\partial_t\Psi = H_0\Psi$ , avec

$$H_0 = i \sum_{k=1}^3 \alpha_k \partial_k + \beta \quad (6.1)$$

, les unités choisies sont  $\hbar = c = 1$  et la masse de l'électron est  $m_e = 1$ . Les  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\beta$  sont des matrices complexes carrées d'ordre 4 représentées par blocs,  $\beta = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix}$  et  $\alpha_k = \begin{pmatrix} O & \sigma_k \\ \sigma_k & O \end{pmatrix}$ ,  $k = 1, 2, 3$  et les matrices  $\sigma_k$  sont les matrices de Pauli d'ordre 2,  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  et  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  qui vérifient  $\alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k = 2\delta_{kl} I_4$  et  $\alpha_k \beta + \beta \alpha_k = O_4$ . Ces relations permettent d'assurer que  $H_0^2 = -\Delta + Id$  est un opérateur symétrique [3].

L'équation de Dirac a une généralisation naturelle. On se fixe un fibré vectoriel réel  $\zeta = (E, \Omega, \pi, \mathbb{R}^4)$  sur l'univers  $\Omega$ , muni d'une connexion  $\nabla$ .

Une fonction d'onde généralisée  $\Psi$  est une section du complexifié de  $\zeta$ , noté  $\zeta_{\mathbb{C}} = (E_{\mathbb{C}}, \Omega, \pi_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}^4)$ . La connexion complexifiée associée à  $\nabla$  est  $\nabla(r + is) = \nabla(r) + i\nabla(s)$  pour toutes sections  $r$  et  $s$  de  $\zeta$ ,  $\nabla$  est une application de  $\Gamma(E_{\mathbb{C}})$  à valeurs dans  $\Gamma(\Lambda^1\Omega \otimes E_{\mathbb{C}})$ .

Si  $E = \Omega \times \mathbb{C}^4$ ,  $\Psi$  est un 4-scalaire, on est dans la représentation "QRD" et si  $E = T\Omega$ ,  $\Psi$  est un 4-vecteur, on est dans la représentation "TRD" de l'équation de Dirac ([1],[2]).

Dans une carte  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  de l'ouvert  $U$  de l'espace-temps  $\Omega$ , sur laquelle le fibré  $T\Omega$  est trivialisable, l'équation d'évolution de Dirac-Einstein,

$$\gamma^\nu D_\nu (\Psi) = -i \frac{mc}{\hbar} \Psi, \quad (6.2)$$

où  $m$  est la masse de la particule d'onde  $\Psi$ .

L'opérateur  $\Phi = \gamma^\nu D_\nu$ , doit être un opérateur hermitien pour le produit hermitien sur  $T_{\mathbb{C}}\Omega$  qui peut être défini par la métrique  $g$ . Les valeurs propres de  $i\Phi$  sont de la forme  $\frac{mc}{\hbar}$ , où  $m$  parcourt l'ensemble des masses des particules dans l'univers et en particulier, les masses des particules qui vivent dans l'espace-temps associé au champ chronologique  $T$ .

Dans l'hypothèse de l'existence d'un champ chronologique  $T$ , on peut définir une équation de Schrödinger-Dirac, les ondes deviennent des champs  $\Psi$  de l'espace-temps  $\Omega$  et l'équation de Schrödinger  $H\Psi = i\partial_T\Psi$  se généralise par une équation de la forme

$$H\Psi = i\mathcal{L}_T\Psi = i[T, \Psi], \quad (6.3)$$

$\mathcal{L}_T$  est l'extension de la dérivée de Lie  $\partial_T$  aux champs de  $\Omega$ . Le Hamiltonien  $H$  devient un opérateur sur les champs complexes, c'est-à-dire, une section sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\Lambda_{\mathbb{C}}^1\Omega \otimes T_{\mathbb{C}}\Omega$ .

**Remark 3.**  $\mathcal{L}_T\Psi$  mesure le défaut de commutativité d'un champ  $\Psi$  par rapport au champ chronologique  $T$ .

**Theorem 5.** Le Hamiltonien  $H$  s'écrit,

$$H = -\frac{\hbar}{mc}\mathcal{L}_T \circ \Phi - i\partial_T(\log(m))\text{Id}_{T_{\mathbb{C}}\Omega}, \quad (6.4)$$

où  $\Phi = \gamma^\nu D_\nu$  est l'opérateur d'évolution de Dirac-Einstein au rang 1. En particulier, si la masse ne varie pas le long du champ chronologique  $T$ , le hamiltonien s'écrit,

$$H = -\frac{\hbar}{mc}\mathcal{L}_T \circ \Phi. \quad (6.5)$$

*Proof.*  $\mathcal{L}_T \circ \Phi (\Psi) = [T, \Phi (\Psi)] = [T, -i\frac{mc}{\hbar}\Psi] = -i\frac{mc}{\hbar}[T, \Psi] + \partial_T(-i\frac{mc}{\hbar})\Psi$   
 $= -\frac{mc}{\hbar}H\Psi - i\frac{c}{\hbar}\partial_T(m)\Psi.$

$$H\Psi = -\frac{\hbar}{mc}(\mathcal{L}_T \circ \Phi (\Psi) + i\frac{c}{\hbar}\partial_T(m)\Psi) = -(\frac{\hbar}{mc}\mathcal{L}_T \circ \Phi + i\partial_T(\log(m))\text{Id}_{T_{\mathbb{C}}\Omega})(\Psi). \quad \square$$

**Remark 4.**  $\partial_T(\log(m)) = \frac{\partial_T(m)}{m}$  représente la dérivée logarithmique le long du champ chronologique  $T$  de la masse  $m$  de la particule.

**Remark 5.** Le Hamiltonien dépend du choix du champ chronologique  $T$ , donc du "frame local" contrairement à l'opérateur d'évolution  $\Phi = \gamma^\nu D_\nu$  qui ne dépend que de la section de Dirac du fibré complexifié des champs et de la connexion  $\nabla$  choisie sur ce fibré.

Soient  $X, Y$  et  $Z$  des sections locales pour lesquelles la famille  $\{X, Y, Z\}$  est une base orthogonale de  $(\mathbb{R}T)^\perp$ . On pose  $\partial_0 = T$ ,  $\partial_1 = X$ ,  $\partial_2 = Y$  et  $\partial_3 = Z$ . Dans le "local frame"  $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ ,

**Theorem 6.**

$$H = -\frac{\hbar}{mc}(\gamma_{\nu,0}^\nu D_\nu + \gamma^\nu(L_0 L_\nu + \Gamma_{\nu,0} + \Gamma_\nu L_0)) - i\partial_T(\log(m))\text{Id}, \quad (6.6)$$

avec  $L_\nu \Psi = (\partial_\nu \Psi^\sigma) \partial_\sigma$  pour  $\Psi = \Psi^\sigma \partial_\sigma$ ,  $\gamma'_{\nu,0}$  et  $\Gamma_{\nu,0}$  sont les endomorphismes qui ont pour matrices dans la base canonique  $(\partial_0 \gamma'_{\beta}{}^{\nu\sigma})$  et  $(\partial_0 \Gamma_{\alpha\nu}^\beta)$ .

*Proof.*  $[T, \Phi(\Psi)] = \partial_0 \left( \gamma'_{\beta}{}^{\nu\sigma} (\partial_\nu \Psi^\beta + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \Psi^\alpha) \right) \partial_\sigma$   
 $\partial_0 \left( \gamma'_{\beta}{}^{\nu\sigma} (\partial_\nu \Psi^\beta + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \Psi^\alpha) \right)$   
 $= \partial_0 \gamma'_{\beta}{}^{\nu\sigma} (\partial_\nu \Psi^\beta + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \Psi^\alpha) + \gamma'_{\beta}{}^{\nu\sigma} (\partial_0 \partial_\nu \Psi^\beta + (\partial_0 \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \Psi^\alpha + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \partial_0 \Psi^\alpha)$   
 $= (\gamma'_{\beta,0}{}^{\nu\sigma})^\sigma (D_\nu \Psi)^\beta + (\gamma'_{\beta}{}^{\nu\sigma})^\sigma ((L_0 \circ L_\nu + \Gamma_{\nu,0} + \Gamma_\nu L_0) (\Psi))^\beta$   
 $= ((\gamma'_{\nu,0} D_\nu + \gamma'_{\nu} (L_0 L_\nu + \Gamma_{\nu,0} + \Gamma_\nu L_0)) (\Psi))^\sigma$ . Donc,  
 $H = -\frac{\hbar}{mc} (\gamma'_{\nu,0} D_\nu + \gamma'_{\nu} (L_0 L_\nu + \Gamma_{\nu,0} + \Gamma_\nu L_0)) - i\partial_T (\log(m)) \text{Id}$ .  
On a posé  $L_\nu \Psi = (\partial_\nu \Psi^\sigma) \partial_\sigma$ ,  $\gamma'_{\nu,0}$  et  $\Gamma_{\nu,0}$  sont les endomorphismes dont les matrices, dans la base canonique, sont respectivement,  $(\partial_0 \gamma'_{\beta}{}^{\nu\sigma})$  et  $(\partial_0 \Gamma_{\alpha\nu}^\beta)$ .  $\square$

## 7. CONCLUSION

On se situe sur une partie connexe  $\Omega$  de l'univers où on ne fait aucune mesure sur la métrique  $g$  et sur laquelle vit au moins un champ chronologique  $T$ . Toute particule est décrite par une section  $\Psi$  de  $T_C\Omega$ . Sur le fibré  $T_C\Omega$  cohabitent une connexion  $\nabla$  et une section de Dirac  $\gamma$ . La connexion  $\nabla$  n'est pas nécessairement la connexion de Levi-Civita si on est sur l'univers tout entier.

Le champ  $\Psi$  vérifie l'équation de Dirac-Einstein des champs donnée par 3.7, avec  $\lambda = -i\frac{mc}{\hbar}$ , où  $m$  est la masse de la particule associée au champ  $\Psi$ . L'équation générale de Dirac-Weyl-Fock dite équation de Schrödinger-Dirac est donnée en 6.3,  $\mathcal{L}_T$  est la dérivée de Lie le long du champ chronologique étendue aux champs.

Le Hamiltonien de l'équation de Dirac-Weyl-Fock s'écrit 6.3 où  $\Phi$  est l'opérateur d'évolution de l'équation de Dirac-Einstein au rang 1. On peut entièrement décrire l'évolution d'une particule avec une connexion de l'univers, dite connexion fondamentale  $\nabla$ . La section de Dirac  $\gamma$  est solution de l'équation relativiste quantique 4.11 où  $\Lambda = \Lambda_0$  est la constante cosmologique et  $\gamma^{\alpha\beta}$  est le tenseur de Poisson défini en 4.1.

Les masses des particules sont quantifiées, elles sont proportionnelles aux valeurs propres de l'opérateur  $\Phi$  de l'équation d'évolution d'Einstein-Dirac des champs. Si on veut étudier l'évolution le long d'un champ chronologique, il suffit de prendre la dérivée de Lie de l'équation d'évolution des champs.

## REFERENCES

- [1] M. Arminjon, F. Reifler, "Representations of the Dirac wave function in a curved spacetime", Proc. Fifth International Workshop DICE2010 : current issues in quantum mechanics and beyond, Journal of Physics: Conference Series 306 (2011), 012061.
- [2] M.A., F. Reifler, "Classical-quantum correspondence and wave packet solutions of the Dirac equation in a curved spacetime", 13th International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, (Varna, Bulgarie, 3-8 juin 2011). Journal of Geometry and Symmetry in Physics 24, 77-88 (2011).
- [3] M.J. Esteban, E. Séré, Les équations de Dirac-Fock. Séminaire E.D.P(1997-1998), Exposé n°5, U.M.R 7640 C.N.R.S.

*E-mail address:* jean-louis.jonot@ac-versailles