



HAL
open science

Frobenius et ramification logarithmique

Stéphanie Réglade

► **To cite this version:**

| Stéphanie Réglade. Frobenius et ramification logarithmique. 2014. hal-00999768v1

HAL Id: hal-00999768

<https://hal.science/hal-00999768v1>

Preprint submitted on 4 Jun 2014 (v1), last revised 27 Jan 2015 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FROBENIUS ET RAMIFICATION LOGARITHMIQUE

Stéphanie Reglade

Résumé : *Étant donnée $K_{\mathfrak{p}}$ une extension finie de $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$, nous considérons le ℓ -adifié du groupe multiplicatif associé $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$, muni de la valuation logarithmique introduite par Jaulent. Par rapport à l'article précédent [4], nous remplaçons la pro- ℓ -extension abélienne maximale non ramifiée de $K_{\mathfrak{p}}$ par sa \mathbb{Z}_{ℓ} -extension cyclotomique, et la valuation usuelle par la valuation logarithmique. Nous montrons alors que la théorie abstraite du corps des classes de Neukirch s'applique aussi dans ce contexte local permettant d'obtenir un symbole local logarithmique, puis nous étudions le cas global. Cela conduit à la construction d'un Frobenius logarithmique, dans le contexte de la ramification logarithmique. Ce dernier coïncide avec le Frobenius classique lorsque les ramification classique et logarithmique sont les mêmes.*

Abstract : *Given $K_{\mathfrak{p}}$ a finite extension of $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$, we study the ℓ -adification of the multiplicative group of our local field $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ endowed with the logarithmic valuation introduced by Jaulent. Compared to the previous article [4], we replace here the maximal, abelian unramified pro- ℓ -extension of $K_{\mathfrak{p}}$ by the \mathbb{Z}_{ℓ} -cyclotomic one, and the usual valuation by the logarithmic one. We show that it is possible to use Neukirch's abstract theory [1] in this context. Thus, it allows to define a logarithmic local symbol, a global one and a logarithmic Frobenius. The interesting point is that usual and logarithmic Frobenius coincide when usual and logarithmic ramification are the same.*

Mots-clefs : théorie du corps des classes, théorie ℓ -adique du corps des classes.

AMS Classification : 11R37

Table des matières

1	Ramification logarithmique	4
2	Le cas local	6
2.1	L'application degré	6
2.2	Le G -module	7
2.3	Valuation logarithmique et degrés ℓ -adiques	7
2.4	Le symbole local logarithmique	8
3	Le cas global	10
3.1	G et le G -module	10
3.2	L'application degré	10
3.3	La valuation	10
4	Le conducteur logarithmique	11
5	Le Frobenius logarithmique	12
5.1	Définitions et premières propriétés	12
5.2	Le cas quadratique	15
5.3	Généralisation : du cas quadratique à celui d'une ℓ -extension	17

Introduction :

Cet article repose sur l'observation suivante : L/K étant une extension de corps de nombres, \mathfrak{p} une place de K logarithmiquement non ramifiée dans L selon la définition posée par Jaulent dans [2] :

$$L_{\mathfrak{p}} \subseteq \hat{K}_{\mathfrak{p}}^c$$

où $\hat{K}_{\mathfrak{p}}^c$ désigne la $\hat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique de $K_{\mathfrak{p}}$. alors le sous-groupe de décomposition est cyclique. D'où la question naturelle : pouvons nous dans ce contexte mettre en évidence un générateur particulier de ce sous-groupe de décomposition, qui jouerait le rôle dans le cas logarithmique du Frobenius classique ?

La théorie ℓ -adique du corps des classes de Jaulent [3] établit, dans le cas local, l'existence d'un isomorphisme entre le groupe de Galois de toute ℓ -extension abélienne finie d'un corps local $K_{\mathfrak{p}}$ et un quotient du ℓ -adifié du groupe multiplicatif de ce corps local, $R_{K_{\mathfrak{p}}}$; et dans le cas global l'existence d'un isomorphisme entre le groupe de Galois de toute ℓ -extension abélienne finie d'un corps de nombres K et un quotient du ℓ -adifié du groupe des idèles. D'après [4], la théorie ℓ -adique peut se déduire de la théorie abstraite, développée par Neukirch dans [1]. Le contexte de Neukirch est celui d'une théorie de Galois abstraite avec pour point de départ un groupe G abstrait profini. Cette théorie abstraite repose sur l'existence de deux morphismes fondamentaux : le degré et la valuation et sur l'axiome du corps des classes : condition cohomologique sur le G -module A que nous étudions.

Par rapport à [4], nous considérons le même objet local, à savoir, le ℓ -adifié du groupe multiplicatif d'un corps local que précédemment. Cette fois-ci nous le munissons de la valuation logarithmique introduite par Jaulent, dont nous rappelons la construction. Et nous modifions également l'application degré. De façon générale, pour un corps local $K_{\mathfrak{p}}$, nous remplaçons aussi sa \mathbb{Z}_{ℓ} -extension non ramifiée par sa \mathbb{Z}_{ℓ} -extension cyclotomique, et la valuation usuelle de $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ par la valuation logarithmique : les différences par rapport au contexte local précédent vont donc apparaître pour les places au dessus de ℓ .

Le but est de montrer que le contexte logarithmique peut aussi être compris grâce à la théorie abstraite de Neukirch. Ainsi nous obtenons pour une ℓ -extension locale un symbole local logarithmique qui ne diffère du symbole local ℓ -adique que pour les places \mathfrak{p} au dessus de ℓ . L'intérêt réside dans le fait que nous sommes alors en mesure de définir un Frobenius logarithmique associé au contexte de la ramification logarithmique : ce dernier coïncide avec le Frobenius classique sauf pour les places au dessus de ℓ : cela permet donc d'étendre la théorie à des places \mathfrak{p} au dessus de ℓ ramifiées au sens classique mais non ramifiées au sens logarithmique. Nous obtenons l'expression suivante pour ce dernier sur \mathbb{Q}_p :

Proposition : *Soit ζ une racine de l'unité d'ordre une puissance de ℓ , et $a \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$, alors nous obtenons l'expression suivante pour le symbole local logarithmique :*

$$(a, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p)_{\ell})(\zeta) = \zeta^{n_p}$$

avec

$$n_p = \begin{cases} p^{v_p(a)} & \text{for } p \neq \ell \text{ et } p \neq \infty \\ (1 + \ell)^{-\tilde{v}_{\ell}(a)} & \text{pour } p = \ell \\ \text{sgn}(a) & \text{pour } p = \infty \end{cases}$$

où $(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})_{\ell}$ dénote la projection sur le ℓ - sous-groupe de Sylow de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$.

Puis nous étudions le cas global. Cela conduit à la construction explicite du Frobenius logarithmique dans le contexte logarithmique :

Définition Soit L/K une ℓ -extension abélienne finie. Soit \mathfrak{p} une place de K logarithmiquement non ramifiée dans L . Soit $D\ell_K$ le groupe des diviseurs logarithmiques de K . Soit $\tilde{f}_{L/K}$ le conducteur logarithmique global de L/K , et $D\ell_K^{\tilde{f}_{L/K}}$ les diviseurs logarithmiques premiers à δ_K . Nous définissons l'application suivante pour une place \mathfrak{p} :

$$\begin{aligned} \widetilde{\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)} : D\ell_K^{\tilde{f}_{L/K}} &\rightarrow \text{Gal}(L/K) \\ \mathfrak{p} &\mapsto \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) \end{aligned}$$

où le Frobenius logarithmique est

$$\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) = ([\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}], L/K)$$

avec $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}$ l'uniformisante logarithmique, définie préalablement et $[\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}]$ l'image de $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}$ dans \mathcal{J}_K . Nous étendons cette application, par multiplicativité à $D\ell_K^{\tilde{f}_{L/K}}$. Cette application est alors appelée application d'Artin logarithmique.

Nous étudions les propriétés de cette application, en explicitons le noyau. Nous détaillons pour finir l'exemple du cas quadratique et le généralisons dans le cas d'une ℓ -extension.

Notations

Dans tout ce qui suit ℓ désigne un nombre premier fixé. Introduisons les notations suivantes

Pour un corps local $K_{\mathfrak{p}}$ d'idéal maximal \mathfrak{p} et d'uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}}$, nous notons

$$\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim_k K_{\mathfrak{p}}^{\times} / K_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^k} : \text{le } \ell\text{-adifié du groupe multiplicatif du corps local}$$

$$\mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim_k U_{\mathfrak{p}} / U_{\mathfrak{p}}^{\ell^k} : \text{le } \ell\text{-adifié du groupe des unités } U_{\mathfrak{p}} \text{ de } K_{\mathfrak{p}}$$

$$U_{\mathfrak{p}}^1 : \text{le groupe des unités principales de } K_{\mathfrak{p}}$$

$$\mu_{\mathfrak{p}}^0 : \text{le sous-groupe de } U_{\mathfrak{p}}, \text{ d'ordre fini et premier à } \mathfrak{p}$$

$$\mu_{\mathfrak{p}} : \text{le } \ell\text{-sous-groupe de Sylow de } \mu_{\mathfrak{p}}^0$$

Pour un corps de nombre K , nous définissons

$$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\times} : \text{le } \ell\text{-groupe des idéles principaux}$$

$$\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K}^{res} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} : \text{le } \ell\text{-groupe des idéles}$$

$$\mathcal{U}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}} : \text{le sous-groupe des unités}$$

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K : \text{le } \ell\text{-groupe des classes d'idèles}$$

Dans le contexte logarithmique, nous posons

$$\hat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^{\mathcal{C}} : \text{la } \hat{\mathbb{Z}}\text{-extension cyclotomique de } \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$$

$$\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}^{\mathcal{C}} : \text{la } \mathbb{Z}_{\ell}\text{-extension cyclotomique de } \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$$

$\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$: la valuation logarithmique associée à \mathfrak{p} sur $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$
 $\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} = \text{Ker}(\tilde{v}_{\mathfrak{p}})$: le sous groupe des unités logarithmiques locales
 $\tilde{\mathcal{U}}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$: le sous-groupe des unités logarithmiques
 $\tilde{e}_{\mathfrak{p}} = [K_{\mathfrak{p}} : \hat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c \cap K_{\mathfrak{p}}]$: l'indice absolu de ramification logarithmique de \mathfrak{p}
 $\tilde{f}_{\mathfrak{p}} = [\hat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c \cap K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}]$: le degré absolu d'inertie logarithmique de \mathfrak{p}
 $\tilde{e}_{L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}} = [L_{\mathfrak{p}} : \hat{K}_{\mathfrak{p}}^c \cap L_{\mathfrak{p}}]$: l'indice relatif de ramification logarithmique de \mathfrak{p}
 $\tilde{f}_{L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}} = [\widehat{K}_{\mathfrak{p}}^c \cap L_{\mathfrak{p}} : K_{\mathfrak{p}}]$: le degré relatif d'inertie logarithmique de \mathfrak{p}
 $\mathcal{J}_K^{(m)} = \prod_{\mathfrak{p} | m} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \prod_{\mathfrak{p} | m} \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}^{v_{\mathfrak{p}}(m)}$
 $\mathcal{J}_K^m = \prod_{\mathfrak{p} | m} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \prod_{\mathfrak{p} | m} \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$
 $\tilde{\mathcal{U}}_K^{(m)} = \prod_{\mathfrak{p} | m} \mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}} \prod_{\mathfrak{p} | m} \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}^{v_{\mathfrak{p}}(m)}$
 $\mathcal{R}_K^{(m)} = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_K^{(m)}$

$$\psi : \mathcal{J}_K^m \longrightarrow D\ell_K^m$$

$$\alpha = (\alpha_{\mathfrak{p}}) \longmapsto \psi(\alpha) = \prod \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\alpha_{\mathfrak{p}})}$$

$D\ell_K^m = \psi(\mathcal{J}_K^m)$: diviseurs logarithmiques premiers à m
 $P\ell_K^{(m)} = \psi(\mathcal{R}_K^{(m)})$: diviseurs logarithmiques principaux attachés à m
 $\tilde{f}_{L/K}$: le conducteur logarithmique global de L/K
 $\tilde{f}_{\mathfrak{p}}$: le conducteur logarithmique local en \mathfrak{p}
 $(\frac{L/K}{\mathfrak{p}})$: le Frobenius logarithmique en \mathfrak{p}
 $A\ell_{L/K}$ le groupe d'Artin logarithmique de L/K

1 Ramification logarithmique

Nous présentons dans cette partie la notion de ramification logarithmique développée par Jaulent dans [2].

Soit K un corps de nombres, p un nombre premier, \mathfrak{p} un premier de K au dessus de p . Notons $\widehat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c$ la $\widehat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$, c'est à dire le compositum de toutes les \mathbb{Z}_q -extensions cyclotomique de $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ pour tous les nombres premiers q .

Definition 1. *Indices absolus : [2, définition 1.3]*

i) l'indice logarithmique de ramification absolu de \mathfrak{p} est défini par :

$$\tilde{e}_{\mathfrak{p}} = [K_{\mathfrak{p}} : \hat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c \cap K_{\mathfrak{p}}]$$

ii) le degré d'inertie logarithmique de \mathfrak{p} est :

$$\tilde{f}_{\mathfrak{p}} = [\hat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c \cap K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}]$$

iii) K/\mathbb{Q} est dite logarithmiquement non ramifiée en \mathfrak{p} si $\tilde{e}_{\mathfrak{p}} = 1$, ce qui signifie $K_{\mathfrak{p}} \subseteq \widehat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c$.

$$\begin{array}{ccc}
& \widehat{\mathbb{Q}}_p^c & \\
& | & \\
\widehat{\mathbb{Q}}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\tilde{e}_{\mathfrak{p}}} & K_{\mathfrak{p}} \\
& | \tilde{f}_{\mathfrak{p}} & \\
& \mathbb{Q}_p &
\end{array}$$

Remarque fondamentale : [5, 1.1.3]

Supposons que K/\mathbb{Q} soit une ℓ -extension finie, ainsi il existe n tel que $[K : \mathbb{Q}] = \ell^n$. Alors l'extension $\widehat{\mathbb{Q}}_p^c/\mathbb{Q}_p^c$ contient uniquement des sous-extensions de degré premier à ℓ . En particulier le degré $[\widehat{\mathbb{Q}}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}}]$ est premier à ℓ et comme il divise ℓ^n , nous en déduisons que $[\widehat{\mathbb{Q}}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}}] = 1$. L'égalité des corps $\widehat{\mathbb{Q}}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}}$ implique les caractérisations suivantes :

$$\tilde{e}_{\mathfrak{p}} = 1 \Leftrightarrow K_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathbb{Q}_p^c$$

et

$$\tilde{f}_{\mathfrak{p}} = 1 \Leftrightarrow \mathbb{Q}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}_p^c.$$

Comme $\mathbb{Q}_p^c/\mathbb{Q}_p$ est une extension Galoisienne, la condition précédente implique que les extensions $K_{\mathfrak{p}}$ et \mathbb{Q}_p^c sont linéairement disjointes sur \mathbb{Q}_p .

Comme nous travaillons uniquement avec des ℓ -extensions, les définitions que nous donnons dans la sous-section contexte logarithmique sont celles obtenues en remplaçant $\widehat{\mathbb{Q}}_p^c$ par \mathbb{Q}_p^c .

Ainsi nous avons le diagramme suivant : [5, 1.1.3]

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \mathbb{Q}_p^c & \xrightarrow{\prod_{q \neq \ell} \mathbb{Z}_q} & \widehat{\mathbb{Q}}_p^c & \xrightarrow{\quad} & \widehat{K}_{\mathfrak{p}}^c \\
& & | & & | & & | \\
\mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\tilde{f}_{\mathfrak{p}}} & \mathbb{Q}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}} & \xlongequal{\quad} & \widehat{\mathbb{Q}}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\tilde{e}_{\mathfrak{p}}} & K_{\mathfrak{p}} \\
| & & & & & & | \\
\mathbb{Q} & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & K
\end{array}$$

Definition 2. *Indices relatifs :*

Soit L/K une extension finie de corps de nombres, \mathfrak{P} un premier de L au dessus de \mathfrak{p} . Notons $\widehat{K}_{\mathfrak{p}}^c$ le compositum de $K_{\mathfrak{p}}$ et de $\widehat{\mathbb{Q}}_p^c$,

i) l'indice relatif de ramification logarithmique de \mathfrak{p} est :

$$\tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = [L_{\mathfrak{P}} : \widehat{K}_{\mathfrak{p}}^c \cap L_{\mathfrak{P}}]$$

ii) le degré d'inertie relatif logarithmique de \mathfrak{p} est :

$$\tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = [\widehat{K}_{\mathfrak{p}}^c \cap L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}]$$

iii) L/K est dite logarithmiquement \mathfrak{p} if $\tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = 1$, ce qui implique $L_{\mathfrak{P}} \subseteq \widehat{K}_{\mathfrak{p}}^c$.

Nous avons le schéma suivant : [5, 1.1.3]

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & L_{\mathfrak{P}} \\
 & & & \nearrow \tilde{f}_{\mathfrak{P}} & \downarrow \tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \\
 & & L_{\mathfrak{P}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c & \xrightarrow{\tilde{e}_p} & \widehat{K}_{\mathfrak{p}}^c \cap L_{\mathfrak{P}} \\
 \tilde{e}_{\mathfrak{P}} \nearrow & & \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \\
 \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{\tilde{f}_p} & K_{\mathfrak{p}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c & \xrightarrow{\tilde{e}_p} & K_{\mathfrak{p}}
 \end{array}$$

et les relations :

$$\tilde{e}_{\mathfrak{P}} = \tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \cdot \tilde{e}_p \quad \text{et} \quad \tilde{f}_{\mathfrak{P}} = \tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \cdot \tilde{f}_p$$

Proposition 1.0.1. [2, theorem 1.4] Avec les notations précédentes, les indices classiques et logarithmiques sont liés par la formule :

$$\tilde{e}_p \cdot \tilde{f}_p = e_p \cdot f_p$$

2 Le cas local

2.1 L'application degré

La $\hat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique de \mathbb{Q}_p nous donne un isomorphisme du $\text{Gal}(\hat{\mathbb{Q}}_p^c/\mathbb{Q}_p)$ sur $(\prod_{p \neq 2} U_p^1)U_2^2$, que l'on transporte par le logarithme sur $\hat{\mathbb{Z}}$. Pour extension finie $K_{\mathfrak{p}}$ de \mathbb{Q}_p , nous obtenons sa $\hat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique comme le compositum de $K_{\mathfrak{p}}$ et de la $\hat{\mathbb{Z}}$ -extension de \mathbb{Q}_p . En considérant les pro- ℓ -parties, nous obtenons respectivement la \mathbb{Z}_{ℓ} -extension cyclotomique de \mathbb{Q}_p et la \mathbb{Z}_{ℓ} -extension cyclotomique de $K_{\mathfrak{p}}$, notée $K_{\mathfrak{p}}^c$.

Nous définissons l'application degré par :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{deg} : G = \text{Gal}(K_{\mathfrak{p}}^{ab}/K_{\mathfrak{p}}) & \rightarrow & \mathbb{Z}_{\ell} \\
 \phi & \mapsto & \phi|_{K_{\mathfrak{p}}^c}
 \end{array}$$

où $K_{\mathfrak{p}}^{ab}$ désigne la pro- ℓ -extension abélienne maximale de $K_{\mathfrak{p}}$. C'est un homomorphisme continu et surjectif, dont le noyau est le groupe de Galois $\text{Gal}(K_{\mathfrak{p}}^{ab}/K_{\mathfrak{p}}^c)$. Nous suivons alors la construction abstraite de Neukirch. Pour $L_{\mathfrak{P}}$ une ℓ -extension finie de $K_{\mathfrak{p}}$, l'indice de ramification logarithmique et le degré d'inertie logarithmique apparaissent alors naturellement, définis par :

$$\tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = [L_{\mathfrak{P}} \cap K_{\mathfrak{p}}^c : K_{\mathfrak{p}}] \quad \tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = [L_{\mathfrak{P}} : L_{\mathfrak{P}} \cap K_{\mathfrak{p}}^c]$$

Ces définitions coïncident alors avec celles données par Jaulent [2] .

Remarque : Dans les définitions précédentes, nous avons pu remplacer $\hat{K}_{\mathfrak{p}}^c$ par $K_{\mathfrak{p}}^c$ respectivement car nous travaillons avec des ℓ -extensions.

2.2 Le G -module

Nous introduisons le ℓ -adifié du groupe multiplicatif du corps local considéré : $\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim_k L_{\mathfrak{p}}^{\times} / L_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^k}$ tel qu'il a été défini par Jaulent [3, définition-proposition 1.2]. Le G -module considéré est le même que dans [4, §2.2] $A = \varinjlim_{L_{\mathfrak{p}}} \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}}$ où $L_{\mathfrak{p}}$ parcourt les extensions finies de $K_{\mathfrak{p}}$. Il s'identifie canoniquement à : $A = \bigcup_{[L_{\mathfrak{p}}:K_{\mathfrak{p}}] < \infty} \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}}$. Si $L_{\mathfrak{p}}$ est une extension finie de $K_{\mathfrak{p}}$, $A_{L_{\mathfrak{p}}} = \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}}$ est le $Gal(L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})$ -module que nous allons étudier.

2.3 Valuation logarithmique et degrés ℓ -adiques

Definition 3. Soit K une extension finie de \mathbb{Q} , p un nombre premier. Notons $\widehat{\mathbb{Q}}_p^c$ la $\widehat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique de \mathbb{Q}_p . Soit \mathfrak{p} une place de K au dessus de p ,

i) le degré ℓ -adique de p est donné par la formule : $deg_{\ell}(p) = \begin{cases} Log_{I_w}(p) & \text{si } p \neq \ell \\ -Log_{I_w}(1 + \ell) & \text{si } p = \ell \text{ et } \ell \neq 2 \\ -Log_{I_w}(3) & \text{si } p = \ell \text{ et } \ell = 2 \end{cases}$

ii) le degré ℓ -adique de \mathfrak{p} est défini par la formule : $deg(\mathfrak{p}) = \tilde{f}_{\mathfrak{p}} \cdot deg_{\ell}(p)$

iii) Si $v_{\mathfrak{p}}$ désigne la valuation usuelle normalisée de $K_{\mathfrak{p}}$, la valeur absolue ℓ -adique principale est définie sur $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$ par la formule :

$$\text{si } \mathfrak{p} \nmid \ell \text{ alors } |x_{\mathfrak{p}}| = \langle N_{\mathfrak{p}}^{-v_{\mathfrak{p}}(x)} \rangle$$

$$\text{si } \mathfrak{p} \mid \ell \text{ alors } |x_{\mathfrak{p}}| = \langle N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\ell}}(x) N_{\mathfrak{p}}^{-v_{\mathfrak{p}}(x)} \rangle$$

où N désigne la norme absolue de \mathfrak{p} et où $u \rightarrow \langle u \rangle$ désigne la surjection canonique de $\mathbb{Z}_{\ell}^{\times}$ sur le groupe des unités principales

iv) la valuation logarithmique associée à \mathfrak{p} est : $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(x) = -Log_{I_w}(N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}(x)) / deg(\mathfrak{p})$, définie sur $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ et à valeurs dans \mathbb{Z}_{ℓ} , [1][proposition 1.2]

Remarque : La définition de la valuation logarithmique diffère de celle donnée par Jaulent [2, définition 1.1] : en fait l'expression du degré ℓ -adique $deg_{\ell}(\ell)$ est ℓ dans la définition initiale et $-Log_{I_w}(1 + \ell)$ dans notre cas. C'est dû au fait que nous voulons une expression explicite pour les uniformisantes associées à la valuation logarithmique.

Proposition 2.3.1. [2, proposition 1.2]

Soit p un nombre premier, \mathbb{Q}_p^c la $\widehat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique de \mathbb{Q}_p , $K_{\mathfrak{p}}$ une extension finie de degré $d_{\mathfrak{p}}$ sur \mathbb{Q}_p , et $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ la valeur absolue ℓ -adique principale sur $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$:

i) pour tout $x \in K_{\mathfrak{p}}^{\times}$ l'expression $h_{\mathfrak{p}}(x) = -Log(|x|_{\mathfrak{p}} / d_{\mathfrak{p}} \cdot Log(p))$ ne dépend pas du choix de l'extension de \mathbb{Q}_p contenant x

ii) la restriction $h_{\mathfrak{p}}$ de h_p au groupe multiplicatif $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$, induit un \mathbb{Z}_{ℓ} -morphisme de $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ sur \mathbb{Z}_{ℓ} , dont le noyau est $\tilde{U}_{K_{\mathfrak{p}}}$, et dont l'image est le \mathbb{Z}_{ℓ} -réseau $1/\tilde{e}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbb{Z}_{\ell}$

iii) la valuation logarithmique satisfait : $\tilde{v}_{\mathfrak{p}} = \tilde{e}_{\mathfrak{p}} \cdot h_{\mathfrak{p}}$.

Proposition 2.3.2. Valuations logarithmique et usuelle [2, proposition 1.2]

Dans le même contexte, si \mathfrak{p} est une place qui n'est pas au dessus de ℓ , les valuations classiques et logarithmiques sont proportionnelles sur $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$:

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}} = \frac{f_{\mathfrak{p}}}{\tilde{f}_{\mathfrak{p}}} \cdot v_{\mathfrak{p}} = \frac{\tilde{e}_{\mathfrak{p}}}{f_{\mathfrak{p}}}$$

Proposition 2.3.3. *Uniformisantes pour la valuation logarithmique :*

Dans le même contexte, si \mathfrak{p} est une place au dessus de ℓ , alors $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}|_{1+\ell}$ est une uniformisante pour la valuation logarithmique, et si \mathfrak{p} ne divise pas ℓ , l'uniformisante classique $\pi_{\mathfrak{p}}$ est aussi une uniformisante pour la valuation logarithmique.

Démonstration. Dans le premier, cas $N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}(\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}) = (1 + \ell)^{\tilde{f}_{\mathfrak{p}}}$, $\deg(\mathfrak{p}) = \tilde{f}_{\mathfrak{p}} \cdot \text{Log}_{I_w}(1 + \ell)$ d'après les définitions, ainsi $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}) = 1$. Dans le second cas, $N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}(\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}) = (p)^{\tilde{f}_{\mathfrak{p}}}$, $\deg(\mathfrak{p}) = \tilde{f}_{\mathfrak{p}} \cdot \text{Log}_{I_w}(p)$ par définitions, d'où la proposition. \square

Proposition 2.3.4. *La valuation logarithmique $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$ satisfait les deux propriétés :*

(i) $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}) = Z$ tel que $\mathbb{Z} \subset Z$ et $Z/n \cdot Z \simeq \mathbb{Z}/n \cdot \mathbb{Z}$ pour tout n

(ii) $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{F}}}) = \tilde{f}_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}} \cdot Z$ pour toute extension finie $L_{\mathfrak{F}}$ of $K_{\mathfrak{p}}$.

Ainsi la valuation logarithmique est hensélienne par rapport deg selon la définition de Neukirch.

Démonstration. Pour le premier critère (i) nous utilisons la définition de la valuation logarithmique :

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}) = \mathbb{Z}_{\ell} \text{ ainsi } Z = \mathbb{Z}_{\ell} \text{ et } Z/n \cdot Z \simeq \mathbb{Z}/n \cdot \mathbb{Z} \text{ pour tout } n.$$

Pour le deuxième critère (ii) nous utilisons le diagramme commutatif suivant [2, proposition 1.1]

$$\begin{array}{ccccc} K_{\mathfrak{p}}^{\times} & \xrightarrow{\text{extension}} & L_{\mathfrak{F}}^{\times} & \xrightarrow{\text{Norm}} & K_{\mathfrak{p}}^{\times} \\ \downarrow & & & & \downarrow h_{\mathfrak{p}} \\ \mathbb{Q}_{\ell} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_{\ell} & \xrightarrow{[L_{\mathfrak{F}}:K_{\mathfrak{p}}]} & \mathbb{Q}_{\ell} \end{array}$$

il suit $h_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}}) = [L_{\mathfrak{F}} : K_{\mathfrak{p}}] \cdot h_{\mathfrak{F}}$. Comme, $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{F}}}) = \tilde{e}_{\mathfrak{p}} \cdot h_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{F}}})$ nous avons $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{F}}}) = [L_{\mathfrak{F}} : K_{\mathfrak{p}}] \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{p}} \cdot h_{\mathfrak{F}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{F}}})$ et ainsi $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{F}}}) = [L_{\mathfrak{F}} : K_{\mathfrak{p}}] \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{p}}/\tilde{e}_{\mathfrak{F}} \cdot \mathbb{Z}_{\ell}$ dû à [2, proposition 1.2], $h_{\mathfrak{F}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{F}}}) = 1/\tilde{e}_{\mathfrak{F}} \cdot \mathbb{Z}_{\ell}$. D'après [proposition 5.1.1] : $[L_{\mathfrak{F}} : K_{\mathfrak{p}}] = \tilde{f}_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}} \cdot \tilde{e}_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}}$. d'où $[L_{\mathfrak{F}} : K_{\mathfrak{p}}] \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{p}}/\tilde{e}_{\mathfrak{F}} = \frac{\tilde{f}_{\mathfrak{F}} \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{F}} \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{p}}}{\tilde{f}_{\mathfrak{p}} \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{p}} \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{F}}}$ ainsi $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{F}}}) = \frac{\tilde{f}_{\mathfrak{F}}}{\tilde{f}_{\mathfrak{p}}} \cdot \mathbb{Z}_{\ell}$ finalement $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{F}}}) = \tilde{f}_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}} \cdot Z$ \square

2.4 Le symbole local logarithmique

Théorème 2.4.1. *(deg, $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$) est une paire de corps des classes et $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ satisfait l'axiome du corps des classes [4, théorème 2.5.1]. Ainsi pour toute ℓ -extension abélienne finie $L_{\mathfrak{F}}$ de $K_{\mathfrak{p}}$ extension finie de \mathbb{Q}_p , nous avons l'isomorphisme :*

$$\text{Gal}(L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}) \simeq \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}/N_{L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{F}}}$$

Definition 4. *Cela permet de définir l'homomorphisme surjectif suivant appelé le symbole local logarithmique :*

$$(\cdot, L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}}) : \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow \text{Gal}(L_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{p}})$$

Proposition 2.4.1. [2, i), p. 4]

Pour une place non archimédienne p de \mathbb{Q} , nous avons

$$\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} = \begin{cases} \mu_p \cdot p^{\mathbb{Z}_\ell} & \text{pour } p \neq \ell \\ (1 + \ell)^{\mathbb{Z}_\ell} \cdot \ell^{\mathbb{Z}_\ell} & \text{pour } p = \ell \end{cases}$$

Ainsi nous avons une décomposition de la forme : $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} \simeq \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbb{Q}_p} \cdot \tilde{\pi}_p^{\mathbb{Z}_\ell}$.

Proposition 2.4.2. Nous avons une expression explicite pour le symbole local logarithmique dans le contexte suivant : soit ζ une racine de l'unité d'ordre une puissance de ℓ , et $a \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$, alors

$$(a, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p))_\ell = \zeta^{n_p}$$

avec

$$n_p = \begin{cases} p^{v_p(a)} & \text{for } p \neq \ell \text{ et } p \neq \infty \\ (1 + \ell)^{-\tilde{v}_\ell(a)} & \text{pour } p = \ell \\ \text{sgn}(a) & \text{pour } p = \infty \end{cases}$$

où $(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})_\ell$ dénote la projection sur le ℓ - sous-groupe de Sylow de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$.

Remarque : Si p est réelle et $\ell = 2$ alors $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_\infty} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, il est trivial dans tous les autres cas, [3, proposition 1.2] : $\text{sgn}(a)$ vaut $+ - 1$ dans le premier cas et 1 dans tous les autres.

Démonstration. Soit ζ une racine ℓ^m -ième de l'unité, avec $\ell^m \neq 2$. Nous prenons $a \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$ et écrivons $a = u_p \cdot p^{v_p(a)}$ pour $p \neq \ell$, où v_p est la valuation usuelle normalisée de \mathbb{Q}_p qui coïncide dans ce cas particulier avec la logarithmique. Pour $p = \ell$, nous écrivons $a = \ell^{v_\ell(a)} \cdot (1 + \ell)^{\tilde{v}_\ell(a)}$. Pour $p \neq \ell$ et $p \neq \infty$ l'extension $\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p$ est une extension non ramifiée. Le principe fondamental [1, theorem 2.6, p. 25] établit que le symbole local associe les uniformisantes aux Frobenius, nous avons que $(p, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p))_\ell$ correspond à l'automorphisme de Frobenius $\phi_p : \zeta \rightarrow \zeta^p$. De plus le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_p^\times & \xrightarrow{(\cdot; \text{Gal}(L_{\mathfrak{F}}/K_p))} & \text{Gal}(L_{\mathfrak{F}}/K_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}_{K_p} & \xrightarrow{(\cdot; \text{Gal}(L_{\mathfrak{F}}/K_p))_\ell} & \text{Gal}(L_{\mathfrak{F}}/K_p)_\ell \end{array}$$

où le symbole du haut désigne le symbole local classique et le symbole du bas le symbole local ℓ -adique. Par suite, nous en déduisons

$$(a, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p)_\ell)\zeta = \zeta^{n_p}$$

avec

$$n_p = \begin{cases} p^{v_p(a)} & \text{for } p \neq \ell \text{ et } p \neq \infty \\ \text{sgn}(a) & \text{for } p = \infty \end{cases}$$

Mais nous voulons avoir $[a, (\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})_\ell] = 1$ for $a \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ afin de définir la valuation dans le cas logarithmique global, où

$$[a, (\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})_\ell]\zeta = \prod_p (a, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p)_\ell)\zeta = \zeta^\alpha$$

Et en utilisant la formule du produit, comme nous voulons $\alpha = 1$ il s'ensuit que $n_\ell = (1 + \ell)^{-v_\ell(a)}$: par conséquent, $\alpha = \prod_p n_p = \text{sgn}(a) \cdot \prod_{p \neq \infty} p^{v_p(a)} \cdot \ell^{-v_\ell(a)} \cdot (1 + \ell)^{-\tilde{v}_\ell(a)} = a \cdot a^{-1} = 1$. \square

3 Le cas global

3.1 G et le G -module

Soit G le groupe de Galois de la pro- ℓ -extension abélienne maximale de \mathbb{Q} . Nous introduisons le ℓ -groupe des classes d'idèles pour un corps de nombres K donné tel qu'il a été défini par Jaulent [3, définition 1.4]. Comme dans [4, §3.4] le G -module est la réunion des ℓ -groupes des classes d'idèles \mathcal{C}_K où K parcourt les extensions finies de \mathbb{Q} : $\bigcup_{[K:\mathbb{Q}] < \infty} \mathcal{C}_K$. et \mathcal{C}_L un $\text{Gal}(L/K)$ -module.

3.2 L'application degré

Nous fixons un isomorphisme tel que : $\text{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$. Cela permet de définir :

$$\begin{aligned} \text{deg} : G = \text{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q}) &\rightarrow \hat{\mathbb{Z}} \\ \phi &\mapsto \phi|_{\tilde{\mathbb{Q}}} \end{aligned}$$

où \mathbb{Q}^{ab} est la pro- ℓ -extension abélienne maximale de \mathbb{Q} . Soit K/\mathbb{Q} une extension finie, nous définissons : $f_K = [K \cap \tilde{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}]$ et nous obtenons par analogie avec le cas abstrait [1, chapitre 2], un homomorphisme surjectif $\text{deg}_K = \frac{1}{f_K} \cdot \text{deg}$ tel que $\text{deg}_K : G_K \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ détermine la $\hat{\mathbb{Z}}$ -extension \tilde{K} de K .

3.3 La valuation

Grâce à la propriété $\forall a \in \mathcal{R}_K, [a, \tilde{K}/K] = 1$. nous posons :

Definition 5. Nous définissons la valuation $v_K : \mathcal{C}_K \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ comme suit :

$$\mathcal{C}_K \xrightarrow{[\cdot, \tilde{K}/K]} G(\tilde{K}/K) \xrightarrow{\text{deg}_K} \hat{\mathbb{Z}}$$

Lemme 3.3.1. v_K est hensélienne par rapport au degré deg .

Démonstration. Les arguments sont les mêmes que dans [4, Lemme 3.6.4] en remplaçant \mathcal{U}_{K_p} par $\tilde{\mathcal{U}}_{K_p}$. \square

Théorème 3.3.1. (deg, v_K) est une paire de corps des classes et \mathcal{C}_K [4, Théorème 3.3.1] satisfait l'axiome du corps des classes. Ainsi pour toutes les ℓ -extensions abéliennes finies L de K , nous avons l'isomorphisme :

$$\text{Gal}(L/K) \simeq \mathcal{J}_K / N_{L/K} \mathcal{J}_L \cdot \mathcal{R}_K$$

Definition 6. Cela permet de définir l'homomorphisme surjectif suivant, appelé symbole logarithmique global :

$$(\cdot, L/K) : \mathcal{J}_K \rightarrow \text{Gal}(L/K)$$

4 Le conducteur logarithmique

Grâce à la valuation p -adique, nous disposons d'une partition de \mathbb{Z}_p :

$$\mathbb{Z}_\ell \setminus \{0\} = \bigcup_{k \geq 0} \ell^k \mathbb{Z}_\ell^\times$$

. Or sur $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_\ell}$, nous connaissons le groupe des unités logarithmiques : $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \ell^{\mathbb{Z}_\ell}$. Ceci nous amène donc à considérer les définitions suivantes :

Definition 7. $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ étant une ℓ -extension abélienne finie, nous posons :

$$\text{si } p|\ell, \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} = \{x \in \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}/N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_\ell}(x) \in (\ell)^{\ell^n \mathbb{Z}_\ell}\}$$

si $p \nmid \ell$, nous savons que $\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \simeq \mu_{\mathfrak{p}}$ et la filtration naturelle est $0 \subset \mu_{\mathfrak{p}}$.

Definition 8. i) Si $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ est une ℓ -extension abélienne finie, et si n est le plus petit entier tel que $\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \subseteq N_{L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{p}}})$ alors l'idéal :

$$\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^n$$

est appelé conducteur logarithmique local associé à l'extension.

ii) Si L/K est une ℓ -extension abélienne finie, le conducteur logarithmique global est défini par :

$$\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K} = \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}$$

Remarque :

D'après [2, Théorème 4.1 iii)], la ℓ -valuation logarithmique est, pour les places $\mathfrak{p} \nmid \ell$, proportionnelle à la valuation ordinaire $v_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$. En effet comme $\tilde{v}_{\mathfrak{p}} = -\frac{\text{Log}(\langle N_{\mathfrak{p}}^{-v_{\mathfrak{p}}} \rangle)}{\deg(\mathfrak{p})}$

quand $\mathfrak{p} \nmid \ell$, nous avons $\tilde{v}_{\mathfrak{p}} = \frac{\text{Log}(N_{\mathfrak{p}})}{\deg(\mathfrak{p})} v_{\mathfrak{p}}$. Dans ce cas le groupe des unités logarithmiques correspond au groupe $\mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}}$, à savoir au ℓ -sous-groupe de Sylow du groupe des racines de l'unité $\mu_{\mathfrak{p}}$. Par suite, le plus petit entier n recherché est soit 0 soit 1. Notons que dans le cas où $\mathfrak{p} \nmid \ell$, le groupe des unités principales $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}^1$ de $K_{\mathfrak{p}}$ est ℓ -divisible, ainsi le conducteur local classique vaut 1 ou \mathfrak{p} .

Proposition 4.0.1. Le \mathfrak{p} -conducteur $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}$ est trivial si et seulement si l'extension L/K est logarithmiquement non ramifiée en \mathfrak{p} . $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ contient donc tous les premiers de K qui sont logarithmiquement ramifiés dans L et seuls cela. En outre, si M est intermédiaire entre K et L alors $\tilde{\mathfrak{f}}_{M/K} | \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$.

Démonstration. Si \mathfrak{p} est une place de K logarithmiquement non ramifiée dans L alors $\tilde{e}_{L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}} = 1$, et par application du théorème 1.0.2 ,

$$H^0(\text{Gal}(L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}), \tilde{\mathcal{U}}_{L_{\mathfrak{p}}}) = 1$$

il suit,

$$\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} = N_{L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}}(\tilde{\mathcal{U}}_{L_{\mathfrak{p}}})$$

ce qui signifie

$$\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \subseteq N_{L_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{q}}}).$$

Réciproquement, supposons que $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$ soit trivial, on en déduit que $\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \subseteq N_{L_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{q}}})$. Soit $n = [\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} : N_{L_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{q}}})]$ alors $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}^n \in N_{L_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{q}}})$, donc $(\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}^n) \cdot \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \subseteq N_{L_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{q}}})$. Par conséquent $L_{\mathfrak{q}} \subseteq M$ où M est le corps des classes de $(\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}^n) \cdot \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} : N_{M/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_M) = (\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}^n) \cdot \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$. Mais alors $\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \subseteq N_{M/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_M)$ c'est à dire que le \mathfrak{p} -conducteur est trivial, par application de la première partie on en déduit que $M/K_{\mathfrak{p}}$ est logarithmiquement non ramifiée. Par la théorie ℓ -adique du corps des classes, nous avons : $\text{Gal}(M/K_{\mathfrak{p}}) \simeq (\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}) \cdot \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} / (\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}^n) \cdot \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$. Par conséquent, M est la ℓ -extension logarithmiquement non ramifiée de degré n , mais comme $L_{\mathfrak{q}} \subseteq M$, on en déduit que \mathfrak{p} est logarithmiquement non ramifié dans L . \square

5 Le Frobenius logarithmique

5.1 Définitions et premières propriétés

Definition 9. [2, definition 2.1]

Soit K un corps de nombres, le ℓ -groupe des diviseurs logarithmiques de K est

$$D\ell_K = \mathcal{J}_K / \tilde{\mathcal{U}}_K \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_{\ell} \mathfrak{p}$$

par la valuation logarithmique $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$ il s'identifie au \mathbb{Z}_{ℓ} -module libre construit sur les places de K .

Definition 10. Soit L/K une ℓ -extension abélienne finie. Soit \mathfrak{p} une place de K logarithmiquement non ramifiée dans L . Soit $D\ell_K$ le groupe des diviseurs logarithmiques de K . Soit $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ le conducteur logarithmique global de L/K , et $D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$ les diviseurs logarithmiques premiers à δ_K .

Nous définissons l'application suivante pour une place \mathfrak{p} :

$$\begin{aligned} \widetilde{\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)} : D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}} &\rightarrow \text{Gal}(L/K) \\ \mathfrak{p} &\mapsto \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) \end{aligned}$$

où le Frobenius logarithmique est

$$\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) = ([\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}], L/K)$$

avec $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}$ l'uniformisante logarithmique, définie dans la proposition 3.7.3 et $[\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}]$ l'image de $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}$ dans \mathcal{J}_K . Nous étendons cette application, par multiplicativité à $D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. Cette application est alors appelée application d'Artin logarithmique.

Quelques remarques :

- 1) L'application précédente s'étend par multiplicativité à $D\ell_K^{\tilde{L}/K}$: en effet par hypothèse L/K est une ℓ -extension.
- 2) L'application ainsi définie est un \mathbb{Z}_ℓ -morphisme surjectif de part la surjectivité du symbole global.
- 3) Cette définition est motivée par la proposition suivante, vraie en théorie abstraite du corps des classes

Proposition 5.1.1. [1, proposition 3.4] Dans le contexte abstrait, soit $a \in A_K$, $(\cdot, L/K)$ le symbole de la norme résiduelle L/K , alors

$$(a, \tilde{K}/K) = \phi_K^{v_K(a)}$$

où ϕ_K est le Frobenius générique de \tilde{K}/K .

- 4) Lorsque $\mathfrak{p} \nmid \ell$, les valuations classique et logarithmique sont proportionnelles : en effet $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}}$ la \mathbb{Z}_ℓ -extension non ramifiée et la \mathbb{Z}_ℓ -cyclotomique coïncident alors. Ainsi symbole d'Artin classique et symbole d'Artin logarithmique correspondent sur les idéaux.

Proposition 5.1.2. Propriétés de l'application d'Artin logarithmique

L'application d'Artin logarithmique satisfait les propriétés suivantes pour L/K une ℓ -extension abélienne finie, \tilde{L}/K le conducteur global de l'extension L/K :

i) Si M est intermédiaire entre L et K , alors la restriction de $(\frac{L/K}{\mathfrak{a}})$ à M est $(\frac{M/K}{\mathfrak{a}})$, pour tout $\mathfrak{a} \in D\ell_K^{\tilde{L}/K}$

ii) Si L et L' sont des ℓ -extensions abéliennes, et si nous considérons $\text{Gal}(LL'/K)$ comme sous-groupe de $\text{Gal}(L/K) \times \text{Gal}(L'/K)$, via l'application $\sigma \in \text{Gal}(LL'/K) \rightarrow (\sigma|_L, \sigma|_{L'}) \in \text{Gal}(L/K) \times \text{Gal}(L'/K)$, alors $(\frac{LL'/K}{\mathfrak{a}})$ est $((\frac{L/K}{\mathfrak{a}}, (\frac{L'/K}{\mathfrak{a}})))$ pour tout $\mathfrak{a} \in D\ell_{LL'}^{\tilde{L}/K}$

iii) Si K' est une sous-extension quelconque de K et si nous considérons $\text{Gal}(LK'/K')$ comme isomorphe par restriction à K , à un sous-groupe du $\text{Gal}(L/K)$, alors la restriction de $(\frac{LK'/K'}{\mathfrak{a}'})$ à K est $(\frac{K}{N_{K'/K}\mathfrak{a}'})$ pour tout $\mathfrak{a}' \in D\ell_{K'}^{\tilde{L}/K'}$

iv) En particulier si M est un sous-corps entre L et K , alors $(\frac{L/M}{\mathfrak{U}}) = (\frac{L/K}{N_{M/K}\mathfrak{U}})$, pour tout $\mathfrak{U} \in D\ell_M^{\tilde{L}/K}$.

Démonstration. i) Il suffit de vérifier la propriété pour chaque premier \mathfrak{p} . Cela résulte dans ce cas de la propriété de fonctorialité de l'application de réciprocité : $\text{res}_M \circ \phi_{L/K}(\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}) = \phi_{M/K}(\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}})$.

ii) est une conséquence de i)

iii) Cette propriété correspond à l'égalité entre les deux termes suivants : $(\frac{LK'/K'}{\mathfrak{a}'})|_K = \phi_{LK'/K'}(\mathfrak{a}')$ et $(\frac{L}{N_{K'/K}\mathfrak{a}'}) = \phi_{L/K}(N_{K'}(\mathfrak{a}'))$ for all $\mathfrak{a}' \in D\ell_{K'}^{\tilde{L}/K'}$. Par la propriété de fonctorialité de l'application de réciprocité, nous en déduisons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\text{Gal}(L'/K') & \xrightarrow{r_{L'/K'}} & \mathcal{J}_{K'}/N_{L'/K'} \mathcal{J}_{L'} \cdot \mathcal{R}_{K'} \\
\downarrow & & \downarrow N_{K'/K} \\
\text{Gal}(L/K) & \xrightarrow{r_{L/K}} & \mathcal{J}_K/N_{L/K} \mathcal{J}_L \cdot \mathcal{R}_K
\end{array}$$

où $r_{L/K}$ est l'application de réciprocité de la théorie ℓ -adique du corps des classes. Par conséquent pour le symbole logarithmique global, nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{J}_{K'} & \xrightarrow{(\cdot, L'/K')} & \text{Gal}(LK'/K') \\
\downarrow N_{K'/K} & & \downarrow \text{res} \\
\mathcal{J}_K & \xrightarrow{(\cdot, L/K)} & \text{Gal}(L/K)
\end{array}$$

et la propriété se déduit alors de $\text{res} \circ (\cdot, LK'/K') = (\cdot, L/K) \circ N_{K'/K}$.

iv) est un cas particulier de iii) en prenant $K' = L$

□

Definition 11. Le noyau de l'application précédente $(\widetilde{L/K})$ est noté : $Al_{L/K}$, et appelé le sous-module d'Artin logarithmique. Pour tout module m divisible par le conducteur logarithmique global de l'extension L/K , nous posons $Al_{L/K, m} = A_{L/K} \cap D\ell_K^m$.

Definition 12. Soit L/K une ℓ -extension abélienne, m un multiple du conducteur logarithmique global, nous définissons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_K^{(m)} &= \prod_{\mathfrak{p}|m} \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \prod_{\mathfrak{p}|m} \widetilde{U}_{K_{\mathfrak{p}}}^{v_{\mathfrak{p}}(m)} \\
\mathcal{R}_K^{(m)} &= \mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_K^{(m)}
\end{aligned}$$

Théorème 5.1.1. L/K étant une ℓ -extension abélienne finie, nous avons :

$$Al_{L/K} = \text{Gal}(L/K) \simeq Pl_K^{(\tilde{f}_{L/K})} \cdot N_{L/K}(D\ell_L^{\tilde{f}_{L/K}})$$

où $Pl_K^{(\tilde{f}_{L/K})}$ est le sous-module des diviseurs logarithmiques principaux associés aux éléments de $\mathcal{R}_K^{(\tilde{f}_{L/K})}$.

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous notons le conducteur logarithmique global rattaché à l'extension par \tilde{f} . Par le théorème 3.3.1, nous avons :

$$\text{Gal}(L/K) \simeq \mathcal{J}_K/N_{L/K} \mathcal{J}_L \mathcal{R}_K.$$

D'après le théorème de représentation, $\mathcal{J}_K = \mathcal{J}_K^{\tilde{f}} \mathcal{R}_K$, ainsi nous obtenons :

$$\text{Gal}(L/K) \simeq \mathcal{J}_K^{\tilde{f}} \mathcal{R}_K / N_{L/K} \mathcal{J}_L^{\tilde{f}} \mathcal{R}_K^{\tilde{f}}.$$

Or les éléments de $\tilde{\mathcal{U}}_K^{(\tilde{f})} = \prod_{\mathfrak{p}|\tilde{f}} \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \prod_{\mathfrak{p}|\tilde{f}} \tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}^{v_{\mathfrak{p}}(\tilde{f})}}$ sont par construction des normes : si $\mathfrak{p} \nmid \tilde{f}$, alors \mathfrak{p} est logarithmiquement non ramifiée et les unités sont normes, de plus si $\mathfrak{p}|\tilde{f}$, c'est la définition du conducteur qui implique que ces éléments sont normes. D'après cette remarque et le théorème du double quotient, nous obtenons :

$$\text{Gal}(L/K) \simeq \mathcal{J}_{\tilde{f}}^{\tilde{f}}/N_{L/K} \mathcal{J}_L^{\tilde{f}} \tilde{\mathcal{U}}_K^{(\tilde{f})} \mathcal{R}_K^{\tilde{f}}.$$

Or le théorème d'approximation simultanée donne : $\tilde{\mathcal{U}}_K^{(\tilde{f})} \mathcal{R}_K^{\tilde{f}} = \tilde{\mathcal{U}}_K \mathcal{R}_K^{(\tilde{f})}$. Ainsi en utilisant cette égalité et en quotientant par $\tilde{\mathcal{U}}_K$, nous obtenons :

$$\text{Gal}(L/K) \simeq D\ell_K^{\tilde{f}}/P\ell_K^{(\tilde{f})} \cdot N_{L/K}(D\ell_L^{\tilde{f}})$$

□

Remarque : Il faut noter l'analogie de l'expression du sous-module d'Artin logarithmique avec celle du groupe de Takagi classique.

Théorème 5.1.2. *Soit L/K une ℓ -extension abélienne finie, m un module de K divisible par le conducteur logarithmique global de l'extension L/K alors la restriction de $(\widehat{L/K})$ à $D\ell_K^m$, est surjective et induit un isomorphisme entre $D\ell_K^m/Al_{L/K,m}$ et $\text{Gal}(L/K)$.*

5.2 Le cas quadratique

On considère l'extension quadratique suivante : $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$. Il s'agit d'une ℓ -extension pour $\ell = 2$. Or dans le cas d'une ℓ -extension, la ramification au sens classique et la ramification au sens logarithmique ne diffèrent que pour les places au dessus de ℓ , voir [2].

1) Considérons d'abord une place p qui ne divise pas 2 :

- soit la place p est ramifiée au sens classique, et donc dans ce contexte, au sens logarithmique : alors le Frobenius classique et le Frobenius logarithmique ne sont pas définis.

- soit la place p est non ramifiée au sens classique et logarithmique : deux sous cas sont alors à envisager

soit p est inerte et log-inerte : alors le sous-groupe de décomposition est isomorphe au groupe de Galois de l'extension quadratique. Il est alors de cardinal 2 et contient l'identité, et le Frobenius qui coïncide ici avec le Frobenius logarithmique.

soit p est totalement décomposée et totalement log-décomposée : le sous-groupe de décomposition est alors trivial, et il en est de même pour le Frobenius classique et le Frobenius logarithmique.

2) Étudions donc le cas de 2.

Dire que 2 est logarithmiquement non ramifiée équivaut par définition à :

$$[\mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) \cap \widehat{\mathbb{Q}}_2^c : \mathbb{Q}_2] = 1$$

où $\widehat{\mathbb{Q}}_2^c$ désigne la $\widehat{\mathbb{Z}}$ -extension cyclotomique de \mathbb{Q}_2 . Or $\widehat{\mathbb{Q}}_2^c$ est le compositum de toutes les \mathbb{Z}_q -extensions cyclotomiques pour tous les q premiers. Celles-ci sont linéairement disjointes de groupe de Galois \mathbb{Z}_p et seule \mathbb{Z}_2 possède un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de sorte que la non-ramification au sens logarithmique de 2 se traduit par :

$$\mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) \subseteq \mathbb{Q}_2^c$$

où \mathbb{Q}_2^c désigne la \mathbb{Z}_2 -extension cyclotomique de \mathbb{Q} , et comme cette extension est cyclique, on peut se cantonner au premier étage, à savoir :

$$\mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) \subseteq \mathbb{Q}_2(\sqrt{2}).$$

Soit un corps K , a, b deux éléments de K^\times , alors on a :

$$K(\sqrt{a}) = K(\sqrt{b}) \Leftrightarrow a/b \in K^{\times 2}.$$

D'où les deux cas envisageables :

$$\mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}_2$$

ou

$$\mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$$

à savoir

$$d \in \mathbb{Q}_2^{\times 2}$$

ou

$$d/2 \in \mathbb{Q}_2^{\times 2}$$

D'après [6, théorème 3 et corollaire], les carrés de \mathbb{Q}_2 sont de la forme $2^n \cdot u$ où u est une unité 2-adique congrue à 1 mod 8 et n est un entier rationnel pair . Ce qui nous amène aux deux congruences suivantes :

$$d \equiv 1 \pmod{8}$$

ou

$$d/2 \equiv 1 \pmod{8}$$

Si $d \equiv 1 \pmod{8}$, $\mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}_2$, l'extension locale est triviale, il en est de même du sous-groupe de décomposition. 2 est à la fois décomposé et logarithmiquement décomposée.

Si $d \equiv 2 \pmod{16}$, 2 est ramifiée au sens classique mais logarithmiquement inerte. Son sous-groupe de décomposition est de cardinal 2, il contient l'élément neutre et un autre qui correspond au Frobenius logarithmique Comme $\mathbb{Q}_2(\sqrt{d})/\mathbb{Q}_2$ est la sous-extension réelle maximale de $\mathbb{Q}_2(\zeta_8)/\mathbb{Q}_2$, à savoir fixée par $\langle -1 \rangle$, et puisque $\text{Gal}(\mathbb{Q}_2(\zeta_8)/\mathbb{Q}_2) \simeq (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$, nous pouvons expliciter le Frobenius logarithmique de 2 .

$$\left(\frac{\widetilde{K/\mathbb{Q}}}{2}\right)(\zeta_8) = \zeta_8^{\pm 3}.$$

5.3 Généralisation : du cas quadratique à celui d'une ℓ -extension

Théorème 5.3.1. *Cas général d'une ℓ -extension*

Considérons K/\mathbb{Q} une ℓ -extension abélienne finie et \mathfrak{p} une place de K .

-Si \mathfrak{p} n'est pas au dessus de ℓ , ramification classique et logarithmique coïncident. Si \mathfrak{p} est une place non ramifiée dans un sens ou dans l'autre, Frobenius classique et logarithmique coïncident également.

-Si \mathfrak{p} est au dessus de ℓ , les seuls cas possibles sont les suivants :

-soit \mathfrak{p} est totalement décomposée au sens logarithmique et au sens classique. Le sous-groupe de décomposition est trivial, et Frobenius classique et logarithmique sont tous deux égaux et triviaux.

-soit \mathfrak{p} est logarithmiquement non ramifiée mais ramifiée au sens classique. Alors seul le Frobenius logarithmique existe.

Démonstration. Dans le premier cas, les uniformisantes classique et logarithmique sont égales, les symboles locaux correspondent : d'où l'égalité des Frobenius classique et logarithmique.

Dans le deuxième cas, considérons \mathfrak{p} au dessus de ℓ , telle que \mathfrak{p} soit logarithmiquement non ramifiée. Comme nous travaillons avec une ℓ -extension, cette condition se traduit de la façon suivante :

$$K_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathbb{Q}_{\ell}^c$$

, où \mathbb{Q}_{ℓ}^c désigne la \mathbb{Z}_{ℓ} -extension cyclotomique de \mathbb{Q}_{ℓ} . Comme K/\mathbb{Q} est une extension finie, nous pouvons nous limiter aux premiers étages de la \mathbb{Z}_{ℓ} -extension cyclotomique, à savoir il existe un entier n tel que

$$K_{\mathfrak{p}} \subseteq B_{n+1}$$

, où B_{n+1} désigne la sous-extension réelle maximale de $\mathbb{Q}_{\ell}(\zeta_{\ell^{n+1}})$ avec $\zeta_{\ell^{n+1}}$ une racine ℓ^{n+1} -ième primitive de l'unité et $[B_{n+1} : \mathbb{Q}_{\ell}] = \ell^n$. Ceci nous amène à :

$$K_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}_{\ell} \text{ ou } K_{\mathfrak{p}} = B_{n+1}.$$

Dans le premier sous-cas, l'extension locale est triviale : la place est complètement décomposée au sens classique et au sens logarithmique. Dans le deuxième, \mathfrak{p} est ramifiée au sens classique mais logarithmiquement non ramifiée au sens logarithmique. \square

REMERCIEMENTS

Je remercie Jean-François Jaulent, mon directeur de thèse, pour nos discussions.

Références

- [1] J. NEUKIRCH, *Class Field Theory*, Springer-Verlag, GTM 280, (1986)
- [2] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques d'un corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **6**, (1994), 301–325.
- [3] J.-F. JAULENT, *Théorie ℓ -adique du corps des classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **10**, fasc.2 (1998), 355–397.

- [4] S.REGLADE, *A formal approach "à la Neukirch" of ℓ -adic class field theory*, submitted
- [5] C.BRIGHI, *Capitulation des classes logarithmiques et étude de certaines tours de corps de nombres*, thèse, Publ. Math. Fac. Sci. Metz, Théor. Nombres (2007), 1–67
- [6] J.P SERRE, *Cours d'arithmétique*, PUF, Paris, (1970)

Univ. Bordeaux, IMB, UMR 5251, 351 Cours de la Libération, F-33400 Talence, France
CNRS, IMB, UMR 5251, 351 Cours de la Libération, F-33400 Talence, France

Email address `stephanie.reglade@math.u-bordeaux1.fr`