



HAL
open science

SUR L' EQUATION DE SCHRÖDINGER ET L 'EQUATION DE DIRAC-WEYL-FOCK.

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. SUR L' EQUATION DE SCHRÖDINGER ET L 'EQUATION DE DIRAC-WEYL-FOCK.. 2014. hal-00998279v2

HAL Id: hal-00998279

<https://hal.science/hal-00998279v2>

Submitted on 2 Jun 2014 (v2), last revised 6 Mar 2015 (v6)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER ET L'ÉQUATION DE DIRAC-WEYL-FOCK.

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. We give some results on the notion about the space-time which allows to go through parts of the universe where lives a chronological field. This foliation enable a generalization of the Schrödinger equation and the Dirac-Weyl-Fock equation.

Dans tout ce qui suit, on se place sur une partie Ω de l'univers sur laquelle aucune mesure n'est faite sur la métrique g . On suppose que Ω est une variété Lorentzienne, connexe, orientée en temps, c'est-à-dire, qu'il existe au moins un champ $T : \Omega \rightarrow T\Omega$ de genre temps $\forall \omega \in \Omega, g(\omega)(T(\omega), T(\omega)) < 0$. Pour l'espace-temps de Minkowski (\mathbb{R}^4, η) , $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$ et le champ $T = \frac{\partial}{\partial t}$ donne l'orientation du temps.

Soit $T_\omega = \mathbb{R}T(\omega)$, le sous-espace vectoriel de dimension 1, engendré par le vecteur $T(\omega) \in T_\omega(\Omega)$. Ce sous-espace est non isotrope pour la forme bilinéaire $g(\omega)$ sur $T_\omega(\Omega)$ et scinde $T_\omega(\Omega)$ en une somme orthogonale unique $T_\omega(\Omega) = T_\omega \oplus E_\omega$, où $E_\omega = T_\omega^\perp$. Les restrictions $g(\omega)|_{E_\omega}$ et $-g(\omega)|_{T_\omega}$ sont définies positives. Tout champ $X : \Omega \rightarrow T(\Omega)$ se décompose en $X = X_E - tT$, où $t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une C^∞ -application, X_E est un champ espace, c'est-à-dire, $X_E(\omega) \in E_\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. En particulier, $|X_E(\omega)|_g^2 = g(\omega)(X_E(\omega), X_E(\omega)) > 0$ si $X_E(\omega) \neq o_{T_\omega(\Omega)}$.

Definition 1. *Un champ X est orienté vers le T -futur si $X = X_E - tT$, avec $t > 0$ et vers le T -passé si $t < 0$.*

1. FEUILLETAGE EN ESPACE-TEMPS DES PARTIES DE L'UNIVERS

La partie espace de l'espace tangent est $T^E\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times E_\omega$ et la partie chronologique est $T^T\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times T_\omega$.

$$T^E\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times E_\omega \quad T^T\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times T_\omega$$

Lemma 1.
$$\begin{array}{ccc} \downarrow \pi_E & \text{et} & \downarrow \pi_T \\ \Omega & & \Omega \end{array} \quad \text{sont des fibrés.}$$

Le fibré chronologique est trivial et $T\Omega$ est la somme de Whitney de ces deux fibrés, $T\Omega = T^E\Omega \oplus T^T\Omega$.

$T^E\Omega$

Proof. Il suffit de montrer que $\downarrow \pi$ est un fibré. Soit U un ouvert connexe

de Ω sur lequel TU est trivialisable. Il existe des champs de vecteurs A, B, C et D définis sur U , linéairement indépendants. On peut scinder chaque champ en sa partie espace et sa partie chronologique $A = A_E + aT$, $B = B_E + bT$, $C = C_E + cT$ et $D = D_E + dT$ où a, b, c et d sont des fonctions de classe C^∞

Remerciements à Guy Cherbit.

sur U . On cherche des champs orthogonaux à T pour la forme bilinéaire g qui sont linéairement indépendants. On pose $\Gamma = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$, la condition $g(\Gamma, T) = 0$ est équivalente à $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0$. Si $X = -bA + aB - dC + cD$, $Y = cA - dB - aC + bD$, $Z = -dA - cB + bC + aD$ alors pour tout $\omega \in U$, $\text{Vect}(X(\omega), Y(\omega), Z(\omega)) = E_\omega = \mathbb{R}T(\omega)^\perp$ car

$$\det \begin{pmatrix} -b & c & -d & a \\ a & -d & -c & b \\ -d & -a & b & c \\ c & b & a & d \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 0 \iff a = b = c = d = 0.$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(U) = \cup_{\omega \in U} E_\omega & \xrightarrow{\psi} & U \times \mathbb{R}^3 \\ \downarrow \pi_E & & \downarrow \text{Pr}_1, \text{ avec } \psi(v) = (\omega, x, y, z) \text{ et} \\ U & \xrightarrow{\text{Id}_U} & U \end{array}$$

$v = xX(\omega) + yY(\omega) + zZ(\omega)$ est l'isomorphisme de trivialité locale. \square

Remarquons que sur le fibré espace,

$$\begin{array}{ccc} T^E\Omega = \cup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times E_\omega & & \\ \downarrow \pi & & \text{, on a sur chaque fibre } E_\omega \text{ une forme bilinéaire définie} \\ \Omega & & \end{array}$$

positive, notée g^R , définie par $g^R(X, Y) = g(X, Y)$ et la métrique de Lorentz g , permet de définir une métrique riemannienne locale g_R de la façon suivante, si $|X|^2 = |X_E|^2 - t^2$ alors $|X|_R^2 = |X_E|^2 + t^2$ avec, $|X|^2 = g(X, X)$ et $|X|_R^2 = g_R(X, X)$.

Theorem 1. *Le système de Pfaff $\omega \rightarrow \tau(\omega) = E_\omega$ est complètement intégrable, pour chaque $\omega \in \Omega$, la composante connexe de l'intégrale associée à ce système est une variété connexe dite feuille d'espace en ω et est notée \mathcal{E}_ω .*

Proof. On utilise le principe de sommation d'Einstein. Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$, une

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{d\varphi} & T\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^4 \end{array} \quad \text{et si } x = (x^1, x^2, x^3, x^4) = x^i e_i \text{ est le}$$

système canonique de coordonnées, le champ standard $\frac{\partial}{\partial x^i} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ est défini par: $\frac{\partial}{\partial x^i}(x) = (x, e_i)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, où $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^4 . Localement dans la carte (U, φ) , on définit les champs $\frac{\partial}{\partial u^i} : U \subset \Omega \rightarrow TU$,

$$\frac{\partial}{\partial u^i}(u) = (d_u\varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi(u)) = (d_u\varphi)^{-1}((\varphi(u), e_i)), \text{ c'est-à-dire,}$$

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{d\varphi} & T\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \\ \uparrow \frac{\partial}{\partial u^i} & & \uparrow \frac{\partial}{\partial x^i} \\ U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^4 \end{array}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \varphi = d\varphi \circ \frac{\partial}{\partial u^i}. \text{ On pose } \partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}, \text{ locale-}$$

ment si

$X \in \Gamma^\infty(T\Omega)$ alors en coordonnées locales

$X = a^i \partial_i \in T_u\Omega$, où $a^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une C^∞ -application.

Si $Y = b^i \partial_i$ alors $[X, Y] = c^i \partial_i$ avec, $c^i = a^j (\partial_j b^i) - b^j (\partial_j a^i)$.

On note $T = t^i \partial_i$, le champ chronologique. Il faut vérifier que si $g(X, T) = 0$ et $g(Y, T) = 0$ sur U , alors $g([X, Y], T) = 0$ sur U .

On a $g(X, T) = a^i t^j g_{ij} = 0$, de même $b^i t^j g_{ij} = 0$ avec, $g(\partial_i, \partial_j) = g_{ij}$. Ensuite, on calcule $g([X, Y], T) = c^i t^j g_{ij} = (a^k (\partial_k b^j) - b^k (\partial_k a^j)) t^j g_{ij} = a^k t^j g_{ij} (\partial_k b^j) - b^k t^j g_{ij} (\partial_k a^j)$, les conditions $a^i t^j g_{ij} = 0$ et $b^i t^j g_{ij} = 0$ impliquent $\partial_k (a^i t^j g_{ij}) = 0$ et $\partial_k (b^i t^j g_{ij}) = 0$. On en déduit $g([X, Y], T) = -a^k b^i \partial_k (t^j g_{ij}) + b^k a^i \partial_k (t^j g_{ij}) = 0$.

Donc, τ est complètement intégrable. Si \mathcal{E}_ω est la composante connexe de l'intégrale de τ contenant ω , \mathcal{E}_ω est une sous-variété de dimension 3 de Ω . De plus, $\cup_{\omega \in \Omega} \mathcal{E}_\omega = \Omega$. \square

Sur l'espace-temps Ω , cohabitent deux feuilletages, le premier est de codimension 1, c'est le feuilletage espace \mathcal{E} et l'autre est de codimension 3, c'est le feuilletage chronologique \mathcal{T} .

Pour le feuilletage chronologique, il existe une famille maximale de submersions (U_i, α_i) , $i \in I$ où les U_i sont des ouverts de Ω et les $\alpha_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont des submersions pour lesquelles,

$$1) \cup_{i \in I} U_i = \Omega,$$

$$2) \text{ si } U_i \cap U_j \neq \emptyset, \text{ il existe un difféomorphisme } \alpha_{ij} \text{ de } \mathbb{R}^3, \text{ vérifiant: } \alpha_i = \alpha_{ij} \circ \alpha_j.$$

Les (U_i, α_i) sont les cartes distinguées de \mathcal{T} , les α_{ij} sont les changements de cartes et pour $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ alors $\alpha_{ij} \circ \alpha_{jk} \circ \alpha_{ki} = \text{Id}$.

On peut définir le fibré associé à l'aide des applications de transition $\omega \in U_i \cap U_j \subset \Omega \rightarrow D\alpha_{ij}(\omega) \in \text{Gl}(\mathbb{R}^3)$.

$$\text{On a } D\alpha_{ii}(\omega) = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}, D\alpha_{ji}(\omega) = (D\alpha_{ij})^{-1}(\omega) \text{ et}$$

$$D\alpha_{ik}(\omega) = D\alpha_{ij}(\omega) \circ D\alpha_{jk}(\omega). \text{ Le fibré obtenu est noté, } \begin{array}{c} \mathcal{T}\Omega \\ \downarrow \pi_{\mathcal{T}} \\ \Omega \end{array}. \text{ C'est un}$$

fibré vectoriel de fibre \mathbb{R}^3 et dont les feuilles sont \mathbb{R} ou \mathbb{S}^1 .

On opère de façon identique avec le feuilletage espace \mathcal{E} . Les cartes distinguées sont (V_j, β_j) , $j \in J$ avec les $\beta_j : V_j \rightarrow \mathbb{R}$ sont des submersions pour lesquelles,

$$1) \cup_{i \in J} V_j = \Omega,$$

$$2) \text{ si } V_i \cap V_j \neq \emptyset, \text{ il existe un difféomorphisme}$$

$\beta_{ij} : \beta_j(V_i \cap V_j) \subset \mathbb{R} \rightarrow \beta_i(V_i \cap V_j)$, vérifiant $\beta_i = \beta_{ij} \circ \beta_j$, avec la relation des cocycles: $\beta_{ij} \circ \beta_{jk} \circ \beta_{ki} = \text{Id}$.

Les applications de transition pour ce fibré vectoriel sont

$$\omega \in V_i \cap V_j \subset \Omega \rightarrow D\beta_{ij}(\omega) \in \mathbb{R}^{*+} \subset \text{Gl}(\mathbb{R}), \text{ on le note } \begin{array}{c} \mathcal{E}\Omega \\ \downarrow \pi_{\mathcal{E}} \\ \Omega \end{array}. \text{ Les feuilles}$$

sont des sous-variétés de dimension 3 et la fibre du fibré est \mathbb{R} . C'est une autre présentation du fibré espace et du fibré chronologique.

Remark 1. *L'équation d'évolution de Dirac-Einstein peut être définie à partir d'une connexion de Koszul sans l'apport d'une métrique de Lorentz et la section de Dirac est une solution de l'équation quantique relativiste définie avec la connexion [4].*

Proposition 1. *Les deux représentations des fibrés espaces et chronologiques sont équivalentes, c'est-à-dire,*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}\Omega & T^T\Omega & \mathcal{E}\Omega & T^E\Omega \\ \downarrow \pi_{\mathcal{T}} & = & \downarrow \pi & \text{et} & \downarrow \pi_{\mathcal{E}} & = & \downarrow \pi & . \\ \Omega & & \Omega & & \Omega & & \Omega \end{array} \quad (1.1)$$

Conclusion 1. *Les parties espace-temps Ω de l'univers sont des variétés de dimension 4 connexes, muni d'une métrique de Lorentz g et d'une chronologie définie par un champ local T , tel que $g(T, T) = -1$. Chaque chronologie permet de feuilleter Ω en deux feuilletages orthogonaux pour la métrique g . L'un est le feuilletage espace, noté \mathcal{E} , dont les feuilles sont des sous-variétés connexes sans bord, de dimension 3*

de Ω , dites feuilles d'espace, l'autre est le feuilletage chronologique noté \mathcal{T} , dont les feuilles sont des sous-variétés connexes sans bord, de dimension 1 de Ω , dites feuilles chronologiques. Ces feuilles chronologiques ne peuvent être que \mathbb{S}^1 ou \mathbb{R} . Chaque champ X se décompose de façon unique, sous la forme $X = X_E - tT$, où $X_E(\omega) \in T_\omega(E) = E_\omega$, $t \in C^\infty(\Omega)$ et E est l'unique feuille du feuilletage de \mathcal{E} contenant ω .

La notion de changement local de coordonnées entre deux espace-temps définis par les champs chronologiques T et S est la donnée d'une section θ , définie sur un ouvert connexe $U \subseteq \Omega$ du fibré $\text{Hom}(T\Omega) = \Lambda^1(\Omega) \otimes T\Omega$ telle que $\theta \otimes T = S$ et $g(\theta \otimes X, \theta \otimes Y) = g(X, Y)$ sur $U \subseteq \Omega$ pour tout champ X, Y de Ω . On rappelle que pour un champ X de Ω défini sur U , $\theta \otimes X(\omega) = \theta(\omega)(X(\omega))$ et l'application $\omega \rightarrow \theta(\omega) : T_\omega\Omega \rightarrow T_\omega\Omega$ vérifiant $\theta(\omega)$ est une $g(\omega)$ -isométrie, on dit que θ conserve la métrique de Lorentz. On peut remarquer que ce changement d'espace-temps est un opérateur d'évolution [4].

Theorem 2. *Pour tous les champs chronologiques T et S , il existe un changement local de coordonnées.*

Proof. On prend un ouvert U sur lequel $T\Omega$ est trivialisable, on se donne quatre champs A, B, C et D linéairement indépendants. On peut construire 3 champs X^1, Y^1 et Z^1 tels que $\text{Vect}(X^1, Y^1, Z^1) = (\mathbb{R}T)^\perp$, par le procédé d'orthogonalisation de Graam-Schmit, on peut construire 3 champs X_1, Y_1, Z_1 formant une base orthonormale de $(\mathbb{R}T)^\perp$ pour la métrique riemannienne g_R qui est la restriction de g à $(\mathbb{R}T)^\perp$. On note θ_1 , l'application qui envoie X_1 sur A , Y_1 sur B , Z_1 sur C et T sur D . De façon identique, on construit θ_2 l'application qui envoie X_2 sur A , Y_2 sur B , Z_2 sur C et S sur D , alors l'application $\theta = \theta_2^{-1} \circ \theta_1$ répond à la question car les procédés de construction sont C^∞ . \square

2. L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER LE LONG D'UN CHAMP CHRONOLOGIQUE

Sur un espace-temps, si les feuilles espace sont complètes et orientables, on dit que la chronologie est complète et orientable. Dorénavant, toutes les chronologies considérées sont complètes et orientables. Sur chaque feuille espace E qui est une variété riemannienne, on note μ_E l'unique mesure riemannienne telle que $\mu_E(f) = \int_E f d\mu_E$ où $d\mu_E = \sqrt{|\det g_E|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ et $\varphi = (x^1, x^2, x^3)$ est une carte orientée de E .

Definition 2. $L_T^2(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, telles que pour toute feuille E , $\langle \psi_E, \psi_E \rangle_E = \int_E \bar{\psi}_E \psi_E d\mu_E < +\infty$ où $\psi_E = \psi|_E$ et $\bar{\psi}_E$ est le conjugué de ψ_E .

Remark 2. $L_T^2(\Omega)$ n'est pas un espace de Hilbert, c'est une réunion disjointe d'espaces de Hilbert. C'est un fibré sur l'espace formé des feuilles espaces du fibré \mathcal{E} de fibre un espace de Hilbert \mathcal{H} isomorphe à $L^2(E)$ où E est une feuille de \mathcal{E} .

Sur chaque feuille d'espace E , on définit l'opérateur de Laplace-Beltrami

$\Delta_E : L^2(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E) \rightarrow L^2(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ qui est un opérateur hermitien et on pose: $\Delta : L_T^2(\Omega) \rightarrow L_T^2(\Omega)$, l'application telle que $p_E \circ \Delta = \Delta_E \circ p_E$ pour toute feuille d'espace E où p_E est la restriction à E . Il faut vérifier que $\Delta\psi$ est C^∞ si ψ l'est, ce qui est évident sur une carte distinguée U du feuilletage. On peut ainsi écrire l'hamiltonien H sur l'espace-temps Ω comme la somme de $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$, où m est

la masse de la particule, cette particule est soumise à un champ de force dérivant d'un potentiel réel indépendant du champ chronologique T , c'est-à-dire $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\frac{\partial}{\partial T}V = 0$ et V dans la somme est l'opérateur de multiplication par la fonction V .

Lemma 2. *Si ϕ est C^∞ alors $\Delta\phi$ est C^∞ .*

Proof. Soit $\beta : V \rightarrow \mathbb{R}$, une carte distinguée du feuilletage \mathcal{E} , c'est-à-dire une submersion telle que chaque composante connexe de $\{\beta = c\}$ est contenue dans une feuille de \mathcal{E} . Il existe une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^4$ de Ω et une carte $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}$ de \mathbb{R} telle que la carte distinguée α de \mathcal{E} , $\alpha = \psi \circ \beta = \varphi^4$, où $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4)$. On dit que la carte φ est une carte chronologique. Le champ chronologique $\frac{\partial}{\partial T}$ est orthogonal à $\varphi^4 = c$, il existe une fonction t vérifiant, $t g(\frac{\partial}{\partial T}, \partial_4) = -1$ et $\frac{\partial}{\partial T} = t \partial_4$.

Dans cette carte, pour une feuille E contenant la composante connexe de ω dont l'image par φ est $\{c\}$, l'opérateur de Laplace-Beltrami sur cette feuille espace, s'écrit pour toute C^∞ -application $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} P_E \circ \Delta(\phi(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, x^4))) &= \Delta_E \circ P_E(\phi(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, x^4))) \\ \Delta_E(\phi(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, c))) &= \frac{\sum_{j,k=1}^3 \partial_j (\sqrt{g(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, c))} g^{jk}(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, c)) \partial_k(\phi \circ \varphi^{-1})(x^1, x^2, x^3, c))}{\sqrt{g(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, \bullet))}} \text{ et,} \\ \Delta(\phi(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, x^4))) &= \frac{\sum_{j,k=1}^3 \partial_j (\sqrt{g(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, x^4))} g^{jk}(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, x^4)) \partial_k(\phi \circ \varphi^{-1})(x^1, x^2, x^3, x^4))}{\sqrt{g(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, x^4))}}, \end{aligned}$$

où $g = \det(g_{jk})$ avec, (g_{jk}) est la matrice de la restriction de la métrique de Lorentz g restreinte à la feuille $\varphi^4 = c$, dans la base $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$ et $(g^{jk}) = (g_{jk})^{-1}$. Cette application $\Delta(\phi(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, x^4)))$ est C^∞ comme application des variables (x^1, x^2, x^3, x^4) .

De plus, $\frac{\partial}{\partial T}V = 0$ implique $\partial_4 V = 0$ donc, $\frac{\partial}{\partial x^4}V(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, x^4)) = 0$ et $V(\varphi^{-1}(x^1, x^2, x^3, x^4)) = W(x^1, x^2, x^3) + K$ (K est une constante) qui est C^∞ si V est C^∞ sur chaque feuille espace. Les constructions sont C^∞ , $\Delta\psi$ et $H\psi$ sont C^∞ . \square

Une onde de l'espace-temps Ω est une application $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, telle que $\Psi_E = \Psi|_E \in L^2(E, d\mu_E)$ où $d\mu_E = \sqrt{|\det(g|_E)|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, $\varphi = (x^1, x^2, x^3)$ est une carte orientée de E et $g|_E$ est la métrique riemannienne induite par la métrique de Lorentz g sur la feuille E du feuilletage espace \mathcal{E} .

Si X est un champ, sa norme est notée $Q(X) = g(X, X) : \omega \rightarrow Q(X)(\omega) = g(\omega)(X(\omega), X(\omega))$. Un champ est g -régulier si 0 est une valeur régulière de $Q(X)$, en particulier $Q(X)^{-1}(0)$ est une sous variété de dimension 3.

Les composantes connexes de $\Omega \setminus Q(X)^{-1}(0)$ sur lesquelles $Q(X)^{-1} < 0$ sont les espaces-temps associés au champ X et $T = \frac{X}{\sqrt{-g(X, X)}}$ est le champ chronologique de chaque sous-espace-temps associés à X . Sur un espace-temps associé à X , noté Ω_X , on peut décomposer cette partie de l'univers, en un feuilletage espace-temps à l'aide du champ chronologique T . Chaque champ Y sur Ω_X s'écrit, $Y = Y_E - t_Y T$. Un point $\omega \in \Omega_X$ est contenu dans une seule feuille espace E et une seule feuille chronologique C . Dans un voisinage de ω le point $\exp_\Omega(Y)$ a pour coordonnées $(\exp_E Y_E, \exp_C t_Y T)$, où \exp_Ω , \exp_E et \exp_C sont les applications exponentielles associées à, respectivement g , $g|_E$ et $-g|_C$ au point ω .

Chaque onde Ψ définie sur un espace-temps peut, au voisinage du point ω , s'écrire sous la forme $\Psi(p) = \Psi(q, t)$ avec $p = \exp_\Omega(Y)$, $q = \exp_E Y_E$, $t = t_Y$ et $Y = Y_E - t_Y T$. Pour chaque feuille espace E , il existe une mesure riemannienne $d\mu_E$ définie par la métrique riemannienne induite par $g_E = g|_E$ et $\int_E \bar{\Psi}(q, t) \Psi(q, t) d\mu_E$ représente la probabilité de présence dans la feuille E à l'instant t pour l'observateur situé en ω .

Sur chaque feuille espace E on peut définir l'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta_E \Psi(q, \bullet) = \text{div}(\nabla \Psi(q, \bullet))$. En coordonnées locales $\Delta_E = \frac{1}{\sqrt{g_E}} \partial_\nu (\sqrt{g_E} g_E^{\nu\mu} \partial_\mu)$. L'équation de Schrödinger s'écrit,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_E \Psi(q, t) + V(q, t) \Psi(q, t). \quad (2.1)$$

Le champ définit un feuilletage locale en feuille-espace et en feuille chronologique. L'onde Ψ qui lui est associée, peut être paramétrée le long des feuilles espace et des feuilles chronologiques par, $\Psi(p) = \Psi(q, t)$ et doit vérifier l'équation 2.1.

Remark 3. L'équation 3.2 donne une généralisation de l'équation de Schrödinger. Le Hamiltonien de 2.1 est $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_E + V$, dans le cadre plus général il nécessaire de faire intervenir l'opérateur d'évolution Φ de l'équation de Dirac-Einstein des champs.

3. EQUATION DE DIRAC-WEYL-FOCK

En mécanique quantique relativiste, l'état d'un électron libre est représenté par une fonction d'onde $\Psi(t, x)$ avec $\Psi(t, \bullet) \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ pour tout t . Cette fonction est solution de l'équation de Dirac libre:

$i\partial_t \Psi = H_0 \Psi$, avec

$$H_0 = i \sum_{k=1}^3 \alpha_k \partial_k + \beta \quad (3.1)$$

, les unités choisies sont $\hbar = c = 1$ et la masse de l'électron est $m_e = 1$. Les $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et β sont des matrices complexes carrées d'ordre 4 représentées par blocs, $\beta = \begin{pmatrix} I & O \\ O & -I \end{pmatrix}$ et $\alpha_k = \begin{pmatrix} O & \sigma_k \\ \sigma_k & O \end{pmatrix}$, $k = 1, 2, 3$ et les matrices σ_k sont les matrices de Pauli d'ordre 2, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui vérifient $\alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k = 2\delta_{kl} I_4$ et $\alpha_k \beta + \beta \alpha_k = O_4$. Ces relations permettent d'assurer que $H_0^2 = -\Delta + Id$ est un opérateur symétrique [3].

L'équation de Dirac a une généralisation naturelle. On se fixe un fibré vectoriel réel $\zeta = (E, \Omega, \pi, \mathbb{R}^4)$ sur l'univers Ω , muni d'une connexion ∇ .

Une fonction d'onde généralisée Ψ est une section du complexifié de ζ , noté $\zeta_{\mathbb{C}} = (E_{\mathbb{C}}, \Omega, \pi_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}^4)$. La connexion complexifiée associée à ∇ est $\nabla(r + is) = \nabla(r) + i\nabla(s)$ pour toutes sections r et s de ζ , ∇ est une application de $\Gamma(E_{\mathbb{C}})$ à valeurs dans $\Gamma(\Lambda^1 \Omega \otimes E_{\mathbb{C}})$.

Si $E = \Omega \times \mathbb{C}^4$, Ψ est un 4-scalaire, on est dans la représentation "QRD" et si $E = T\Omega$, Ψ est un 4-vecteur, on est dans la représentation "TRD" de l'équation de Dirac ([1],[2]).

Dans une carte (x^1, x^2, x^3, x^4) de l'ouvert U de l'espace-temps Ω , sur laquelle le fibré $T\Omega$ est trivialisable, l'équation d'évolution de Dirac-Einstein,

$$\gamma^\nu D_\nu (\Psi) = -i \frac{mc}{\hbar} \Psi, \quad (3.2)$$

où m est la masse de la particule d'onde Ψ . L'opérateur de l'équation d'évolution est,

$$\Phi = \gamma^\nu D_\nu, \quad (3.3)$$

γ^ν sont les matrices de Dirac associée à la section de Dirac de E et $D_\nu = L_\nu + \Gamma_\nu$, Γ_ν est la section locale de $\text{End}(E)$ dont la matrice, dans le "local frame", est $(\Gamma_\nu)_\alpha^\beta = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ et L_ν est la dérivée de Lie le long du champ $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ définie par $L_\nu \Psi = (\partial_\nu \Psi^\sigma) \partial_\sigma$ si $\Psi = \Psi^\sigma \partial_\sigma$. Φ est l'opérateur de l'équation d'évolution de la ∇^γ -quantification des champs [4]. Le principe de ∇^γ -quantification des ondes s'énonce ainsi:

"Si aucune mesure n'est faite dans la carte U , l'onde Ψ évolue suivant l'équation $\Phi\Psi = -i \frac{mc}{\hbar} \Psi$, où m est la masse de la particule. Si une mesure de la masse de la particule en $\varpi \in U \subset \Omega$ est m_ϖ , alors $-i \frac{m_\varpi c}{\hbar}$ est une valeur propre de $\Phi(\varpi)$.

L'onde prend la valeur Ψ_ϖ où $\Psi_\varpi = \hat{\mathcal{P}}(\varpi)(\Psi(\varpi))$, $\hat{\mathcal{P}}(\varpi)$ est le projecteur sur le sous-espace propre associé à la valeur propre $-i \frac{m_\varpi c}{\hbar}$. La probabilité de trouver la valeur m_ϖ lors de la mesure est

$$p_\varpi = \frac{\|\Psi_\varpi\|_\varpi^2}{\|\Psi(\varpi)\|_\varpi^2}, \quad (3.4)$$

et l'équation d'évolution du champ est $\Phi\Psi = -i \frac{mc}{\hbar} \Psi$, $\Psi(\varpi) = \Psi_\varpi$ et $m(\varpi) = m_\varpi$. " [4]

L'opérateur Φ dans 3.2, doit être un opérateur hermitien pour le produit hermitien sur $T_{\mathbb{C}}\Omega$ induit par g . Les valeurs propres de $i\Phi$ sont de la forme $\frac{mc}{\hbar}$, où m parcourt l'ensemble des masses des particules dans l'univers et en particulier, les masses des particules qui vivent dans l'espace-temps associé au champ chronologique T .

4. L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER-DIRAC

Dans l'hypothèse de l'existence d'un champ chronologique T , on peut définir une équation de Schrödinger-Dirac, les ondes deviennent des champs Ψ de l'espace-temps Ω et l'équation de Schrödinger $H\Psi = i\partial_T\Psi$ se généralise par une équation de la forme

$$H\Psi = i\mathcal{L}_T\Psi = i[T, \Psi], \quad (4.1)$$

\mathcal{L}_T est l'extension de la dérivée de Lie ∂_T aux champs de Ω . Le Hamiltonien H devient un opérateur sur les champs complexes, c'est-à-dire, une section sur Ω à valeurs dans $\Lambda_{\mathbb{C}}^1\Omega \otimes T_{\mathbb{C}}\Omega$.

Remark 4. $\mathcal{L}_T\Psi$ mesure le défaut de commutativité d'un champ Ψ par rapport au champ chronologique T .

Theorem 3. Le Hamiltonien H s'écrit,

$$H = -\frac{\hbar}{mc} \mathcal{L}_T \circ \Phi - i\partial_T(\log(m)) \text{Id}_{T_{\mathbb{C}}\Omega}, \quad (4.2)$$

où $\Phi = \gamma^\nu D_\nu$ est l'opérateur d'évolution de Dirac-Einstein au rang 1. En particulier, si la masse ne varie pas le long du champ chronologique T , le hamiltonien s'écrit,

$$H = -\frac{\hbar}{mc} \mathcal{L}_T \circ \Phi. \quad (4.3)$$

Proof. $\mathcal{L}_T \circ \Phi (\Psi) = [T, \Phi (\Psi)] = [T, -i\frac{mc}{\hbar} \Psi] = -i\frac{mc}{\hbar} [T, \Psi] + \partial_T (-i\frac{mc}{\hbar}) \Psi$
 $= -\frac{mc}{\hbar} H \Psi - i\frac{c}{\hbar} \partial_T (m) \Psi.$
 $H \Psi = -\frac{\hbar}{mc} (\mathcal{L}_T \circ \Phi (\Psi) + i\frac{c}{\hbar} \partial_T (m) \Psi) = -\left(\frac{\hbar}{mc} \mathcal{L}_T \circ \Phi + i\partial_T (\log(m)) \text{Id}_{T_C\Omega}\right) (\Psi).$ \square

Remark 5. $\partial_T (\log(m)) = \frac{\partial_T(m)}{m}$ représente la dérivée logarithmique le long du champ chronologique T de la masse m de la particule.

Remark 6. Le Hamiltonien dépend du choix du champ chronologique T , donc du "frame local" contrairement à l'opérateur d'évolution $\Phi = \gamma^\nu D_\nu$ qui ne dépend que de la section de Dirac du fibré complexifié des champs et de la connexion ∇ choisie sur ce fibré [4].

Soient X, Y et Z des sections locales pour lesquelles $\{X, Y, Z\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}T$, on pose $\partial_0 = T$, $\partial_1 = X$, $\partial_2 = Y$ et $\partial_3 = Z$. Dans le "local frame" $\{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3\}$,

Theorem 4.

$$H = -\frac{\hbar}{mc} (\gamma_{,0}^\nu D_\nu + \gamma^\nu (L_0 L_\nu + \Gamma_{\nu,0} + \Gamma_\nu L_0)) - i\partial_T (\log(m)) \text{Id}, \quad (4.4)$$

avec $L_\nu \Psi = (\partial_\nu \Psi^\sigma) \partial_\sigma$ pour $\Psi = \Psi^\sigma \partial_\sigma$, $\gamma_{,0}^\nu$ et $\Gamma_{\nu,0}$ sont les endomorphismes qui ont pour matrices dans la base canonique $(\partial_0 \gamma_\beta^{\nu\sigma})$ et $(\partial_0 \Gamma_{\alpha\nu}^\beta)$.

Proof. $[T, \Phi (\Psi)] = \partial_0 (\gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu \Psi^\beta + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \Psi^\alpha)) \partial_\sigma$
 $\partial_0 (\gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu \Psi^\beta + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \Psi^\alpha))$
 $= \partial_0 \gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu \Psi^\beta + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \Psi^\alpha) + \gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_0 \partial_\nu \Psi^\beta + (\partial_0 \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \Psi^\alpha + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \partial_0 \Psi^\alpha)$
 $= (\gamma_{,0}^\nu)_{\beta}^{\sigma} (D_\nu \Psi)^\beta + (\gamma^\nu)_{\beta}^{\sigma} ((L_0 \circ L_\nu + \Gamma_{\nu,0} + \Gamma_\nu L_0) (\Psi))^\beta$
 $= ((\gamma_{,0}^\nu D_\nu + \gamma^\nu (L_0 L_\nu + \Gamma_{\nu,0} + \Gamma_\nu L_0)) (\Psi))^\sigma.$ Donc,
 $H = -\frac{\hbar}{mc} (\gamma_{,0}^\nu D_\nu + \gamma^\nu (L_0 L_\nu + \Gamma_{\nu,0} + \Gamma_\nu L_0)) - i\partial_T (\log(m)) \text{Id}.$

On a posé $L_\nu \Psi = (\partial_\nu \Psi^\sigma) \partial_\sigma$, $\gamma_{,0}^\nu$ et $\Gamma_{\nu,0}$ sont les endomorphismes dont les matrices, dans la base canonique, sont respectivement, $(\partial_0 \gamma_\beta^{\nu\sigma})$ et $(\partial_0 \Gamma_{\alpha\nu}^\beta)$. \square

5. CONCLUSION

On se situe sur une partie connexe Ω de l'univers où on ne fait aucune mesure sur la métrique g et sur laquelle vit au moins un champ chronologique T . Toute particule est décrite par une section Ψ de $T_C\Omega$ ou $\Omega \times \mathbb{C}^4$, on se place dans la situation "TRD". Sur le fibré $T_C\Omega$ cohabitent une connexion ∇ et une section de Dirac γ . La connexion ∇ peut être la connexion de Levi-Civita de g , mais pas nécessairement si on est sur l'univers tout entier.

Le champ Ψ vérifie l'équation de Dirac-Einstein

$$\Phi \Psi = \lambda \Psi, \quad (5.1)$$

avec $\lambda = -i\frac{mc}{\hbar}$, où m est la masse de la particule associée au champ Ψ . L'équation générale de Dirac-Weyl-Fock dite équation de Schrödinger-Dirac est $H\Psi = i\mathcal{L}_T\Psi = i[T, \Psi]$, \mathcal{L}_T est la dérivée de Lie le long du champ chronologique étendue aux champs.

Le Hamiltonien de l'équation de Dirac-Weyl-Fock s'écrit,

$$H = -\frac{\hbar}{mc}\mathcal{L}_T \circ \Phi - i\partial_T(\log(m))\text{Id}_{T_c\Omega}, \quad (5.2)$$

où Φ est l'opérateur d'évolution de l'équation de Dirac-Einstein au rang 1. On peut entièrement décrire l'évolution d'une particule avec une connexion de l'univers, dite connexion fondamentale ∇ . La section de Dirac γ est solution de l'équation relativiste quantique

$$\text{Ric}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R\gamma^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta} + \Lambda\gamma^{\alpha\beta}, \quad [4] \quad (5.3)$$

$\Lambda = \Lambda_0$ est la constante cosmologique et $\gamma^{\alpha\beta}$ est le tenseur de Poisson,

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{8}\text{Trace}(\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\}) = \frac{1}{4}\text{Trace}(\gamma^\alpha\gamma^\beta). \quad (5.4)$$

Les masses des particules sont quantifiées, elles sont proportionnelles aux valeurs propres de l'opérateur Φ de l'équation d'évolution d'Einstein-Dirac des champs. Si on veut étudier l'évolution le long d'un champ chronologique, il suffit de prendre la dérivée de Lie de l'équation d'évolution des champs.

REFERENCES

- [1] M. Arminjon, F. Reifler, "Representations of the Dirac wave function in a curved spacetime", Proc. Fifth International Workshop DICE2010 : current issues in quantum mechanics and beyond, Journal of Physics: Conference Series 306 (2011), 012061.
- [2] M.A., F. Reifler, "Classical-quantum correspondence and wave packet solutions of the Dirac equation in a curved spacetime", 13th International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, (Varna, Bulgarie, 3-8 juin 2011). Journal of Geometry and Symmetry in Physics 24, 77-88 (2011).
- [3] M.J. Esteban, E. Séré, Les équations de Dirac-Fock. Séminaire E.D.P(1997-1998), Exposé n°5, U.M.R 7640 C.N.R.S.
- [4] J.L.Jonot, ∇^γ -quantification des mesures physiques, hal.archives-ouvertes.fr (2014).
E-mail address: jean-louis.jonot@ac-versailles.fr