



HAL
open science

Résolution limite pour un radar MIMO fonctionnant en mode de retournement temporel

Messaoud Thameri, Remy Boyer, Karim Abed-Meraim, Foroohar Foroozan

► **To cite this version:**

Messaoud Thameri, Remy Boyer, Karim Abed-Meraim, Foroohar Foroozan. Résolution limite pour un radar MIMO fonctionnant en mode de retournement temporel. DAT Conference, Feb 2014, Alger, Algérie. hal-01002331

HAL Id: hal-01002331

<https://hal.science/hal-01002331>

Submitted on 13 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RÉSOLUTION LIMITE POUR UN RADAR MIMO FONCTIONNANT EN MODE DE RETOURNEMENT TEMPOREL

Thameri Messaoud

Rémy Boyer

Karim Abed-Meraim

Foroohar Foroozan

TELECOM ParisTech
Département TSI
Paris, France

Université Paris Sud XI
LSS/SUPELEC
Gif Sur Yvette, France

Université d'Orléans
Laboratoire PRISME
Orléans, France

Université d'York
SPC laboratory
Toronto, Canada

RÉSUMÉ

L'un des outils de statistique pour évaluer les performances des estimateurs est le Seuil de Résolution Limite (SRL). Ce dernier est défini comme étant la distance minimale nécessaire pour pouvoir résoudre deux paramètres ou sources. Dans cet article, nous abordons le problème du seuil de résolution angulaire limite en développant ses expressions analytiques pour un radar MIMO actif fonctionnant en mode de retournement temporel.

1. INTRODUCTION

Le radar MIMO utilise plusieurs antennes pour transmettre simultanément plusieurs formes d'onde connues non cohérentes et exploite plusieurs antennes pour recevoir les signaux réfléchis (échos). Cette diversité en terme de forme d'onde permet de transmettre des signaux orthogonaux [1]. Cela permet d'avoir une supériorité pour les radar MIMO dans plusieurs aspects fondamentaux [2], notamment : (i) l'amélioration de l'identifiabilité et de l'estimation des paramètres et (ii) l'augmentation de flexibilité de conception du diagramme de rayonnement. Ce travail entre dans le contexte des radars MIMO co-localisés (par opposition à la configuration largement séparées) où les antennes de transmission et réception sont proches dans l'espace.

Dans le Retournement Temporel (RT), plusieurs impulsions, transmises à travers un milieu dispersif, sont reçues par une antenne, puis retournées temporellement, leurs énergies sont normalisées, et par la suite retransmises par le même canal. Si ce canal de diffusion est réciproque¹, le signal retransmis se focalise sur la source originale. Récemment, la stratégie RT a été successivement exploitée pour la localisation de source [3] où les directions d'arrivée (DDA) des sources sont estimées avec une plus grande précision que par les méthodes conventionnelles. Dans le contexte du radar MIMO, le nouveau schéma est désigné par l'acronyme radar MIMO-RT. Les avan-

tages de ce radar MIMO-RT sont : (i) un degré de liberté supplémentaire en raison de la stratégie MIMO et (ii) la propriété de focalisation et haute résolution de l'approche RT. Comme indiqué dans [4], les performances de détection des cibles sont nettement améliorées pour un tel radar.

En ce qui concerne les performances optimales théoriques de tous systèmes, il est intéressant de considérer la borne inférieure de l'EQM (Erreur Quadratique Moyenne) donnée par la Borne de Cramer Rao (BCR) et la capacité de résolution, à savoir le seuil de résolution limite (SRL). La BCR et le SRL, notée δ , sont très utiles pour dimensionner les systèmes et pour tester l'efficacité des estimateurs considérés. Le SRL peut être défini comme la distance minimale dans l'espace des paramètres afin de pouvoir séparer deux cibles rapprochées. L'évaluation de la résolution limite est un problème fondamental et une étude de ce problème peut être consultée dans la référence [5]. Dans [6], il est postulé que le SRL est la solution d'une équation, impliquant la BCR, donnée par $\delta^2 = \mu \text{BCR}(\delta)$. En outre, dans [7], il est démontré que cette équation apparaît naturellement dans les performances du test du rapport de vraisemblance généralisé (GLRT : Generalized Likelihood Ratio Test) relatif au test d'hypothèse binaire comportant la décision entre la présence d'une ou deux cibles. En effet, le critère introduit heuristiquement dans [6] est optimal au le sens du GLRT.

Pour le radar MIMO co-localisés (sans RT), la BCR et le SRL sont développés et analysés dans [8]. Dans [9], la BCR et le SRL sont développés pour le MIMO-RT et le gain associé à l'approche RT est démontré. D'autre part, dans [10], il est démontré qu'une autre quantité intéressante pour évaluer les performances d'un système MIMO est de calculer le Signal to Noise Ratio (SNR) minimal pour séparer deux cibles proches noyées dans des interférences. Ce SNR est une fonction quadratique du SRL. Dans cet article, nous étendons les travaux entrepris dans [10] pour le radar MIMO au contexte du radar MIMO-RT.

1. En raison du principe de réciprocité, il est bien connu que le canal de propagation radio est réciproque entre les deux antennes. Idéalement, les voies aller et retour sont supposées être les mêmes.

2. CONFIGURATION DU MODÈLE POUR LES OBSERVATIONS CONVENTIONNELLES

Nous considérons deux antennes co-localisées A et B (avec P et N capteurs respectivement). Tout d'abord, l'antenne A envoie à l'antenne B des signaux à large bande regroupés dans le vecteur $\mathbf{f}_A(t)$ de taille $(P \times 1)$, avec une fréquence porteuse ω_c . En deuxième lieu, l'antenne B envoie un autre ensemble de signaux à large bande regroupés dans le vecteur $\beta \mathbf{f}_B(t)$ de taille $(N \times 1)$ à l'antenne A avec la même fréquence porteuse ω_c , où $\beta = \sqrt{\frac{E_{f_A}}{E_{f_B}}}$ étant une constante de normalisation. Ici, E_t (resp. E_r) représente l'énergie du signal transmis (resp. l'énergie du signal reçu), en imposant que tous les éléments de A et B transmettent avec la même puissance.

2.1. Cas d'une seule source

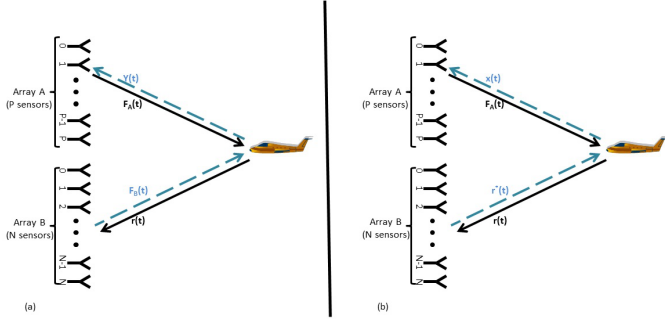


Fig. 1. Modèle de propagation : (a) modèle conventionnel. (b) Modèle RT.

Pour formuler la modélisation de notre problème, nous supposons d'abord que les signaux émis éclairent une seule source. Le signal observé au niveau du $n^{\text{ème}}$ capteur de l'antenne B est exprimé par :

$$[\mathbf{r}(t)]_n = \sum_{p=1}^P \alpha_{np} [\mathbf{f}_A(t - \tilde{\tau}_p^A - \tilde{\tau}_n^B)]_p + [\mathbf{v}(t)]_n + [\mathbf{r}_a(t)]_n \quad (1)$$

où $[\cdot]_n$ représente le $n^{\text{ème}}$ élément, α_{np} est l'atténuation associée à la source considérée lorsque le capteur p émet et le capteur n reçoit, la cible est supposée être dans le champ lointain des deux antennes co-localisées de telle sorte que l'atténuation $\alpha_{np} = \alpha$ pour tout n, p . Soit $\tilde{\tau}_p^A = \frac{r_0}{c} + \tau_p^A(\Omega)$, $\tilde{\tau}_n^B = \frac{r_0}{c} + \tau_n^B(\Omega)$, où r_0 est la distance de la cible par rapport au capteur de référence, $\tau_p^A(\Omega)$ (resp. $\tau_n^B(\Omega)$) est synonyme du retard du $p^{\text{ème}}$ capteur de l'antenne A (resp. $n^{\text{ème}}$ capteur de l'antenne B) par rapport au capteur de référence. Ces retards dépendent de $\Omega = \sin(\theta)$, où θ est la DDA. Le bruit additif $\mathbf{v}(t)$ est un processus Gaussien circulaire blanc de moyenne nulle et de variance σ_v^2 et $\mathbf{r}_a(t)$ représente la réponse des échos clutter. Dans ce qui suit, nous supposons que le signal de clutter

est connu (ou estimés précédemment), et sera ainsi supprimé de notre modèle.

La composante fréquentielle de (1) à la $q^{\text{ème}}$ fréquence (notée ω_q) peut être exprimée comme suit (les signaux sont convertis en bande de base)

$$[\mathbf{r}(\omega_q)]_n = \alpha \sum_{p=1}^P e^{-j(\omega_q + \omega_c)(\frac{2r_0}{c} + \tau_p^A(\Omega) + \tau_n^B(\Omega))} [\mathbf{f}_A(\omega_q)]_p + [\mathbf{v}(\omega_q)]_n \quad (2)$$

Le vecteur d'observation, sous la forme matricielle, est donné par

$$\mathbf{r}(\omega_q) = \alpha e^{-j(\omega_q + \omega_c)\frac{2r_0}{c}} \mathbf{A}(\Omega, \omega_q) \mathbf{f}_A(\omega_q) + \mathbf{v}(\omega_q) \quad (3)$$

où le $(n, p)^{\text{ème}}$ élément de la matrice émission-réception $\mathbf{A}(\Omega, \omega_q)$ est donné, pour tout $1 \leq n \leq N$ et $1 \leq p \leq P$, par $[\mathbf{A}(\Omega, \omega_q)]_{np} = e^{-j(\omega_q + \omega_c)(\tau_n^B(\Omega) + \tau_p^A(\Omega))}$.

2.2. Cas de sources multiples

Maintenant, nous généralisons l'équation (3) au contexte de sources multiples, auquel cas, nous avons

$$\mathbf{r}(\omega_q) = \sum_{l=1}^L \mathbf{A}_l(\Omega_l, \omega_q) \mathbf{f}_A(\omega_q) + \mathbf{v}(\omega_q) \quad (4)$$

où $\mathbf{A}_l(\Omega_l, \omega_q) = \alpha_l e^{-j(\omega_q + \omega_c)\frac{2r_{0l}}{c}} \mathbf{A}(\Omega_l, \omega_q)$, $1 \leq l \leq L$ et L est le nombre sources.

Soit le vecteur de taille $(NQ \times 1)$ de toutes les composantes de fréquences $\mathbf{r} = [\mathbf{r}^T(\omega_1), \dots, \mathbf{r}^T(\omega_Q)]^T$. Il peut être exprimé comme

$$\mathbf{r} = \sum_{l=1}^L \mathbf{A}_l(\Omega_l) \mathbf{f}_A + \mathbf{v} \quad (5)$$

où $\mathbf{A}_l(\Omega_l) = B \text{diag} [\mathbf{A}_l(\Omega_l, \omega_1), \dots, \mathbf{A}_l(\Omega_l, \omega_Q)]$, $B \text{diag}$ fait référence à l'opérateur 'Bloc diagonal' et $\mathbf{f}_A = [\mathbf{f}_A^T(\omega_1), \dots, \mathbf{f}_A^T(\omega_Q)]^T$ et $\mathbf{v} = [\mathbf{v}^T(\omega_1), \dots, \mathbf{v}^T(\omega_Q)]^T$.

2.3. Signaux retransmis de l'antenne B à l'antenne A

De la même manière que la section précédente, le deuxième ensemble d'observations dans la $q^{\text{ème}}$ fréquence ω_q est donné par

$$\mathbf{y}(\omega_q) = \beta_c \sum_{l=1}^L \mathbf{A}_l^T(\Omega_l, \omega_q) \mathbf{f}_B(\omega_q) + \mathbf{w}(\omega_q) \quad (6)$$

où $\beta_c = \sqrt{\frac{E_{f_A}}{E_{f_B}}}$ est le facteur de normalisation (E_{f_a} et E_{f_b} étant les énergie utilisées par les antennes A et B respectivement), \mathbf{w} est un bruit blanc circulaire Gaussien de moyenne nulle et variance σ_w^2 . Le vecteur d'observation \mathbf{y} de taille $(PQ \times 1)$ peut être exprimé selon

$$\mathbf{y} = \beta_c \sum_{l=1}^L \mathbf{A}_l^T(\Omega_l) \mathbf{f}_B + \mathbf{w} \quad (7)$$

où $\mathbf{f}_B = [\mathbf{f}_B(\omega_0), \dots, \mathbf{f}_B(\omega_Q)]^T$ et $\mathbf{w}_B = [\mathbf{w}_B(\omega_0), \dots, \mathbf{w}_B(\omega_Q)]^T$. Dans (7), nous avons supposé un canal symétrique de sorte que si $\mathbf{A}_l(\Omega_l)$ modélise la transmission de A à B alors $\mathbf{A}_l^T(\Omega_l)$ représente la propagation de B vers A . Enfin, les données dans \mathbf{r} et \mathbf{y} sont concaténées selon

$$\mathbf{u}_c = [\mathbf{r}^T \quad \mathbf{y}^T]^T \quad (8)$$

3. CONFIGURATION DU MODÈLE POUR LES OBSERVATIONS RT

Dans ce cas, nous avons deux antennes coopératives co-localisées A et B . Tout d'abord, l'antenne A envoie des signaux à large bande \mathbf{f}_A , avec une fréquence porteuse ω_c . Les données observées au niveau de l'antenne B (soit \mathbf{r} dans l'équation (5)) sont enregistrées, leur énergie normalisée, retournées temporellement (RT) et par la suite retransmises (i.e., nous transmettons $\beta_{RT}\mathbf{r}^*$ où $\beta_{RT} = \sqrt{\frac{E_{rA}}{E_r}}$ et \mathbf{r}^* désigne le complexe conjugué de \mathbf{r}). Sur la base de l'équation (6), le vecteur reçu \mathbf{x} par l'antenne A est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\omega_q) &= \beta_{RT} \sum_{l=1}^L \mathbf{A}_l^T(\Omega_l, \omega_q) \mathbf{r}^*(\omega_q) + \mathbf{w}(\omega_q), \\ &= \beta_{RT} \left(\sum_{l=1}^L \mathbf{A}_l^T(\Omega_l, \omega_q) \sum_{l'=1}^L \mathbf{A}_{l'}^*(\Omega_{l'}, \omega_q) \right) \mathbf{f}_A^*(\omega_q) \\ &\quad + \mathbf{n}'(\omega_q). \end{aligned} \quad (9)$$

où $\mathbf{n}'(\omega_q) = \beta_{RT} \sum_{l=1}^L \mathbf{A}_l^T(\Omega_l) \mathbf{v}^*(\omega_q) + \mathbf{w}(\omega_q)$. Le vecteur d'observations \mathbf{x} de taille $(PQ \times 1)$ peut être exprimé par

$$\mathbf{x} = \beta_{RT} \left(\sum_{l=1}^L \mathbf{A}_l^T(\Omega_l) \sum_{l'=1}^L \mathbf{A}_{l'}^*(\Omega_{l'}) \right) \mathbf{f}_A^* + \mathbf{n}' \quad (10)$$

où $\mathbf{n}' = [\mathbf{n}'^T(\omega_1), \dots, \mathbf{n}'^T(\omega_Q)]^T$. Maintenant, l'ensemble des observations RT est formé en utilisant \mathbf{r} et \mathbf{x} comme suit

$$\mathbf{u}_{RT} = [\mathbf{r}^T \quad \mathbf{x}^T]^T \quad (11)$$

4. MODÈLES LINÉAIRES ET DÉVELOPPEMENT DU TAYLOR

Conformément à la méthodologie introduite dans [11], le but de cette section est de linéariser les équations (5) et (7) (i.e., le modèle classique) et (10) (i.e., modèle RT) en utilisant le développement de Taylor. Le résultat sera utilisé pour calculer le SNR minimal nécessaire pour séparer deux sources proches. Sans perte de généralité, nous considérons que ces deux sources proches sont paramétrées par Ω_1 et Ω_2 , pour lesquels, nous noterons $\delta = \Omega_2 - \Omega_1$ la distance entre les deux paramètres et par $\Omega_c = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$ leur centre.

Par souci de simplicité, nous considérons dans la suite de l'article deux antennes linéaires uniformes (A et B), comme indiqué dans la Fig. 1, pour lesquelles le SRL est développé. Dans ce cas, les expressions des temps de retard sont données par

$$\tau_n^B(\Omega) = \frac{d_n^B}{c} \Omega, \quad (12)$$

$$\tau_p^A(\Omega) = \frac{d_p^A}{c} \Omega. \quad (13)$$

où d_n^B (resp. d_p^A) est la distance entre le $n^{\text{ème}}$ capteur de l'antenne B (resp. $p^{\text{ème}}$ capteur de l'antenne A) et le capteur de référence.

4.1. Modèle classique

Le développement de Taylor au premier ordre de (5) autour de $\delta = 0$ est donné par

$$\mathbf{r} \stackrel{1}{\approx} \mathbf{A}_c \mathbf{f}_A + \delta \mathbf{D} \mathbf{f}_A + \sum_{l=3}^L \mathbf{A}_l(\Omega_l) \mathbf{f}_A + \mathbf{v} \quad (14)$$

où $\stackrel{1}{\approx}$ signifie l'approximation au premier ordre

$$\mathbf{A}_c = B \text{diag} [\mathbf{A}_c(\omega_1), \dots, \mathbf{A}_c(\omega_Q)], \quad (15)$$

$$\mathbf{D} = B \text{diag} [\mathbf{D}(\omega_1), \dots, \mathbf{D}(\omega_Q)]. \quad (16)$$

Les $(n, p)^{\text{ème}}$ éléments des matrices $\mathbf{A}_c(\omega_q)$ et $\mathbf{D}(\omega_q)$ sont donnés par

$$[\mathbf{A}_c(\omega_q)]_{np} = \alpha_{a+}(\omega_q) e^{-j \frac{(\omega_q + \omega_c)(d_n^B + d_p^A)}{c} \Omega_c}, \quad (17)$$

$$[\mathbf{D}(\omega_q)]_{np} = \alpha_{a-}(\omega_q) j \frac{(\omega_q + \omega_c)(d_n^B + d_p^A)}{2c} \times e^{-j \frac{(\omega_q + \omega_c)(d_n^B + d_p^A)}{c} \Omega_c}. \quad (18)$$

où

$$\alpha_{a+}(\omega_q) = \alpha_1 e^{-j(\omega_q + \omega_c) \frac{2r_{01}}{c}} + \alpha_2 e^{-j(\omega_q + \omega_c) \frac{2r_{02}}{c}}, \quad (19)$$

$$\alpha_{a-}(\omega_q) = \alpha_1 e^{-j(\omega_q + \omega_c) \frac{2r_{01}}{c}} - \alpha_2 e^{-j(\omega_q + \omega_c) \frac{2r_{02}}{c}}. \quad (20)$$

De la même façon, le développement de Taylor au premier ordre autour de $\delta = 0$ de (7) mène à

$$\mathbf{y} \stackrel{1}{\approx} \beta_c \mathbf{A}_c^T \mathbf{f}_B + \delta \beta_c \mathbf{D}^T \mathbf{f}_B + \beta_c \sum_{l=3}^L \mathbf{A}_l^T(\Omega_l) \mathbf{f}_B + \mathbf{w} \quad (21)$$

Le développement de Taylor au premier ordre de l'ensemble des données classiques \mathbf{u}_c (cf. équation (8)) est donné par

$$\mathbf{u}_c \stackrel{1}{\approx} \mathbb{A}_c \mathbf{f}_c + \delta \mathbb{D}_c \mathbf{f}_c + \sum_{l=3}^L \mathbb{A}_l(\Omega_l) \mathbf{f}_c + \xi_c \quad (22)$$

où $\mathbb{A}_c = B \text{diag} [\mathbf{A}_c, \beta_c \mathbf{A}_c^T]$, $\mathbb{D}_c = B \text{diag} [\mathbf{D}, \beta_c \mathbf{D}^T]$, $\mathbb{A}_l(\Omega_l) = B \text{diag} [\mathbf{A}_l(\Omega_l), \beta \mathbf{A}_l^T(\Omega_l)]$, $\mathbf{f}_c = [\mathbf{f}_A^T, \mathbf{f}_B^T]^T$ et $\xi_c = [\mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T]^T$.

4.2. Modèle du retournement temporel

De manière similaire au cas conventionnel, le développement de Taylor au premier ordre de (10) autour de $\delta = 0$ est donné par

$$\mathbf{x} \approx \beta_{RT} \mathbf{H}_c \mathbf{f}_A^* + \beta_{RT} \delta \mathbf{H}_d \mathbf{f}_A^* + \beta_{RT} \delta \mathbf{D}^T \mathbf{v}^* + \mathbf{w}' \quad (23)$$

où

$$\mathbf{H}_c = Bdiag[\mathbf{H}_c(\omega_1), \dots, \mathbf{H}_c(\omega_Q)], \quad (24)$$

$$\mathbf{H}_d = Bdiag[\mathbf{H}_d(\omega_1), \dots, \mathbf{H}_d(\omega_Q)], \quad (25)$$

$$\mathbf{A}_{cc}(\omega_q) = \mathbf{A}_c(\omega_q) + \sum_{l=3}^L \mathbf{A}_l(\Omega_l, \omega_q),$$

$$\mathbf{H}_c(\omega_q) = \mathbf{A}_{cc}^T(\omega_q) \mathbf{A}_{cc}^*(\omega_q),$$

$$\mathbf{H}_d(\omega_q) = \mathbf{A}_{cc}^T(\omega_q) \mathbf{D}^*(\omega_q) + \mathbf{D}^T(\omega_q) \mathbf{A}_{cc}^*(\omega_q),$$

$$\mathbf{w}' = \left[\mathbf{w}'^T(\omega_1), \dots, \mathbf{w}'^T(\omega_q) \right]^T, \quad (26)$$

$$\mathbf{w}'(\omega_q) = \beta_{RT} \mathbf{A}_{cc}(\omega_q) \mathbf{v}^*(\omega_q) + \mathbf{w}(\omega_q).$$

On peut observer que le terme du bruit $\beta_{RT} \delta \mathbf{D}^T \mathbf{v}^* + \mathbf{w}'$ n'est plus blanc². Pour cela et afin de simplifier le calcul du SNR minimal, nous rendons le vecteur d'observation \mathbf{x} blanc. Le vecteur des signaux blancs est noté par $\tilde{\mathbf{x}}$ et donné par l'équation suivante

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} = & \beta_{RT} \delta \left(\mathbf{W}_0 \mathbf{H}_d - \frac{\beta_{RT}^2 \sigma_v^2}{2\sigma^2} \mathbf{W}_0^{\frac{3}{2}} \mathbf{H}_d \mathbf{W}_0^{\frac{3}{2}} \mathbf{H}_c \right) \mathbf{f}_A^* \\ & + \beta_{RT} \mathbf{W}_0 \mathbf{H}_c \mathbf{f}_A^* + \mathbf{v}' \end{aligned} \quad (27)$$

où $\mathbf{W}_0 = Bdiag[\mathbf{W}_0(\omega_1), \dots, \mathbf{W}_0(\omega_Q)]$ et $\mathbf{W}_0(\omega_q) = \sigma \mathbf{R}_0^{-\frac{1}{2}}(\omega_q)$ est la matrice de blanchiment, $\mathbf{R}_0(\omega_q)$ étant la matrice de covariance de $\mathbf{x}(\omega_q)$ pour $\delta = 0$, $\mathbf{R}_0(\omega_q) = \beta_{RT}^2 \sigma_v^2 \mathbf{H}_c(\omega_q) + \sigma_w^2 \mathbf{I}$, et $\mathbf{v}' \sim CN(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$.

Le développement de Taylor au premier ordre du vecteur de l'ensemble données RT \mathbf{u}_{RT} est donné par

$$\mathbf{u}_{RT} \approx \mathbb{A}_{RT} \mathbf{f}_{RT} + \delta \mathbb{D}_{RT} \mathbf{f}_{RT} + \sum_{l=3}^L \mathbb{O}_l(\Omega_l) \mathbf{f}_{RT} + \xi_{RT} \quad (28)$$

où $\mathbb{A}_{RT} = Bdiag[\mathbf{A}_c, \beta \mathbf{W}_0 \mathbf{H}_c]$, $\mathbf{f}_{RT} = [\mathbf{f}_A^T, \mathbf{f}_A^H]^T$, $\mathbb{D}_{RT} = Bdiag[\mathbf{D}, \beta_{RT} \left(\mathbf{W}_0 \mathbf{H}_d - \frac{\beta^2 \sigma_v^2}{2\sigma^2} \mathbf{W}_0^{\frac{3}{2}} \mathbf{H}_d \mathbf{W}_0^{\frac{3}{2}} \mathbf{H}_c \right)]$, $\mathbb{O}_l(\Omega_l) = Bdiag[\mathbf{A}_l(\Omega_l), \mathbf{0}_{QP \times QP}]$, tous les éléments de la matrice $\mathbf{0}$ sont égaux à 0 et $\xi_{RT} = [\mathbf{v}^T, \mathbf{v}'^T]^T$.

5. FORMULATION DU TEST D'HYPOTHÈSE

Dans ce qui suit, nous supposons que les deux sources sont proches. L'hypothèse \mathcal{H}_0 représente le cas où les deux Sources D'Intérêt (SDI) existent mais sont combinées en un seul signal, alors que l'hypothèse \mathcal{H}_1 incarne la situation où les deux SDI peuvent

2. $(\beta_{RT} \delta \mathbf{D}^T \mathbf{v}^*(\omega_q) + \mathbf{w}'(\omega_q)) \sim CN(0, \mathbf{R}_\delta(\omega_q))$, où $\mathbf{R}_\delta(\omega_q) = \beta_{RT}^2 \sigma_v^2 (\mathbf{H}_c(\omega_q) + \delta \mathbf{H}_d(\omega_q)) + \sigma_w^2 \mathbf{I}$, le terme proportionnel à δ^2 est néglige ici.

être résolues. Par conséquent, le test d'hypothèse binaire est donné par

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \delta = 0, \\ \mathcal{H}_1 : & \delta \neq 0. \end{cases} \quad (29)$$

Dans ce cas, le GLRT [12] est donné par

$$G(\mathbf{u}) = \frac{p(\mathbf{u}; \hat{\delta}, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{u}; \mathcal{H}_0)} \stackrel{\mathcal{H}_0}{\leq} \stackrel{\mathcal{H}_1}{\geq} \eta' \quad (30)$$

où $p(\mathbf{u}; \mathcal{H}_0)$ et $p(\mathbf{u}; \mathcal{H}_1)$ désignent les fonctions de densité de probabilité (fdp) sous \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 , respectivement, et où η' et $\hat{\delta}$ désignent le seuil de détection et l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance (EMV) de δ sous \mathcal{H}_1 . Si la statistique $G(\mathbf{u})$ est supérieure à un seuil donné η' , alors les signaux sont dits résolus.

Dans ce qui suit, nous supposons que Ω_c et $\mathbf{A}_l(\Omega_l)$, $3 \leq l \leq L$ sont connus ou précédemment estimés.

On définit alors deux nouveaux vecteurs d'observation \mathbf{z}_c pour le modèle conventionnel et \mathbf{z}_{RT} pour le modèle du retournement temporel

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_c &= \mathbf{u}_c - \mathbb{A}_c \mathbf{f}_c - \sum_{l=3}^L \mathbb{A}_l(\Omega_l) \mathbf{f}_c, \\ &= \delta \mathbb{D}_c \mathbf{f}_c + \xi_c, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{RT} &= \mathbf{u}_{RT} - \mathbb{A}_{RT} \mathbf{f}_{RT} - \sum_{l=3}^L \mathbb{O}_l(\Omega_l) \mathbf{f}_{RT}, \\ &= \delta \mathbb{D}_{RT} \mathbf{f}_{RT} + \xi_{RT}. \end{aligned} \quad (32)$$

Sans perte de généralité, les deux vecteurs précédents peuvent être mis sous la forme suivante

$$\mathbf{z} = \delta \mathbb{D} \mathbf{f} + \xi \quad (33)$$

où $\mathbb{D} = \mathbb{D}_c$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_c$ et $\xi = \xi_c$ pour le cas conventionnel et $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{RT}$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{RT}$ et $\xi = \xi_{RT}$ pour le cas RT.

5.1. Test d'hypothèse binaire

Le test d'hypothèse binaire pour le signal (33) est

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : & \mathbf{z} = \xi \sim CN(0, \mathbf{R}_\xi), \\ \mathcal{H}_1 : & \mathbf{z} = \delta \mathbf{g} + \xi \sim CN(\delta \mathbf{g}, \mathbf{R}_\xi). \end{cases} \quad (34)$$

$$\text{où } \begin{cases} \mathbf{g} = \mathbb{D}_c \mathbf{f}_c \\ \mathbf{R}_\xi = Bdiag[\sigma_v^2 \mathbf{I}, \sigma_w^2 \mathbf{I}] & \text{cas conventionnel} \\ \mathbf{g} = \mathbb{D}_{RT} \mathbf{f}_{RT} \\ \mathbf{R}_\xi = Bdiag[\sigma_v^2 \mathbf{I}, \sigma^2 \mathbf{I}] & \text{cas RT} \end{cases}$$

5.2. Estimation au sens du maximum de vraisemblance

Le SRL, δ , est l'optimum de la fonction négative log-vraisemblance $L(\mathbf{z}, \delta)$. Cette dernière est donnée par

$$\begin{aligned} L(\mathbf{z}, \delta) &= -\ln(p(\mathbf{z})), \\ &= Q(N + P) \ln(\pi) + QN \ln(\sigma_N^2) + QP \ln(\sigma_P^2) \\ &\quad + \frac{1}{\sigma_N^2} \|\mathbf{z}_N - \delta \mathbf{g}_N\|^2 + \frac{1}{\sigma_P^2} \|\mathbf{z}_P - \delta \mathbf{g}_P\|^2. \end{aligned} \quad (35)$$

où $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_N, \mathbf{z}_P]^T$, $\mathbf{z}_N = [z_{(1)}, \dots, z_{(QN)}]^T$, $\mathbf{z}_P = [z_{(QN+1)}, \dots, z_{(QN+QP)}]^T$, $\mathbf{g} = [\mathbf{g}_N, \mathbf{g}_P]^T$, $\mathbf{g}_N = [g_{(1)}, \dots, g_{(QN)}]^T$ et $\mathbf{g}_P = [g_{(QN+1)}, \dots, g_{(QN+QP)}]^T$, σ_N^2 et σ_P^2 sont des variances des bruits associées des vecteurs d'observations \mathbf{z}_N et \mathbf{z}_P respectivement. Dans le cas conventionnel $(\sigma_N^2, \sigma_P^2) = (\sigma_v^2, \sigma_w^2)$ et dans le cas du retournement temporel $(\sigma_N^2, \sigma_P^2) = (\sigma_v^2, \sigma^2)$.

Le SRL qui minimise l'EMV est donné par

$$\delta_0 = \frac{\sigma_N^2 \sigma_P^2}{\sigma_N^2 \|\mathbf{g}_P\|^2 + \sigma_P^2 \|\mathbf{g}_N\|^2} \Re \left(\frac{1}{\sigma_N^2} \mathbf{g}_N^H \mathbf{z}_N + \frac{1}{\sigma_P^2} \mathbf{g}_P^H \mathbf{z}_P \right) \quad (37)$$

En utilisant (37), on obtient

$$G(\mathbf{z}) = \frac{p(\mathbf{z}; \hat{\delta}_0, \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{z}; \mathcal{H}_0)} \stackrel{\mathcal{H}_0}{\leq} \eta', \quad (38)$$

$$= e^{\left\{ \frac{1}{2\sigma_N^2} (\|\mathbf{z}_N\|^2 - \|\mathbf{z}_N - \delta_0 \mathbf{g}_N\|^2) \right\}} \times e^{\left\{ \frac{1}{2\sigma_P^2} (\|\mathbf{z}_P\|^2 - \|\mathbf{z}_P - \delta_0 \mathbf{g}_P\|^2) \right\}}. \quad (39)$$

Exploitant (37) dans (39) et définissant une nouvelle statistique $T(\mathbf{z})$, on obtient

$$T(\mathbf{z}) = 2 \ln(G(\mathbf{z})) \quad (40)$$

$$= \frac{\sigma_N^2 \sigma_P^2}{\sigma_N^2 \|\mathbf{g}_P\|^2 + \sigma_P^2 \|\mathbf{g}_N\|^2} \Re^2 \left(\frac{1}{\sigma_N^2} \mathbf{g}_N^H \mathbf{z}_N + \frac{1}{\sigma_P^2} \mathbf{g}_P^H \mathbf{z}_P \right) \quad (41)$$

La loi de la nouvelle statistique est donnée par

$$T(\mathbf{z}) \sim \begin{cases} \chi_1^2 & \text{sous } \mathcal{H}_0, \\ \chi_1^2(\lambda) & \text{sous } \mathcal{H}_1. \end{cases} \quad (42)$$

où χ_1^2 représente la distribution du chi-2 centrée avec un seul degré de liberté et le paramètre de décentrage λ est donné par

$$\lambda = 2\delta^2 \left(\frac{\|\mathbf{g}_N\|^2}{\sigma_N^2} + \frac{\|\mathbf{g}_P\|^2}{\sigma_P^2} \right) \quad (43)$$

6. EXPRESSION DU SRL

De l'équation (43) et selon le modèle considéré, nous allons calculer les expressions du SNR minimal nécessaire pour séparer deux sources proches.

6.1. Modèle conventionnel

Les paramètres de l'équation (43) sont donnés par $\mathbf{g}_N = \mathbf{Df}_A$, $\mathbf{g}_P = \mathbf{Df}_B$, $\sigma_N^2 = \sigma_v^2$ et $\sigma_P^2 = \sigma_w^2$, conduisant à

$$\lambda = 2\delta^2 \left(\frac{\|\mathbf{Df}_A\|^2}{\sigma_v^2} + \frac{\|\mathbf{Df}_B\|^2}{\sigma_w^2} \right) \quad (44)$$

En mettant $\sigma_w^2 = \kappa \sigma_v^2$ et $\text{SNR} = \frac{\|\mathbf{f}_A\|^2}{\sigma_v^2}$, on peut avoir

$$\lambda = 2\delta^2 \text{SNR} \left(\frac{\|\mathbf{Df}_A\|^2}{\|\mathbf{f}_A\|^2} + \frac{\beta^2 \|\mathbf{Df}_B\|^2}{\kappa \|\mathbf{f}_A\|^2} \right) \quad (45)$$

et finalement

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda \|\mathbf{f}_A\|^2}{2\text{SNR} \left(\|\mathbf{Df}_A\|^2 + \frac{\beta^2}{\kappa} \|\mathbf{Df}_B\|^2 \right)}} \quad (46)$$

où $\beta_c^2 = \frac{\|\mathbf{f}_A\|^2}{\|\mathbf{f}_B\|^2}$.

6.2. Modèle du retournement temporel

Dans ce cas, les paramètres de l'équation (43) sont donnés par $\mathbf{g}_P = \beta_{RT} \left(\mathbf{W}_0 \mathbf{H}_d - \frac{\beta_{RT}^2 \sigma_v^2}{2\sigma^2} \mathbf{W}_0^{\frac{3}{2}} \mathbf{H}_d \mathbf{W}_0^{\frac{3}{2}} \mathbf{H}_c \right) \mathbf{f}_A^*$, $\sigma_N^2 = \sigma_v^2$, $\sigma_P^2 = \sigma^2$, $\mathbf{g}_N = \mathbf{Df}_A$. Dans la suite, nous avons $\mathbf{W}_0 = \sigma \mathbf{R}_0^{-\frac{1}{2}}$, $\mathbf{R}_0 = \sigma_v^2 \mathbf{C}_0$ où $\mathbf{C}_0 = \beta_{RT}^2 \mathbf{H}_c + \kappa \mathbf{I}$ et $\kappa = \frac{\sigma_v^2}{\sigma^2}$. Sous ces définitions, l'équation (43) devient

$$\lambda = 2\delta^2 \frac{\text{SNR}}{\|\mathbf{f}_A\|^2} \times \left(\|\mathbf{Df}_A\|^2 + \beta_{RT}^2 \left\| \left(\mathbf{C}_0^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}_d - \frac{\beta_{RT}^2}{2} \mathbf{C}_0^{-\frac{3}{4}} \mathbf{H}_d \mathbf{C}_0^{-\frac{3}{4}} \mathbf{H}_c \right) \mathbf{f}_A^* \right\|^2 \right) \quad (47)$$

où $\text{SNR} = \frac{\|\mathbf{f}_A\|^2}{\sigma_v^2}$ et

$$\beta_{RT}^2 = \frac{\|\mathbf{f}_A\|^2}{\|\mathbf{r}^*\|^2} = \frac{\|\mathbf{f}_A\|^2}{\left\| \sum_{l=1}^L \mathbf{A}_l^* \mathbf{f}_A^* \right\|^2 + QN\sigma_v^2}, \quad (48)$$

$$= \frac{\|\mathbf{f}_A\|^2}{\|\mathbf{A}_{cc}^* \mathbf{f}_A^* + \delta \mathbf{Df}_A^*\|^2 + QN\sigma_v^2}, \quad (49)$$

$$\approx \frac{\|\mathbf{f}_A\|^2}{\|\mathbf{A}_{cc}^* \mathbf{f}_A^*\|^2 + QN\sigma_v^2} = \frac{1}{\frac{1}{\beta^2} + \frac{QN}{\text{SNR}}}$$

où $\tilde{\beta}^2 = \frac{\|\mathbf{f}_A\|^2}{\|\mathbf{A}_{cc}^* \mathbf{f}_A^*\|^2}$ et $\text{SNR} = \frac{\|\mathbf{f}_A\|^2}{\sigma_v^2}$. Afin de garder le deuxième ordre de l'équation (47) par rapport à δ , nous avons pris uniquement le terme constant de β_{RT}^2 comme il est montré dans l'équation (49).

Finalement, le SRL est donné par

$$\delta = \sqrt{\frac{\lambda \|\mathbf{f}_A\|^2}{2\text{SNR} \left(\|\mathbf{Df}_A\|^2 + \beta_{RT}^2 \left\| \left(\mathbf{C}_0^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}_d - \frac{\beta_{RT}^2}{2} \mathbf{C}_0^{-\frac{3}{4}} \mathbf{H}_d \mathbf{C}_0^{-\frac{3}{4}} \mathbf{H}_c \right) \mathbf{f}_A^* \right\|^2 \right)}} \quad (50)$$

Remarque : Le SNR minimal nécessaire pour résoudre deux SDI, pour un SRL donné, peut être obtenu directement des deux équation (46) et (50) selon le cas considéré.

7. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans cette section, nous considérons deux antennes linéaires uniformes co-localisées A et B avec $P = N = 15$ capteurs. Les signaux émis sont choisis de telle sorte qu'ils partagent la même bande de fréquence et sont orthogonaux entre eux. Ici, ces signaux sont donnés par (selon le schéma de codage de phase de [4]) $[\mathbf{f}_A(w_q)]_m = [\mathbf{f}_B(w_q)]_m = e^{j2\pi \frac{mq}{Q}} f(w_q)$, où

$w_q = q\Delta f$, $\Delta f = \frac{B}{Q}$, $B = 50MHz$ est la bande de fréquence et $Q = 25$.

Dans cette simulation, nous nous intéressons au seuil de résolution angulaire limite. Pour cela, les antennes A et B éclairent $L = 4$ sources où deux d'entre elles sont dans le même voisinage. Leurs différentes distance respectives sont $r_1 = 1000$, $r_2 = 1200$, $r_3 = 1600$ et $r_4 = 800$. Les coefficients d'atténuation sont supposés être réels et donnés par $\alpha_1 = 0,9$, $\alpha_2 = 0,8$, $\alpha_3 = 0,7$ et $\alpha_4 = 0,6$. La direction d'arrivée centrale des deux sources proches est $\theta_c = 15^\circ$ et les autres directions sont données par $\theta_3 = 60^\circ$ et $\theta_4 = 80^\circ$. Les probabilités de détection et de fausse alarme sont $P_D = 0,99$ et $P_{fa} = 0,01$.

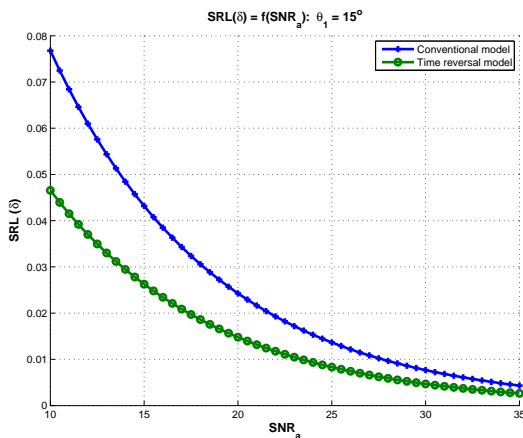


Fig. 2. Modèle conventionnel VS modèle RT : $\theta = 15^\circ$

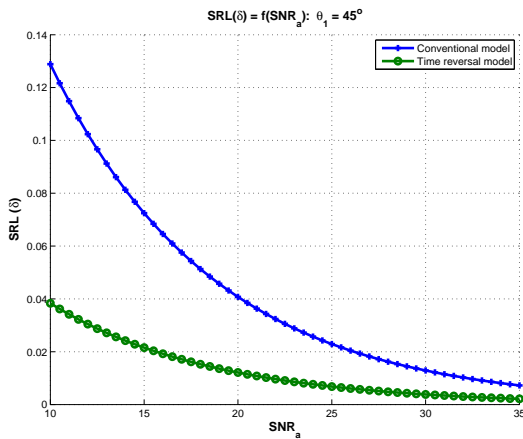


Fig. 3. Modèle conventionnel VS modèle RT : $\theta = 45^\circ$

De la Fig. 2, on peut observer que l'utilisation de l'approche du retournement temporel améliore le SRL. En particulier, pour un seuil de $\delta = 0.01$, nous avons besoin d'un $SNR = 27.5 dB$ pour le cas conventionnel alors qu'on a besoin uniquement de $SNR = 23.5 dB$ dans le cas du retournement temporel ce qui montre qu'on a un gain de $4 dB$. De la Fig. 3, on peut observer que ce gain peut dépasser les $10 dB$ pour le même SRL et ce lorsque la direction centrale des deux SDI passe de 15° à 45° .

8. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons montré que le retournement temporel peut améliorer le seuil de résolution limite et le gain obtenu peut être très important. Il est montré que celui-ci dépend de la direction d'arrivée (gain très important dans les directions latérales). Les développements théoriques et les expressions analytiques du SRL sont donnés dans les deux cas sans et avec retournement temporel. L'efficacité de cette approche du retournement temporel est illustrée à travers des simulations numériques.

9. REFERENCES

- [1] I. Bekkerman, J. Tabrikian, "Target detection and localization using mimo radars and sonars," *In Proc. ICASSP*, vol. 54, Oct. 2006.
- [2] J. Li, P. Stoica, *MIMO Radar Signal Processing*. John Wiley and Sons, Inc, 2009.
- [3] F. Foroozan, A. Asif, "Time reversal based active array source localization," *IEEE Tr. on Sig. Proc.*, vol. 59, pp. 210–225, Feb. 2011.
- [4] J. Yuanwei, J.M.F. Moura, N. O'Donoghue, "Time reversal in multiple-input multiple-output radar," *IEEE Jour. of Sel. Topics in Sig. Proc.*, vol. 4, pp. 210–225, Feb. 2010.
- [5] A.J. Den Dekker, A. Van Den Bos, "Resolution, a survey," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 14, pp. 547–557, Mar. 1997.
- [6] S.T. Smith, "Statistical resolution limits and the complexified Cramér Rao Bound," *IEEE Tr. on Sig. Proc.*, vol. 53, pp. 1597–1609, May 2005.
- [7] Z. Liu, A. Nehorai, "Statistical angular resolution limit for point sources," *IEEE Tr. on Sig. Proc.*, vol. 55, pp. 5521–5527, Nouv. 2007.
- [8] R. Boyer, "Performance bounds and angular resolution limit for the moving colocated MIMO radar," *IEEE Tr. on Sig. Proc.*, vol. 59, 2011.
- [9] F. Foroozan, A. Asif, R. Boyer, "Time Reversal MIMO Radar : Improved CRB and Angular Resolution Limit," *In Proc. ICASSP*, May 2013.
- [10] M. N. El korso, R. Boyer, A. Renaux, S. Marcos, "Statistical resolution limit for source localization with clutter interference in a MIMO radar context," *IEEE Tr. on Sig. Proc.*, vol. 60, pp. 987–992, Feb. 2012.
- [11] M. N. El korso, R. Boyer, A. Renaux, S. Marcos, "On the asymptotic resolvability of two point sources in known subspace interference using a GLRT-based framework," *Signal Processing*, vol. 92, pp. "2471 – 2483", Oct. 2012.
- [12] S. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume II : Detection Theory*. Prentice Hall, 1998.