HAL
open science

Quelques méthodes multi-échelles adaptées au calcul de structures

David Dureisseix

To cite this version:

David Dureisseix. Quelques méthodes multi-échelles adaptées au calcul de structures. Journée Phi2AS Tendances Nouvelles en Calcul de Structures, 2000, Paris, France. hal-00998128

HAL Id: hal-00998128

https://hal.science/hal-00998128v1

Submitted on 19 Oct 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

Quelques méthodes multi-échelles adaptées au calcul de structures

David Dureisseix*

Ce document est le preprint de la publication : D. Dureisseix, Quelques méthodes multi-échelles adaptées au calcul de structures, Journée Φ^2AS Tendances Nouvelles en Calcul de Structures, IPSI vol 24(2), 15 Juin 2000.

Introduction

Lors de simulations en général, et de calcul de structures en particulier, il est toujours nécessaire de se poser la question de *l'échelle pertinente* des phénomènes que l'on cherche à prendre en compte. Cette problématique est bien entendu aussi présente dans la modélisation du comportement des matériaux, en particulier avec la définition d'un volume élémentaire représentatif (VER) dans lequel on considère les quantités d'intérêt comme plus ou moins *homogènes* ; on tronque ainsi les effets plus locaux, c'est à dire dont la longueur de variation est d'un ordre de grandeur plus petite que la taille du VER. La problématique est alors de pouvoir obtenir des quantités d'intérêt dites *macro* (pour macroscopiques) suffisamment représentatives des moyennes des quantités locales dites *micro* (pour microscopiques) sans avoir à faire une simulation à une échelle inférieure (échelle micro).

On peut cependant noter qu'avec les moyens de calcul actuels, dont les capacités de traitement sont accrues (rapidité, capacité mémoire, parallélisme, *etc* [Noor 97, Dongarra *et al.* 99]), on devient capable de simuler à une échelle de plus en plus fine pour obtenir des résultats de plus en plus précis et prédictifs. Cependant, on trouve toujours une limite inférieure. Il existe par exemple actuellement des simulations de modèles atomistiques de dislocations [Fivel *et al.* 98, Lemarchand *et al.* 98]. L'objectif est de pouvoir comprendre certains phénomènes intervenant à cette échelle, pour mieux élaborer

*Laboratoire de Mécanique et Technologie, LMT-Cachan (École Normale Supérieure de Cachan / CNRS / Université Paris 6), 61 Avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan CEDEX, http://www.lmt.ens-cachan.fr

des modèles phénoménologiques (macroscopiques) de comportement ; il est encore aujourd'hui impensable de simuler l'ensemble d'une structure à une telle échelle.

Un autre exemple typique est celui des matériaux composites (plus généralement des structures hétérogènes). On peut les considérer comme des structures à part entière lorsqu'on cherche à décrire les phénomènes mis en jeu au niveau des constituents élémentaires (les fibres et la matrice par exemple). La connaissance de tels phénomènes peut être nécessaire, par exemple pour établir les critères de dégradation du matériau qui dépendent de telles quantités micro.

Des *stratégies de calcul* tirant parti des caractéristiques de ces structures doivent être mises en place pour pouvoir simuler de façon précise, sans avoir des coûts de calcul prohibitifs (trop longue durée de traitement ou trop grande capacité mémoire requise). Ces techniques sont souvent liées à l'aspect *homogénéisation* des structures ou des matériaux. Cet aspect sera brièvement rappelé dans la première partie. La deuxième partie, quant à elle, présentera une approche récente qu'on pourra classer dans les modèles de matériaux complexes (dont l'état est décrit par un grand nombre de variables internes) nécessitant des redescentes au niveau micro.

Un autre aspect des méthodes multi-échelles concerne les techniques purement numériques de résolution d'un problème déjà modélisé, techniques de résolution parfois indépendantes même de la nature du problème posé. Un exemple typique est celui des méthodes multi-grilles dont le principe est décrit dans la troisième partie.

Le point remarquable est que les deux aspects *mécanique* et *numérique* précédemment évoqués, sont intimement mêlés dans plusieurs des *tendances actuelles des stratégies de calcul* pour des problèmes qui présentent des phénomènes à des échelles différentes, et qui utilisent des stratégies de résolution évoluées tenant compte de ces particularités. La troisième partie présente une telle approche dans le cadre des méthodes multi-grilles, et la dernière partie, dans celui des méthodes de décomposition de domaine multi-échelles.

1 Principes d'homogénéisation des structures et des matériaux

En mécanique, ces techniques sont maintenant bien établies dans le cas des problèmes linéaires, depuis plusieurs années. De nombreux travaux existent dans la littérature sur ces approches, aussi seuls leurs grands traits sont rap-

pelés ici, de façon simplifiée, et uniquement pour les techniques qui relèvent aussi de l'homogénéisation des structures (résolution d'un problème de structure à l'échelle micro).

Pour la présentation suivante, on se placera en quasi-statique, en élasticité linéaire et en petites perturbations (cas des structures à comportement linéaire).

1.1 Idées clés

L'exemple caractéristique de système dont la réponse possède des composantes micro à variation rapide d'intensité (zones à fort gradient de contraintes par exemple) est celui des matériaux ou des structures fortement hétérogènes. Ils comportent plusieurs *phases* de propriétés mécaniques très différentes ; la principale conséquence est la présence, en général, de 3 échelles dans le problème (voir figure 1) :

- une échelle de longueur l caractéristique de la taille des hétérogénéités (taille d'une cellule élémentaire d'un matériau composite par exemple) ;
- une échelle de longueur d caractéristique d'un VER ;
- une échelle de longueur L caractéristique de la structure entière.

Souvent, ces échelles sont très différentes et bien séparées, c'est à dire que $l \ll d \ll L$.

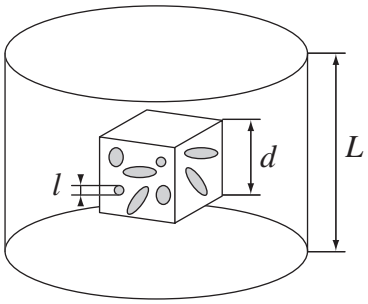

Figure 1: différentes échelles dans le problème

Prenons l'exemple d'un matériau composite composé de fibres unidirectionnelles placées régulièrement dans une matrice, figure 2. Lorsque la réponse est observée à l'échelle d'une cellule de base (longueur caractéristique l) on remarque de rapides variations de la réponse, figure 3-a. Lorsque cette réponse est observée à l'échelle de la structure (longueur caractéristique $L \gg l$), il est possible d'y voir la superposition d'une réponse "*moyenne*"

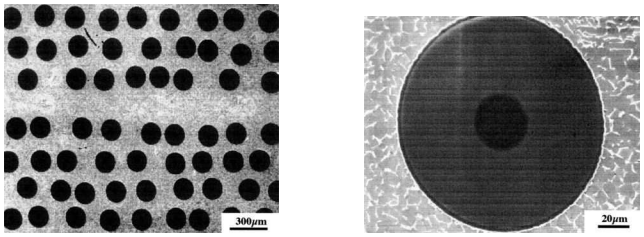

Figure 2: composite quasi-périodique à fibre longue SiC/Ti, d'après [Feyel et Chaboche 00]

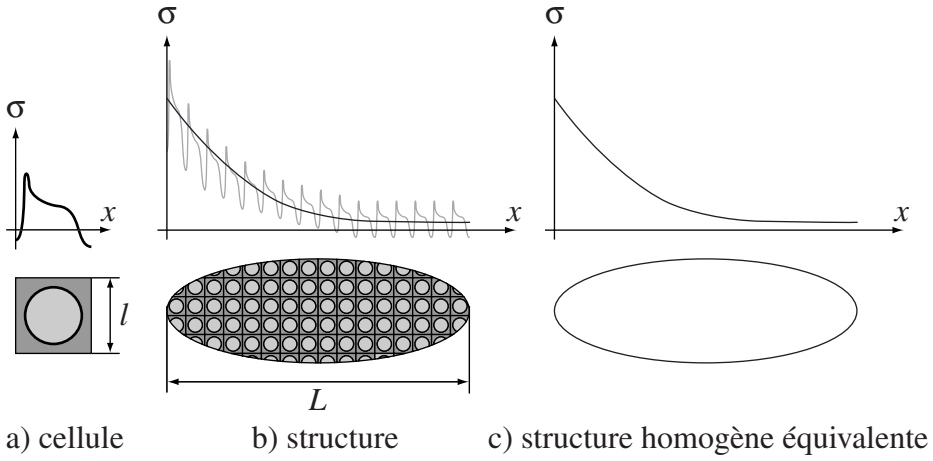

Figure 3: structure composite

(dite macro) et d'une réponse plus *locale*, fortement perturbée (dite micro), figure 3-b.

Dans le cas de matériaux hétérogènes dispersés aléatoirement, la "cellule" devient le VER contenant un nombre suffisant de composants élémentaires pour pouvoir définir la notion de moyenne sur le VER, [Hashin 83]. La figure 4, extraite de [Diot et Arnault 91] montre la micrographie d'une coupe transversale de composite unidirectionnel SiC/SiC. Le diamètre des fibres est d'environ $4\,\mu$m.

L'objectif est de trouver le matériau homogène équivalent, qui donnerait directement comme réponse la réponse moyenne. On cherche donc ses caractéristiques à partir d'une description micro du matériau.

Pour déterminer ces caractéristiques, on est souvent amené à utiliser des "sondes," c'est à dire qu'on sollicite (par essai ou par calcul) une cellule (ou un certain nombre de cellules, suivant la notion de moyenne qu'on veut utiliser), par une série de chargements homogènes. On cherche ainsi à obtenir la réponse locale (non homogène, donc) ; c'est l'étape de *localisation*.

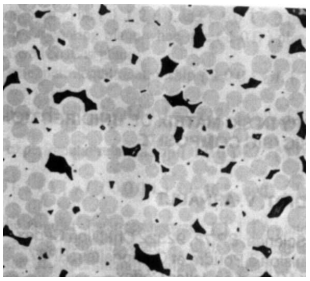

Figure 4: composite SiC/SiC unidirectionnel, d'après [Diot et Arnault 91]

- Lorsqu'on ne dispose de données micro du matériau que sous forme statistique, on peut rechercher une information sur la réponse locale sous forme d'intervalles de variation [Kröner 67].
- Pour les phases parfaitement désordonnées, on peut appliquer des méthodes déterministes comme les méthodes autocohérentes [Hill 65], de même que pour les phases présentant une périodicité, avec les méthodes asymptotiques ; la réponse locale peut alors être obtenue (par exemple par simulation directe) après modélisation à l'échelle micro d'un volume représentatif. On se place dans ce cadre pour la description des méthodes suivantes.

La réponse moyenne est ensuite identifiée d'une certaine manière (suivant la notion d'équivalence qu'on veut utiliser) avec la réponse homogène de la cellule homogène cherchée, figure 5. C'est l'étape *d'homogénéisation*.

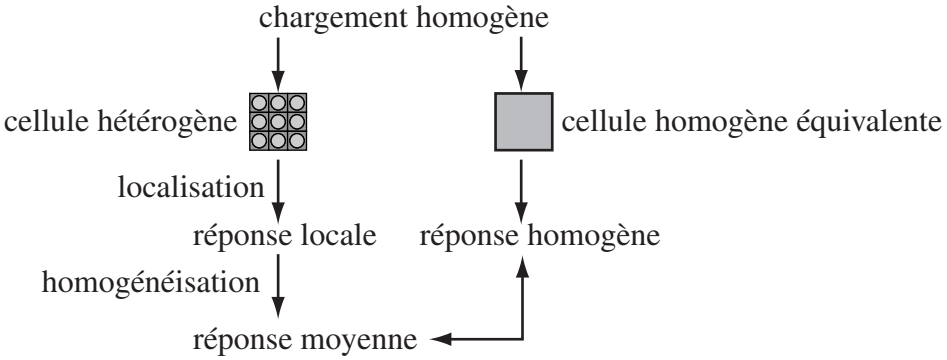

Figure 5: exemple de procédure d'homogénéisation

Notons bien que l'étape de localisation fournit de plus une technique pour estimer la réponse micro une fois la réponse macro connue.

Une autre façon de voir cette procédure (d'un point de vue plus "structure") consiste à remarquer qu'on ne cherche à résoudre à l'échelle micro que

cellule par cellule, et non sur la structure entière. Le *problème de référence* est donc l'ensemble de la structure modélisée à l'échelle micro, et la procédure d'homogénéisation est alors une technique d'approximation de ce problème. Pour pouvoir découpler une cellule des autres, il faut alors faire des hypothèses sur l'interaction des cellules voisines (en inter-effort entre les cellules, ou en déplacement, au bord de la cellule traitée). Le couplage global est effectué à l'échelle macro.

1.2 Homogénéisations statique et cinématique

On considère ici un ensemble de cellules noté Ω dont l'état est caractérisé par les valeurs en tout point M d'un champ de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(M)$ ou de contraintes $\boldsymbol{\sigma}(M)$. On considère de plus l'équivalent homogène $\overline{\Omega}$ sur lequel les champs sont uniformes et notés $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$. L'équivalence utilisée est ici basée sur la dualité en "travail" ou énergie :

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \operatorname{Tr} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \frac{1}{2}\int_{\overline{\Omega}} \operatorname{Tr} \overline{\boldsymbol{\sigma}}\, \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \tag{1}$$

La notation $(\operatorname{Tr} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\varepsilon})$ correspond à la trace du produit, aussi qualifiée de produit contracté, et noté $(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon})$.

Sur Ω, la relation de comportement est en tout point $\boldsymbol{\sigma}(M) = \boldsymbol{D}(M)\boldsymbol{\varepsilon}(M)$ où $\boldsymbol{D}(M)$ est l'opérateur de Hooke au point M. Sur $\overline{\Omega}$, elle s'écrit $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \overline{\boldsymbol{D}}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, et $\overline{\boldsymbol{D}}$ est l'opérateur de Hooke homogénéisé (cherché), uniforme sur $\overline{\Omega}$.

1.2.1 Homogénéisation cinématique

La sonde employée est ici un champ de déformation uniforme $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ qu'on considère donc comme donné.

L'étape de localisation consiste à résoudre un problème sur Ω avec $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ comme terme de charge ; on impose sur le bord $\partial\Omega$ un déplacement donné linéaire de déformation constante associée $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$: $U_d = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} OM_{|\partial\Omega}$. Le problème consiste à trouver un champ de déplacement $U \in \mathcal{U}$ (champs réguliers valant U_d sur $\partial\Omega$) tel que

$$\forall U^\star \in \mathcal{U}_0, \quad \int_{\Omega} \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}(U)\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}(U^\star) d\Omega = 0 \tag{2}$$

où $\mathcal{U}_0$ est l'ensemble des champs réguliers nuls sur $\partial\Omega$.

Remarque : le même problème peut être reformulé en faisant intervenir directement $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ de la façon suivante : il faut trouver $U \in \mathcal{U}$ tel que

$$\forall U^\star \in \mathcal{U}, \quad \int_{\Omega} \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}(U)\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}(U^\star) - \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega = 0$$

Ce dernier problème, ou sa première formulation, peut être résolu par exemple avec une analyse approchée par éléments finis. On est alors conduit à mailler la cellule au niveau micro.

Le problème étant linéaire, on sait que la déformation locale $\boldsymbol{\varepsilon}$ dépend linéairement du chargement U_d ou $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \boldsymbol{L}(M)\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$\boldsymbol{L}$ est appelé l'opérateur de localisation des déformations. Une relation linéaire existe aussi entre la contrainte homogène $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ et la contrainte locale $\boldsymbol{\sigma}(M)$:

$$\boldsymbol{\sigma}(M) = \boldsymbol{H}(M)\overline{\boldsymbol{\sigma}}$$

$\boldsymbol{H}$ est l'opérateur de sur-contrainte. Pour l'obtenir, comme pour obtenir $\boldsymbol{L}$, il faut résoudre toute une série de problèmes élémentaires sur la cellule Ω.

L'étape d'homogénéisation consiste à retrouver la contrainte homogène $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ à partir de la contrainte locale $\boldsymbol{\sigma}(M)$, par application de l'équivalence (1). On peut montrer qu'on a ainsi :

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \frac{d\Omega}{\overline{\Omega}} =< \boldsymbol{\sigma} >$$

On note ainsi avec des crochets $< \cdot >$ la prise de moyenne sur la cellule.

En dehors des cas pathologiques où il y a un trou, une fissure ou une inclusion rigide dans Ω, on montre qu'on a aussi

$$< \boldsymbol{\varepsilon} >= \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Bien d'autres propriétés s'obtiennent une fois que l'on dispose des opérateurs $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{H}$; par exemple :

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{D}} &=< \boldsymbol{D}\boldsymbol{L} > \quad \leq \quad < \boldsymbol{D} > \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{L}\overline{\boldsymbol{D}}^{-1} \\ < \boldsymbol{H} > &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Approximation de Voigt : dans certains cas de figure, on peut faire l'approximation supplémentaire $\boldsymbol{\varepsilon} \approx \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, c'est à dire $\boldsymbol{L} \approx \mathbf{1}$. Á partir de ce moment, l'étape de localisation ne nécessite plus de calcul de structure puisqu'on a directement $\overline{\boldsymbol{\sigma}} =< \boldsymbol{\sigma} >=< \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} >=< \boldsymbol{D} > \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$. On retrouve donc la *loi des mélanges* : $\overline{\boldsymbol{D}}_V =< \boldsymbol{D} >$.

1.2.2 Homogénéisation statique

C'est la méthode que l'on pourrait appeler duale de la précédente : cette fois-ci, la sonde est un champ de contraintes homogène $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$; on impose sur le bord $\partial\Omega$ une répartition d'efforts $F_d = \overline{\boldsymbol{\sigma}} n$, n étant la normale extérieure.

L'étape de localisation consiste donc cette fois-ci à trouver un champ de déplacement régulier U tel que

$$\forall U^\star, \quad \int_\Omega \operatorname{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}(U) \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varepsilon}(U^\star) d\Omega - \int_{\partial\Omega} F_d \cdot U^\star dS = 0$$

Toujours dans les cas ne présentabnt ni trou ni fissure, le terme de charge précédent peut aussi s'écrire $\int_\Omega \operatorname{Tr} \overline{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon}(U^\star) d\Omega$. La résolution de ce problème par une méthode d'éléments finis en déplacement s'écrira alors, après discrétisation, $KU = B\overline{\boldsymbol{\sigma}}$, où K est la matrice de rigidité et $B\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ les forces généralisées équilibrant $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$.

Dans l'étape d'homogénéisation, on montre alors que $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} =< \boldsymbol{\varepsilon} >$ et en général, que $\overline{\boldsymbol{\sigma}} =< \boldsymbol{\sigma} >$.

En définissant les mêmes opérateurs $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{L}$ que précédemment, et en les appelant cette fois-ci opérateurs de localisation des contraintes et opérateur de sur-déformation, on a maintenant les propriétés :

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{D}^{-1}} &=< \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{H} > \quad \leq \quad < \boldsymbol{D}^{-1} > \\ < \boldsymbol{L} > &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Approximation de Reuss : dans certains cas de figure, on peut aussi faire l'approximation supplémentaire $\boldsymbol{\sigma} \approx \overline{\boldsymbol{\sigma}}$, c'est à dire $\boldsymbol{H} \approx \mathbf{1}$. De même que précédemment, l'étape de localisation ne nécessite plus de calcul de structure puisqu'on a directement $\overline{\boldsymbol{D}_R^{-1}} =< \boldsymbol{D}^{-1} >$: c'est la *loi des mélanges inverse.*

1.2.3 Identification

Avec chacune des techniques précédentes, un premier objectif est de déterminer l'opérateur de Hooke homogénéisé $\overline{\boldsymbol{D}}$. Pour les approximations de Voigt ou Reuss, il est obtenu explicitement et correspond aux classiques lois des mélanges et des mélanges inverse. Sans ces approximations, il faut procéder par identification. Par exemple pour l'homogénéisation statique, l'équivalence en énergie (1) conduit à

$$\begin{aligned} \forall \overline{\boldsymbol{\sigma}} \text{ uniforme}, \quad \frac{1}{2} \int_{\overline{\Omega}} \operatorname{Tr}[\overline{\boldsymbol{\sigma}} \overline{\boldsymbol{D}}^{-1} \overline{\boldsymbol{\sigma}}] d\Omega &= \frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{Tr}[\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}] d\Omega \\ \frac{1}{2} \overline{\Omega} \operatorname{Tr}[\overline{\boldsymbol{\sigma}} \overline{\boldsymbol{D}}^{-1} \overline{\boldsymbol{\sigma}}] &= \frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{Tr}[\boldsymbol{H} \overline{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{H} \overline{\boldsymbol{\sigma}}] d\Omega \end{aligned}$$

Il s'agit de l'égalité de deux fonctions quadratiques en $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ (tenseur symétrique d'ordre 2) donc sur une base de dimension $n = 6$. Cela conduit à $\frac{1}{2}n(n+1) = 21$ équations indépendantes ; or, dans le cas de l'élasticité linéaire homogène sans symétrie particulière, il y a 21 coefficients a priori indépendants dans $\overline{\boldsymbol{D}}$. Ils peuvent donc bien être tous identifiés. Ce sont les propriétés bien agréables de linéarité du problème qui permettent de déterminer ainsi pour chacune des charges élémentaires de la base de taille $n = 6$, les réponses élémentaires associées. Ces dernières permettront de reconstruire la réponse à une charge macro quelconque par combinaison linéaire des charges et réponses élémentaires. Le cas non-linéaire est bien sûr plus délicat, et de nombreux travaux de recherche sont encore en cours sur ce sujet. On pourra par exemple consulter [Berveiller et Zaoui 79, Ponte-Castaneda et Suquet 97]. Le chapitre suivant illustrera quelques approches récentes en non-linéaire.

Au passage, en linéaire, il est possible de construire explicitement l'opérateur de localisation $\boldsymbol{H}$ qui permettra de trouver la contrainte locale $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{H}\overline{\boldsymbol{\sigma}}$, une fois que le calcul de structure global sur le problème homogénéisé aura permis de trouver la réponse macroscopique. C'est le deuxième objectif des méthodes d'homogénéisation.

1.2.4 Lien entre les deux approches

En général, l'homogénéisation statique ne donne pas les mêmes résultats que l'homogénéisation cinématique : $(\overline{\boldsymbol{D}})^{-1} \neq \overline{\boldsymbol{D}^{-1}}$, exception faite du cas où $l \ll d \ll L$ (séparation des échelles). On parle alors d'approches asymptotiquement équivalentes. Les approximations de Voigt et Reuss fournissent dans ce cas les *bornes* du même nom, puisqu'on a alors :

$$\overline{\boldsymbol{D}} \leq \overline{\boldsymbol{D}}_V$$
$$(\overline{\boldsymbol{D}})^{-1} \leq \overline{\boldsymbol{D}_R^{-1}}$$

De meilleures bornes peuvent être trouvées, comme dans [Hashin et Shtrikman 62]. Dans le cas limite de répartition parfaitement désordonnée d'hétérogénéités aléatoires, on peut mettre en place les méthodes auto-cohérentes [Hill 65]. Quand les hétérogénéités sont suffisamment diluées dans une matrice homogène pour ne pas inter-agir entre elles, on peut utiliser l'approche d'Eshelby [Eshelby 61].

Un cas de figure qui ne satisfait généralement pas à l'hypothèse précédente de séparation des échelles est celui des matériaux composites périodiques, pour lesquels il est intéressant de prendre comme cellule la maille élémentaire (figure 3-a) afin de réduire les coûts des problèmes de localisation. On a alors $d \approx l$ et une méthode d'homogénéisation périodique sera mieux adaptée.

1.3 Homogénéisation périodique

1.3.1 Principes

Cette technique est utilisable dans le cas de figure où la structure (ou le matériau) est construit périodiquement à partir d'une cellule de base appelée *maille* élémentaire (c'est à dire à partir de mailles translatées dans les différentes directions), comme sur la figure 3-b. Un domaine privilégié d'application est celui des matériaux composites structurés, comme celui du composite 3D carbone-carbone de la figure 6.

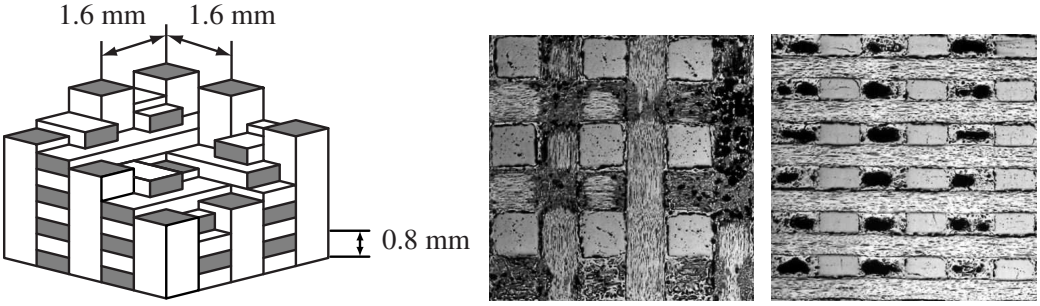

Figure 6: empilement (d'après M. Poss) et micrographies d'un composite 3D carbone-carbone (d'après [Crestia *et al.* 99])

Dans ce cas de figure, on peut noter que la solution micro est quasi-périodique (superposition d'une valeur moyenne quasi-constante par maille, et d'une solution micro dont la forme se reproduit d'une maille à l'autre) au moins loin des bords de la structure, et d'autant mieux que la structure est grande par rapport à la maille élémentaire ($d \ll L$). On peut alors tenir compte de cette particularité pour découpler les effets aux différentes échelles [Sanchez-Palencia 80].

L'idée est d'utiliser 2 variables (une par échelle) pour décrire la solution : une variable de position macro X à l'échelle de la structure (L), et une variable de position y à l'intérieur d'une maille (qui varie dans un intervalle de largeur l), voir figure 7.

Si on note le rapport d'échelles $\varepsilon = \frac{d}{L}$, on peut définir une variable $Y = \frac{y}{\varepsilon}$ (*zoom*) pour qu'elle soit comparable en amplitude à X.

La solution en déplacement du problème de structure à l'échelle micro est alors $U(M) = U(X, Y)$ et l'opérateur de Hooke est $\boldsymbol{D}(M) = \boldsymbol{D}(Y)$ puisqu'il est périodique d'une maille à l'autre.

L'idée maîtresse consiste à développer la solution sous la forme :

$$U(X, Y) = U_0(X, Y) + \varepsilon U_1(X, Y) + \varepsilon^2 U_2(X, Y) + \dots$$

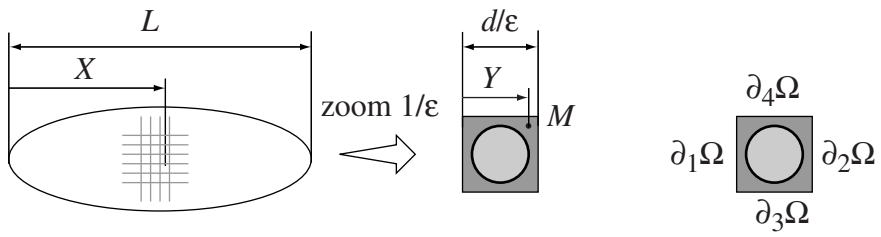

Figure 7: définition des échelles et du problème micro sur la maille

les U_1, U_2... étant Y-périodiques. Ce développement est bien entendu d'autant plus judicieux que ε est petit.

La deuxième étape consiste à développer aussi les équations d'équilibre ($\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + f_d = 0$, où f_d est la charge volumique et $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}(U)$), puis à les écrire séparément pour les différentes puissances du paramètre ε qui apparaissent.

On souhaite ici tronquer le développement à l'ordre 1, c'est à dire obtenir les champs U_0 (solution macro) et U_1 (partie micro).

1.3.2 Résultats

Les résultats obtenus par cette théorie sont les suivants (par ordre décroissant d'ordre de grandeur des termes du développement) :

- pour le terme en ε^{-2} : $\operatorname{div}_Y[\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_Y(U_0)] = 0$ qui permet de dire que la solution macro ne possède pas de courte longueur de variation, autrement dit, est indépendante de Y : $U_0(M) = U_0(X)$. On notera $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ la partie macro de la déformation associée : $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_X(U_0)$.

- pour le terme en ε^{-1} : $\operatorname{div}_Y[\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_Y(U_1)] = -\operatorname{div}_Y[\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0]$ (toujours avec U_1 périodique en Y). Le problème en U_1 s'écrit donc sur une maille Ω (donc à variable X fixée, la variable courante restant alors Y dans la maille, et $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ étant considéré comme une donnée, uniforme sur Ω) : trouver $U_1 \in \tilde{\mathcal{U}}$ tel que

$$\forall U^\star \in \tilde{\mathcal{U}}, \quad \int_\Omega \operatorname{Tr}[\boldsymbol{\varepsilon}(U_1)\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}(U^\star)]d\Omega = -\int_\Omega \operatorname{Tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_0\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}(U^\star)]d\Omega \tag{3}$$

  $\tilde{\mathcal{U}}$ est l'ensemble des champs réguliers sur Ω qui vérifient les conditions de périodicité ; par exemple en 2D (figure 7) $U_{1|\partial_1\Omega} = U_{1|\partial_2\Omega}$ et $U_{1|\partial_3\Omega} = U_{1|\partial_4\Omega}$. Ce problème peut être résolu par des méthodes de transformées de Fourier rapide (FFT) ou par éléments finis standards. Dans ce dernier cas, le problème discrétisé en déplacement devient :

$$\tilde{K}U_1 = -B\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \tag{4}$$

où $\tilde{K}$ est la matrice de rigidité avec les liaisons de périodicité.

Ce problème est bien entendu linéaire. En le résolvant pour une série de déformations macro, on peut aussi construire explicitement l'opérateur $\boldsymbol{\Lambda}$ de localisation des déformations : $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_Y(U_1) = -\boldsymbol{\Lambda}(Y)\boldsymbol{\varepsilon}_0$.

Comme pour les méthodes précédentes, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ dépend de X, donc la solution est différente d'une maille à l'autre ; par contre $\boldsymbol{\Lambda}$ ne dépend que de Y, il est donc le même d'une maille à l'autre.

- le terme en ε^0 donnera à terme le problème en U_2. Comme on souhaite tronquer le développement de la solution au premier ordre, il suffit de n'écrire que la condition d'existence de la solution du problème en U_2 qui est, compte tenu des propriétés de périodicité,

$$\int_\Omega [\mathrm{div}_X(\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_1) + \mathrm{div}_X(\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0) + f_d] = 0 \tag{5}$$

Avec $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\varepsilon}_0$, et en supposant f_d à grande longueur de variation, c'est à dire constant sur la maille, $\mathrm{div}_X[< \boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda} > \boldsymbol{\varepsilon}_0] + f_d = 0$. En posant

$$\overline{\boldsymbol{D}} =< \boldsymbol{D}(\mathbf{1} - \boldsymbol{\Lambda}) >$$

qui est l'opérateur de Hooke homogénéisé, on définit ainsi le problème en U_0.

La déformation au premier ordre est donc $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\varepsilon}_0$ et l'opérateur de localisation des déformations des méthodes précédentes a ici pour équivalent $\boldsymbol{L} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\Lambda})$. La contrainte est $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{L}\boldsymbol{\varepsilon}_0$, d'où l'opérateur de localisation des contraintes $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{L}\overline{\boldsymbol{D}}^{-1}$. Toujours sans trou ni fissure, on a aussi $< \boldsymbol{\sigma} >= \overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{\varepsilon}_0$ et $< \boldsymbol{\varepsilon} >= \boldsymbol{\varepsilon}_0$, car $< \boldsymbol{\varepsilon}_1 >= 0$.

1.3.3 Limites de l'approche

La restriction majeure est la nécessité d'avoir des milieux périodiques pour lesquels 2 échelles sont séparées ($d \approx l \ll L$).

De plus, en particulier au voisinage des bords de la structure, l'hypothèse de périodicité n'est plus guère valable et le champ macro devient rapidement variable ; il n'est plus quasi-constant par maille. Le champ obtenu au voisinage du bord est alors très perturbé par rapport à celui obtenu par homogénéisation périodique puis localisation, figure 8, c'est ce qu'on appelle un *effet de bord*. Il est alors nécessaire de faire appels à des techniques de *re-localisations* et homogénéisation *couplées* pour avoir un champ local de bonne qualité, ce qui complique et alourdit la technique précédente.

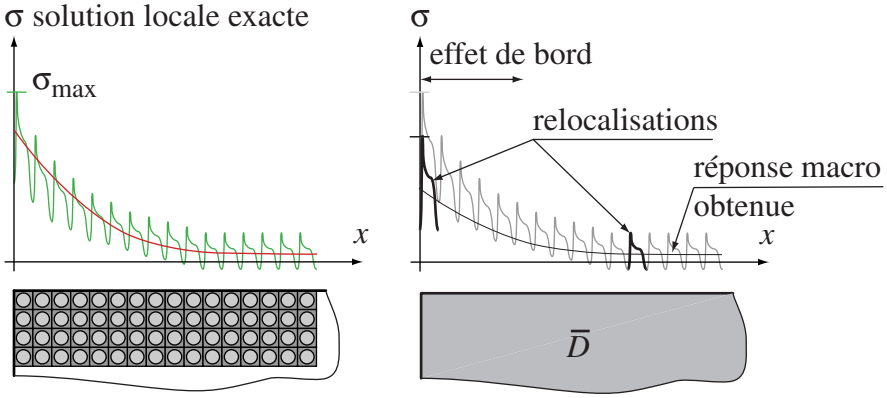

Figure 8: effet de bord

Dans certains cas, les effets de bord sont si importants que l'analyse locale micro doit être réalisée sur l'ensemble de la structure. Par exemple, avec l'utilisation d'un composite carbone-carbone Sepcarb 4D®, fabriqué par Snecma Moteurs, en particulier pour les divergents de systèmes de propulsion, la cellule n'est pas de taille petite par rapport à la pièce, ni par rapport à l'éprouvette, figure 9, la période du composite étant de l'ordre de 7.2 mm.

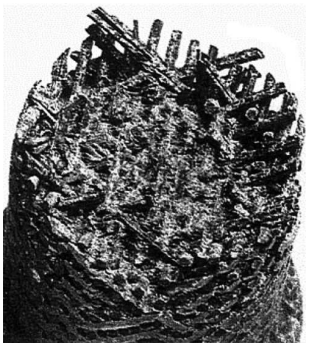

Figure 9: éprouvette de traction rompue en Sepcarb 4D®

Effectivement, sur une éprouvette de traction rompue, on aperçoit une zone périphérique avec décohésion entre fibres et matrice, et une zone intérieure qui a, elle, été rompue sans développer une telle décohésion. La sollicitation dans la section de l'éprouvette n'est donc pas homogène dans cet essai de traction. Pour interpréter un tel essai de structure, il est nécessaire de recourir à un calcul. La figure 10 présente une "éprouvette" à section carrée et la modélisation micro d'une tranche (seules les fibres sont représentées). Á cause de la présence d'un grand effet de bord, il est nécessaire de procéder au calcul entier au niveau micro de la tranche. Pour cela, une méthode mixte

de décomposition de domaine a été utilisée, [Aubard *et al.* 99].

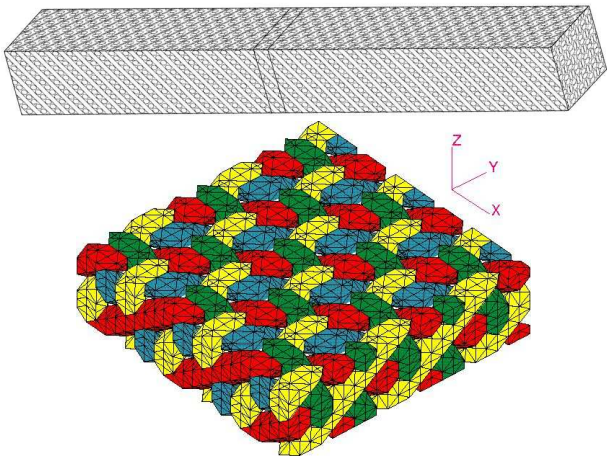

Figure 10: éprouvette et maillage micro d'une tranche, d'après [Aubard *et al.* 99]

Un résultat de cette simulation est présenté sur la figure 11. Il s'agit du saut de déplacement normal aux interfaces entre fibres et matrice, qui a une forte influence sur l'endommagement.

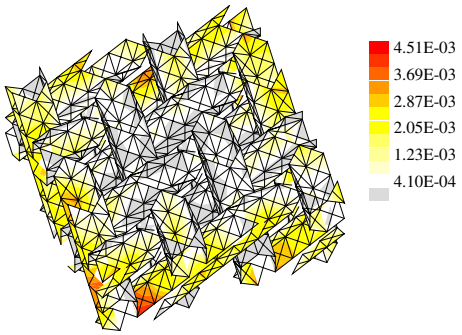

Figure 11: saut de déplacement normal, d'après [Aubard *et al.* 99]

1.3.4 Bilan

La résolution d'une série de problèmes en U_1, paramétrés par des déformations macro ε_0 élémentaires, définis sur une même maille de référence, permet de construire l'opérateur $\boldsymbol{L}$. Une fois celui-ci connu, on peut définir l'opérateur de Hooke homogénéisé $\overline{\boldsymbol{D}}$. La résolution du problème macro donne alors le champ de déformation ε_0. Á chaque endroit où cela est nécessaire, il est

possible de revenir à la solution locale en contraintes et en déformations au niveau de la maille courante, en utilisant $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{H}$.

On peut remarquer que l'homogénéisation périodique relève aussi des méthodes d'équivalence en énergie : en utilisant la définition du problème en U_1, on montre qu'on a encore l'équivalence (1), où $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_1$ et $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_1$, ce qui conduit aussi à une autre expression de $\overline{\boldsymbol{D}}$: $\overline{\boldsymbol{D}} =< \boldsymbol{LDL} >$.

De manière générale en homogénéisation, 3 étapes sont à distinguer :

- la résolution sur la maille ou le VER pour obtenir les caractéristiques du matériau homogénéisé, et les opérateurs de localisation ;
- la résolution du problème macro ;
- un "post-processing" pour revenir à l'échelle micro.

2 Exemples de calcul non-linéaire avec homogénéisation

Le cas de figure où le comportement est non-linéaire pose de plus grandes difficultés. En particulier, parce qu'il est difficile de définir un comportement homogénéisé non-linéaire valable pour tous les trajets de chargement. Une solution consiste à homogénéiser en cours de route, le long du trajet effectivement suivi par la solution. Les étapes de localisation / homogénéisation sont donc réalisées de façon incrémentale, comme dans les approches suivantes.

2.1 Modèle polycristallin

Le comportement de chaque élément de volume à l'échelle micro résulte d'un calcul complet d'homogénéisation : localisation, résolution à l'échelle micro, homogénéisation en retour.

Dans le cas de polycristaux métalliques à micro-structure aléatoire, comme c'est le cas de l'acier 316L dont la figure 12 donne une micrographie, le modèle d'homogénéisation utilisé est un modèle auto-cohérent.

Le principe de l'ensemble de l'approche, [Cailletaud 92, Cailletaud et Pilvin 94], est décrit sur la figure 13. La localisation consiste à localiser la contrainte macroscopique moyenne sur un élément de volume Σ, en une contrainte moyenne $\boldsymbol{\sigma}^g$ sur chaque grain g du polycristal. Pour intégrer le comportement micro, et obtenir le taux de déformation moyen $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^g$ sur chaque grain, il faut

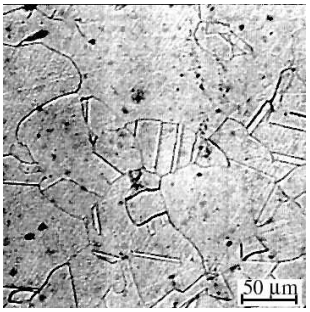

Figure 12: micrographie du matériau métallique polycristallin 316L

- projeter $\boldsymbol{\sigma}^g$ sur les différents systèmes de glissement s d'un grain monocristallin (12 systèmes pour les microstructures cubiques à faces centrées ou CFC) ce qui donne la contrainte de cisaillement τ^s ;
- intégrer le comportement local sur les différents systèmes de glissement (car ils sont couplés à ce niveau) pour obtenir les taux de cisaillement anélastiques $\dot{\gamma}^s$;
- reconstruire $\dot{\varepsilon}^g$ à partir des composantes $\dot{\gamma}^s$sur chaque système de glissement.

Enfin, l'homogénéisation reconstruit le taux de déformation plastique macro $\dot{\mathbb{E}}^p$ par prise de moyenne sur les grains de l'élément de volume (la partie élastique demeure ici uniquement à l'échelle macro).

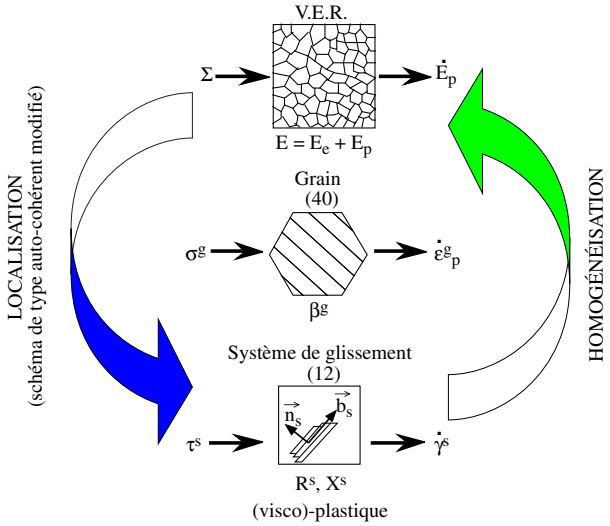

Figure 13: principe du modèle polycristallin

Un exemple d'utilisation est celui de la simulation d'un essai sur une éprouvette triaxiale, figure 14, en alliage 316 (grains de structure CFC), sous chargement triaxial non-proportionnel, [Feyel *et al.* 97]. 40 grains à 12 systèmes de glissement sont utilisés pour le modèle polycristallin ; les coefficients ont étés identifiés pour reproduire le comportement macro élasto-visco-plastique d'une base de donnée d'essais uni et bi-axiaux. La même figure représente aussi le maillage (éclaté en sous-domaines) d'un huitième de l'éprouvette (par raison de symétrie), la zone centrale est la zone utile.

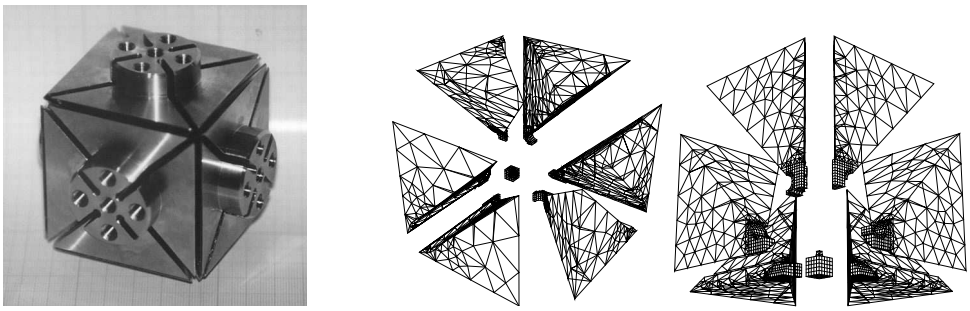

Figure 14: éprouvette triaxiale et maillage éclaté en sous-domaines, d'après [Feyel *et al.* 97]

Les résultats macro obtenus sont illustrés sur la figure 15, ils concernent la contrainte (en MPa) et la déformation axiale lors d'un chargement sur une première branche, au 2e cycle de charge.

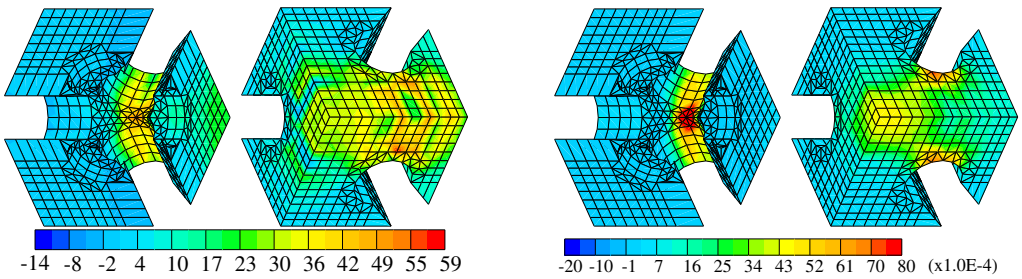

Figure 15: contraintes (à gauche, en MPa) et déformations (à droite) macroscopiques simulées, d'après [Feyel *et al.* 97]

Au niveau micro, on peut bien entendu atteindre plus d'informations, comme par exemple la distribution des systèmes de glissement actifs (ici moyennée dans le cube central) à 3 instants de chargement, figure 16.

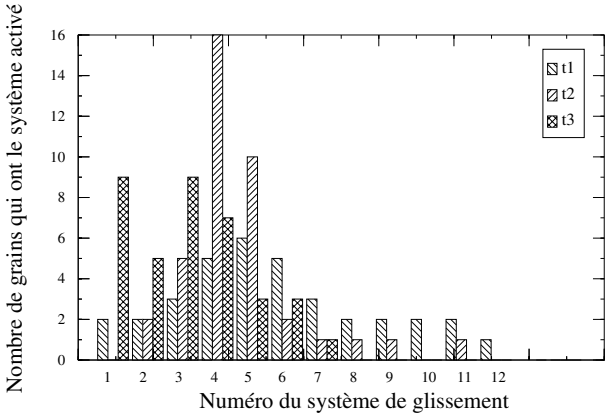

Figure 16: activation des systèmes de glissement, d'après [Feyel *et al.* 97]

2.2 Modèle EF^2

Dans le cas d'un composite SiC/Ti à fibre longue (celui de la figure 2), la micro-structure est ordonnée. Dans ce cas, une approche par homogénéisation périodique est bien adaptée. Le comportement de chaque élément de volume à l'échelle macro résulte alors d'un calcul par éléments finis à l'échelle micro sur une maille du matériau périodique (avec conditions de périodicité). Il s'agit donc d'une méthode d'éléments finis à deux échelles, ou éléments finis imbriqués, d'où la dénomination EF^2, [Feyel et Chaboche 00]. La figure 17 illustre le principe de l'approche.

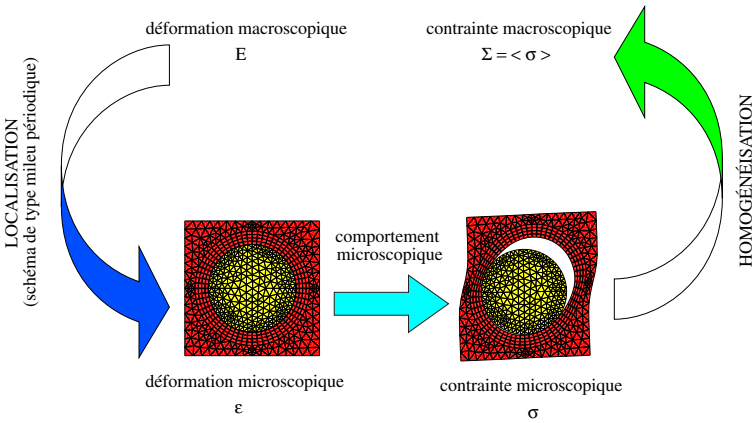

Figure 17: principe du modèle EF^2

Les deux niveaux sont résolus par une méthode de Newton-Raphson, et une intégration classique de loi de comportement phénoménologique est réalisée à l'échelle micro seulement (comportement de la matrice élasto-visco-

plastique, des fibres élastiques, et éventuellement des interfaces entre fibres et matrice).

L'application, extraite de [Feyel et Chaboche 00], est celle de la simulation d'un essai de flexion 4 points, les fibres étant placées parallèlement au moment de flexion, en déformation plane. La figure 18 donne la contrainte axiale macroscopique, et la figure 19, les valeurs de la déformation microscopique cumulée au point 1 de la structure macroscopique.

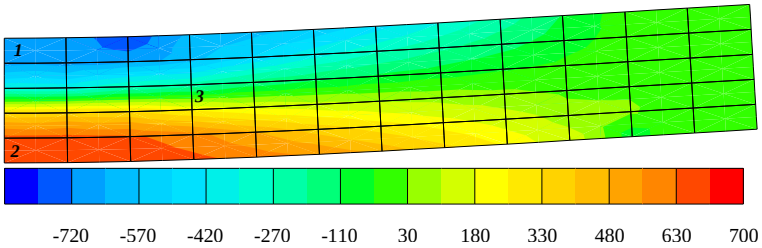

Figure 18: contrainte macroscopique axiale (MPa), d'après [Feyel et Chaboche 00]

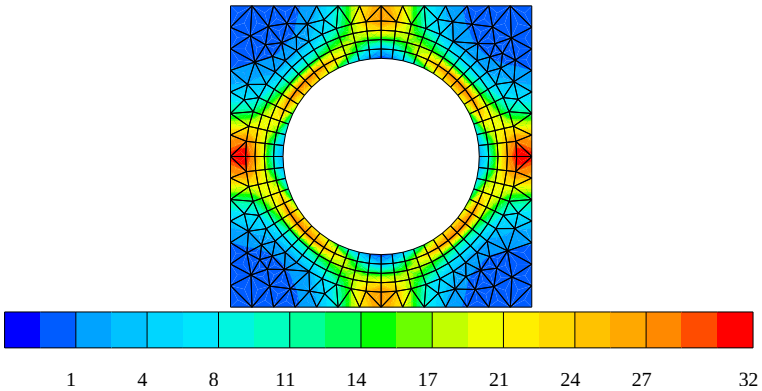

Figure 19: déformation plastique cumulée microscopique (10^{-3}), d'après [Feyel et Chaboche 00]

2.3 Modèle d'agrégats polycristallins

Une troisième approche, le modèle d'agrégats polycristallins [Barbe *et al.* 00], a pour but d'obtenir une estimation de l'hétérogénéité des contraintes et des déformations à l'intérieur même des cristaux d'un polycristal métallique. Pour cela, il est nécessaire de simuler directement sur une micro-structure, et pas seulement de résoudre le problème d'homogénéisation comme pour

les modèles précédents. Il est donc nécessaire de modéliser et de mailler la micro-structure (avec un générateur 3D de micro-structure aléatoire, en respectant les éventuelles proportions de phase), comme sur la figure 20.

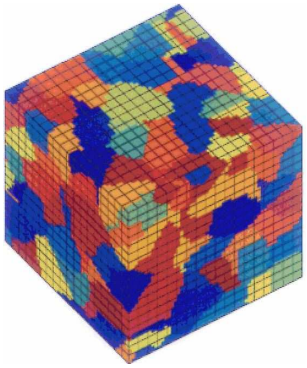

Figure 20: modélisation de la micro-structure aléatoire à 238 grains, d'après [Barbe *et al.* 00]

L'avantage par rapport aux techniques précédentes est la possibilité d'obtenir des gradients dans un même grain, et de prendre en compte l'interaction entre les grains (de façon plus fine qu'avec un modèle auto-cohérent, par exemple).

L'inconvénient est la lourdeur du calcul, qui fait que pour l'instant, seul 1 VER est calculé. Néanmoins, une application concernée est la possibilité de réaliser un véritable "essai virtuel" sur élément de volume, qui permet de dépouiller les résultats de façon beaucoup plus complète que ne permet l'instrumentation d'un essai bien réel. Cela permet notamment de préciser la compréhension des phénomènes au niveau micro, et de bâtir des modèles de comportement phénoménologiques standards, qui soient plus performants.

Bien entendu, comme pour le modèle polycristallin dont celui-ci reprend en grande partie le comportement au niveau du grain, des informations nombreuses sur le matériau au niveau micro sont requises.

Pour l'exemple suivant, emprunté à [Barbe *et al.* 00], la technique d'homogénéisation est de type périodique. On ne prendra donc pas en compte les effets de bord (comme quand on se place en hypothèse de milieu infini), mais ce n'est pas gênant au vu de l'application visée. Le maillage micro (correspondant à 1 seul point de Gauss macroscopique) est composé de $18 \times 18 \times 18$ éléments cubiques à 20 nœuds, chacun avec $3 \times 3 \times 3$ points de Gauss micro, le tout pour 238 grains. La figure 21 reporte la quantité de glissement plastique, et la contrainte axiale (en MPa) dans le cas d'une tension simple de 0.2 % obtenue au niveau macro.

Il existe alors différentes manières de post-traiter ces résultats :

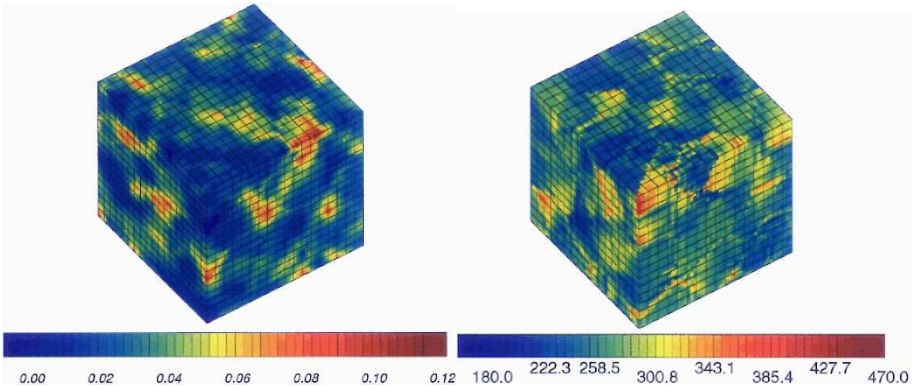

Figure 21: résultats à l'échelle micro sur un VER, d'après [Barbe *et al.* 00]

- en atteignant directement les quantités locales (gradients à l'échelle du grain) ;
- en moyennant les informations précédentes par phase (type de quantités comparables à celles fournies par un modèle auto-cohérent) ;
- en moyennant par VER (obtention d'une réponse contraintes–déformations de type relation de comportement macroscopique).

2.4 Bilan

Même si les calculs macro et micro sont découplés dans les stratégies de calcul précédentes, le problème supplémentaire lors d'un calcul non-linéaire est la nécessité de stocker beaucoup de données microscopiques pour décrire l'état microscopique du matériau (par exemple par un grand nombre de valeurs de variables internes). Il s'agit effectivement de garder une trace historique de l'évolution de l'état, au cours du calcul incrémental. Bien entendu, cette approche pourrait encore être raffinée en considérant, par exemple, 3 échelles différentes au lieu de 2 actuellement. On peut alors utiliser deux approches à 2 échelles successivement, ou même, dans le cas de l'homogénéisation périodique, faire un développement à 3 échelles plutôt qu'à 2.

3 Description des méthodes multi-grilles

On va considérer ici un problème linéaire de calcul de structure, qui a déjà été discrétisé en éléments finis en déplacement, donc sous la forme :

$$Kq = f \tag{6}$$

où K est la matrice de rigidité globale, q le vecteur des déplacements nodaux et f le vecteur des forces généralisées associées.

3.1 Principe

Historiquement initiées dans [Southwell 35, Fedorenko 64], ces méthodes se sont principalement développées pour les problèmes de mécanique des fluides à partir de 1970. Parmi les applications plus récentes au calcul de structures, citons [Parsons et Hall 90a, Parsons et Hall 90b, Lebon *et al.* 90].

Leur principe ([Hackbush et Trottenberg 81]) repose sur le fait que les méthodes itératives classiques (gradient conjugué, Gauss-Seidel, Jacobi, relaxation... [Barrett *et al.* 94]) sont plus efficaces pour réduire les résidus à faible longueur de variation au cours des itérations, que pour ceux à grandes longueurs de variation. Déjà avec cette terminologie, on s'aperçoit qu'on pourra coupler ces méthodes avec les techniques d'homogénéisation, comme cela sera illustré dans le chapitre suivant.

La caractéristique précédente se traduit par une rapide décroissance de l'erreur lors des premières itérations puis une stagnation de celle-ci, ou du moins un taux de convergence diminué.

L'idée des méthodes multi-grilles est de réduire d'abord les hautes fréquences de l'erreur par ce genre d'opérateurs, qui sont alors couramment appelés *lisseurs* ; l'erreur résiduelle ayant une grande longueur de variation, on peut la capturer sur un maillage plus grossier.

La méthode 2-grilles, pour traiter un problème issu d'une discrétisation par éléments finis, considère une grille "fine" Ω_h, de la forme $K_h q_h = f_h$. Comme il d'agit d'une méthode itérative, on note q_h^k l'approximation courante de la solution, obtenue à l'itération k. Le résidu associé est $r_h^k = f_h - K_h q_h$.

L'intervention d'une grille "grossière" Ω_H structurée (c'est à dire que Ω_h est obtenu à partir de Ω_H par subdivision de ses éléments, figure 22) se fait en trois étapes (figure 23-a) :

- pré-lissage : après quelques itérations du lisseur sur le système $K_h(q_h - q_h^k) = r_h^k$ (qui cherche à corriger l'approximation q_h^k), on obtient la nouvelle approximation $q_h^{k+1/2}$ dont l'erreur est $e_h = q_h - q_h^{k+1/2}$. Le problème à résoudre est alors $K_h e_h = r_h$ où $r_h = f_h - K_h q_h^{k+1/2}$, qui est a priori aussi coûteux que le problème de départ. Cependant, si le lissage a été bien effectué, la solution e_h comporte principalement des grandes longueurs de variation ; on peut alors le résoudre de façon approchée par une correction sur grille grossière Ω_H.

- correction sur grille grossière Ω_H : on opère tout d'abord une restriction du résidu sur Ω_H avec $r_H = R r_h$, où R est un opérateur dit de

restriction, pour transférer les informations sur la grille grossière ; puis, on résout le problème grossier de façon directe $K_H e_H = r_H$, et on prolonge enfin le résultat sur la grille fine Ω_h avec $v_h = Pe_H$, où P est un opérateur dit de prolongation, pour transférer les informations sur la grille fine. La nouvelle approximation est alors $q^{k+1} = q^{k+1/2} + v_h$.

- éventuellement, si l'opération de prolongation introduit des perturbations à petites longueurs de variation, on peut opérer un post-lissage afin de les éliminer.

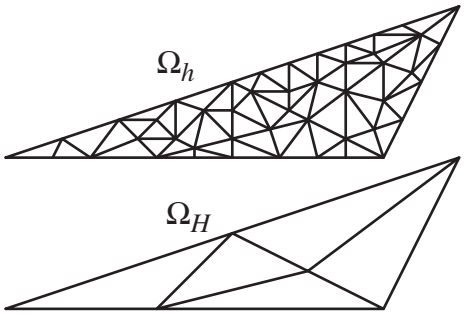

Figure 22: maillages hiérarchiques structurés

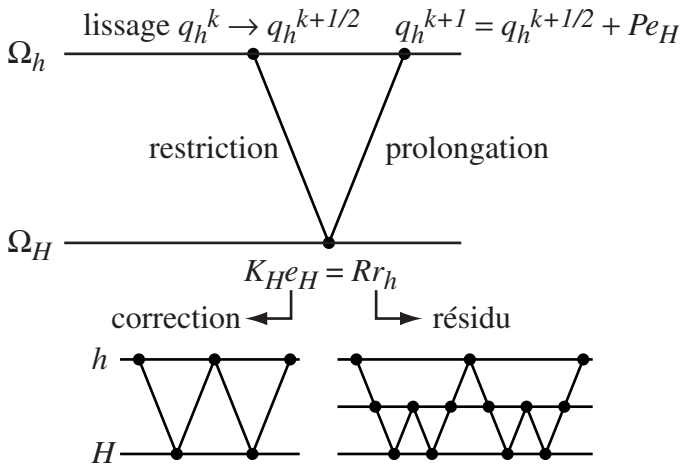

Figure 23: principes d'une méthode multi-grilles, V-cycle pour 2 échelles et W-cycle pour 3 échelles

Le lisseur, le nombre de pas de lissage, les opérateurs de restriction et de prolongation sont des paramètres de ces méthodes.

Dans le cas où la résolution sur grille grossière conduit encore à un problème assez grand, les méthodes itératives peuvent encore être avantageuses par rapport aux méthodes directes. Cette résolution peut alors être traitée récursivement par une méthode 2-grilles. L'algorithme résultant fait intervenir alors plus de deux niveaux de grilles et s'appelle méthode multi-grilles, figure 23.

Le passage par une grille grossière permet d'avoir une approximation du résultat sur grille fine, et de corriger le résultat de l'échelle fine par un couplage avec l'échelle grossière.

Parmi les technique de résolution itératives [Barrett *et al.* 94], les méthodes multi-grilles sont appelées méthodes "rapides" car elles possèdent la propriété d'*optimalité* : pour des problèmes réguliers (somme toute assez académiques), on peut montrer que le coût de résolution varie comme le nombre n d'inconnues du problème ; on dit qu'il est en $o(n)$. Autrement dit, le nombre d'itérations est indépendant du nombre d'inconnues, en $o(1)$.

3.1.1 éléments finis hiérarchiques

On souhaite tout d'abord déterminer une solution grossière sur un maillage grossier afin de trouver les zones à raffiner localement. Le but des éléments finis *hiérarchiques* est de permettre le calcul de la nouvelle solution sur le nouveau maillage tout en conservant le maximum d'informations issues du travail précédent, à savoir : une solution approchée grossière, et une matrice de rigidité grossière assemblée (et éventuellement factorisée) [Adjedj et Aubry 89].

Le principe de ces éléments finis hiérarchiques a été donné dans [Zienkiewicz *et al.* 83] : il consiste à remplacer la base éléments finis classique par une base dite hiérarchique, figure 24. Le problème (6) posé sur la grille fine

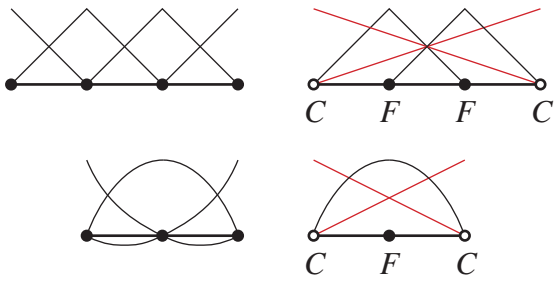

Figure 24: fonctions de base standards et hiérarchiques en h-version (3 éléments linéiques à 2 nœuds) et, en dessous, en p-version sur un élément quadratique à 3 nœuds

peut alors être réécrit en séparant les fonctions de base en deux groupes : celles associées aux éléments grossiers (d'indice C) et les fonctions de base complémentaires (d'indice F). Cela conduit au découpage par blocs :

$$\begin{bmatrix} K_{CC} & K_{CF} \\ K_{FC} & K_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_C \\ q_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_C \\ f_F \end{bmatrix} \tag{7}$$

correspondant à un partitionnement multi-échelles de l'espace éléments finis.

Cette approche permet une adaptativité du raffinement. On peut en effet remarquer que le problème $K_{CC}q_C = f_C$ correspond au problème grossier. Résolu de façon directe, il conduit à une approximation de départ pour q_C. En imaginant l'ajout d'un seul degré de liberté hiérarchique q_F on est conduit à écrire comme approximation, connaissant q_C :

$$q_F = \frac{f_F - K_{FC}q_C}{K_{FF}}$$

On peut en déduire une forme d'approximation possible :

$$\begin{bmatrix} K_{CC} & 0 \\ K_{FC} & D_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_C \\ q_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_C \\ f_F \end{bmatrix}$$

où D_{FF} est la diagonale de K_{FF}, approximation qui possède donc des caractéristiques d'adaptativité et de hiérarchie.

3.1.2 Lien entre multi-grilles et éléments finis hiérarchiques

Le *préconditionnement* du problème de départ conduit à la résolution d'un problème du type :

$$\overline{K}q = \begin{bmatrix} f_C \\ f_F \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} q_C \\ q_F \end{bmatrix}$$

où le préconditionneur peut donc être choisi sous la forme :

$$\overline{K} = \begin{bmatrix} K_{CC} & 0 \\ 0 & D_{FF} \end{bmatrix}$$

On s'aperçoit aussi du lien étroit entre les méthodes multi-grilles et les techniques éléments finis hiérarchiques ; ces dernières peuvent être écrites sous la forme :

- lissage sur le problème $Kq = f$, qui conduit au résidu

$$\begin{bmatrix} r_C \\ r_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_C \\ f_F \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} q_C \\ q_F \end{bmatrix}$$

- restriction du résidu sur l'échelle grossière

$$r_C = R \begin{bmatrix} r_C \\ r_F \end{bmatrix} \text{ avec } R = \begin{bmatrix} 1_C & 0 \end{bmatrix}$$

- résolution à l'échelle grossière :
  $K_{CC} e_C = r_C$ c'est à dire $K_{CC} q_C = f_C - K_{CF} q_F$

- prolongation :

$$\begin{bmatrix} q_C \\ 0 \end{bmatrix} = P U_C$$

  avec $P = R^T$, et donc q_f reste inchangé après passage sur l'échelle grossière.

Les opérations de restriction et prolongation sont ici triviales, et on peut remarquer la conservation de la propriété : $K_{CC} = RKP$.

Enfin, bien que moins immédiate, l'utilisation des éléments finis hiérarchiques au sens de la p-version est aussi possible ([Robinson 86]).

3.2 Une application pour des structures hétérogènes

Prenons cette fois-ci le cas d'une structure réalisée en matériau composite stratifié. Il est courant de distinguer :

- l'échelle macro (échelle de la structure),
- l'échelle dite *méso* (pour mésoscopique, à l'échelle des plis),
- l'échelle micro (échelle des micro-constituants).

Á l'échelle de la structure, les plis individuels ne sont pas pris séparément en compte, contrairement à l'échelle méso, pour laquelle les micro-constituants n'apparaissent encore que par l'intermédiaire d'un milieu homogénéisé.

Avec la puissance actuelle des ordinateurs, et l'avancée des méthodes de calcul, il devient possible de prendre en compte les couplages entre les différentes échelles de façon de plus en plus fine.

La méthode décrite dans [Fish et Belsky 95, Fish 97] peut être interprétée comme une généralisation des méthodes multi-grilles pour les milieux périodiques hétérogènes. Une technique d'homogénéisation est utilisée comme mécanisme pour capturer les basses fréquences de la solution, alors que des techniques classiques de relaxation capturent la réponse oscillante. Le modèle à deux échelles décrit dans [Fish et Belsky 95] contient un modèle éléments

finis sur la micro-structure où les gradients sont élevés, et un modèle global homogénéisé.

Pour définir les opérateurs de prolongation et de restriction, on se donne le modèle micro sur une cellule, et on souhaite obtenir comme modèle grossier, le modèle homogénéisé.

Avec la technique de l'homogénéisation périodique et le développement $U(X,Y) = U_0(X) + \varepsilon U_1(X,Y)$, traduisons le fait que U_1 est issu d'un problème micro particulier : $\boldsymbol{\varepsilon}_Y(U_1) = \boldsymbol{L}(Y)\boldsymbol{\varepsilon}_0(X)$. En fait, si on maille à échelle réelle la cellule (pas de zoom $\frac{1}{\varepsilon}$), $\varepsilon\boldsymbol{L}(Y) = \boldsymbol{L}(y)$, ce qui est plus aisé à mettre en œuvre, et la variable courante est donc y. Cet opérateur est obtenu à partir de résolutions successives micro (autant que de composantes $\boldsymbol{\varepsilon}_{0jk}$ de $\boldsymbol{\varepsilon}_0$). Notons $q^{1^{(jk)}}$ les vecteurs de déplacement discrétisé correspondant à ces solutions. D'après (4), ils s'écrivent $\tilde{K}q^{1^{(jk)}} = -B\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{0jk}$. Avec des composantes unitaires pour $\boldsymbol{\varepsilon}_{0jk}$, on obtient directement les quantités d'intérêt dans les $q^{1^{(jk)}}$. Si on note alors N et N_C les fonctions d'interpolation éléments finis sur la cellule et sur la discrétisation grossière sensée représenter la solution macro discrétisée q_C^0, la solution cherchée en un point courant de position y sur la cellule est

$$U(y) = N(y)Pq_C^0 + N(y)q^{1^{(jk)}}\boldsymbol{\varepsilon}_{0jk}$$

où P est un projecteur hiérarchique du type déjà utilisé dans la partie précédente, ce qui est toujours possible à mettre en place quand $\varepsilon \to 0$.

$\boldsymbol{\varepsilon}_0$ est lié à q_C^0 par la dérivée des fonctions de base macro : $\boldsymbol{\varepsilon}_{0jk} = N_{Cj,k}q_C^0$.

On obtient donc

$$U(y) = N(y)\underbrace{\left[P + q^{1^{(jk)}}N_{Cj,k}\right]}_{\overline{P}(y)}q_C^0$$

En un nœud de discrétisation courant de position y_i, on obtient $q_i = \overline{P}(y_i)q_C^0$.

$\overline{P}$ est l'opérateur de prolongation associé au problème macro homogénéisé. Effectivement, on montre [Fish et Belsky 95] que, lorsque $\varepsilon \to 0$, $K_C = \overline{P}^T K\overline{P}$ est la matrice de rigidité que l'on obtiendrait avec les caractéristiques matériau homogénéisées $\overline{\boldsymbol{D}}$.

L'inconvénient de cette technique est qu'en pratique, ε est fini, ce qui a pour conséquence que le prolongement d'un déplacement macro sur la grille fine n'est pas continu. Pour générer des champs continus, il faut modifier l'opérateur $\overline{P}$ précédent, en particulier en construisant un champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ continu sur le maillage macro. Pour plus de détails sur cette construction, on consultera [Fish et Belsky 95].

En utilisant une telle technique, il faut remarquer que la solution à convergence est la solution de référence micro. En effet, utilisé dans une méthode multi-grilles, le problème homogénéisé et la re-localisation n'interviennent que comme préconditionnement de la résolution du problème micro (avec un lisseur). Ceci est visible sur l'exemple suivant, emprunté à [Fish et Belsky 95]. Il s'agit d'un problème 2D de traction hors plan d'une plaque composite stratifiée $(90/0_4/90)_s$ dont seul un quart a été modélisé par raison de symétrie. La figure 25 présente le résultat obtenu par une homogénéisation périodique puis re-localisation découplées, et en dessous, celui obtenu par la technique précédente. Les contraintes de cisaillement sont similaires, sauf au voisinage du bord libre (effet de bord, voir chapitre 1.3.3) et aussi le long de l'interface supérieure (sorte "d'effet de bord linéique"). La figure 26 est un zoom de la précédente au voisinage du bord libre.

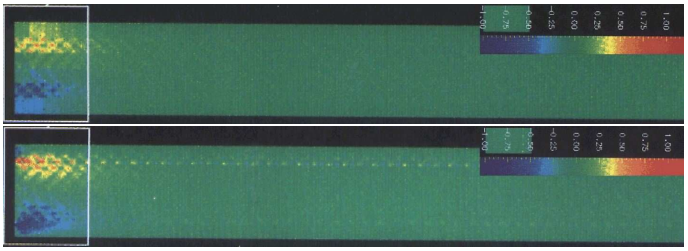

Figure 25: influence d'un effet de bord sur la contrainte de cisaillement obtenue par homogénéisation, d'après [Fish et Belsky 95]

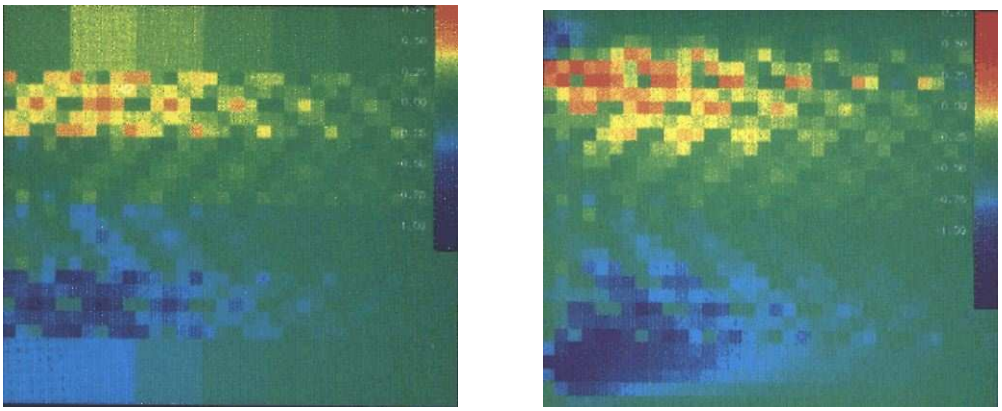

Figure 26: zoom au voisinage du bord libre, d'après [Fish et Belsky 95]

Dans plusieurs types de composites, comme les composites stratifiés, ou tissés, figure 27, on peut utiliser les 3 échelles présentes (micro, méso et

macro) pour bâtir un algorithme sur le même mode à 3 échelles. Le principe est donné sur la figure 28.

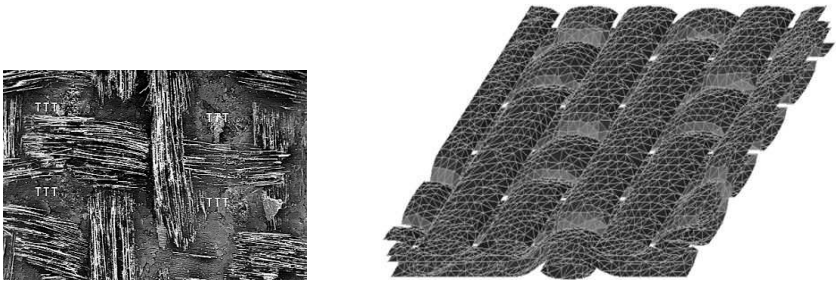

Figure 27: satin tissé Blackglass^{TM} / Nextel d'après [Butler *et al.* 96], et discrétisation de la micro-structure d'après [Fish *et al.* 99]

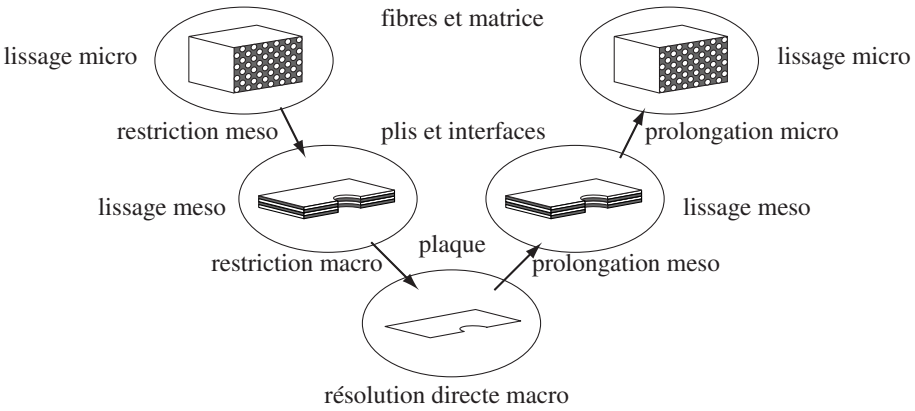

Figure 28: algorithme multi-grilles à 3 échelles

4 Méthodes de décomposition de domaine multi-échelles

Les méthodes de décomposition de domaine furent tout d'abord initiées sans chercher explicitement à introduire le parallélisme dans le traitement du problème, voir [Przemieniecki 63, Dodds, jr. et Lopez 80] par exemple. Avec l'avènement des calculateurs parallèles, plus puissants [Dongarra *et al.* 99], de nombreuses recherches en mécanique se sont développées afin d'utiliser ces nouvelles architectures, d'abord en mécanique des fluides, puis en calcul

de structures, pour lesquelles ces méthodes sont très bien adaptées, en particulier pour la résolution en parallèle du problème implicite élément finis du type (6) [Dureisseix et Champaney 00].

Elles se classent habituellement en deux catégories : celle des sous-domaines recouvrants (méthode de Schwarz [Schwarz 69, Chan et Goovaerts 92]) ou non recouvrants (méthode de Schur), dernière catégorie dans laquelle on se placera ici.

La première idée consiste donc à partitionner géométriquement la structure Ω en sous-domaines Ω^E, figure 29. Ce faisant, on introduit, outre les

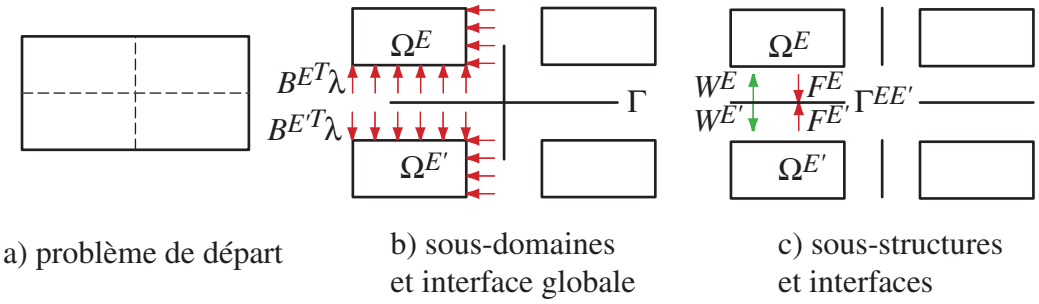

Figure 29: décomposition de domaine

champs de déplacement U^E et de contraintes $\boldsymbol{\sigma}^E$ par sous-domaine Ω^E, de nouvelle quantités relatives aux interfaces entre sous-domaines : un champ de déplacement au bord W^E et un champ d'effort au bord F^E définis pour chaque interface de chaque sous-domaine. Chaque sous-structure est une structure à part entière, interagissant avec son environnement (les interfaces), et chaque interface possède son comportement propre. Pour une interface parfaite entre deux sous-domaines Ω^E et $\Omega^{E'}$, on doit avoir les conditions de transmission $W^E = W^{E'}$ et $F^E + F^{E'} = 0$, figure 29-c.

Les différentes méthodes de décomposition de domaine diffèrent d'abord dans la façon de traiter ces conditions de raccord. Elles peuvent être classées suivant le type de traitement qu'elles utilisent pour les inconnues à l'interface :

- une méthode primale conserve un déplacement continu à la traversée des interfaces et cherche à annuler le déséquilibre en effort ;
- une méthode duale propose des efforts en équilibre sur l'interface et cherche à réduire le saut de déplacement ;
- une méthode mixte cherche à traiter de façon égalitaire efforts et déplacements aux interfaces.

Ces méthodes peuvent être des méthodes directes ([Duff 86] par exemple) ou itératives. Lorsque la taille du problème croît, ces dernières sont actuellement les plus efficaces tant en temps de calcul qu'en encombrement mémoire requis. Cependant, les approches les plus performantes sont obligatoirement *multi-échelles* : une propriété importante de ces méthodes est *l'extensibilité*, c'est à dire que lorsque la taille du problème croît, si on augmente en même temps le nombre de sous-domaines, le nombre d'itérations pour résoudre le problème n'augmente pas. Bramble a pour la première fois montré dans [Bramble *et al.* 86] que pour les méthodes de décomposition de domaine, une telle propriété peut être atteinte en utilisant un problème global sur toute la structure, et qu'il semble difficile de la réaliser sans cela. On s'intéressera donc dans la suite à deux approches de ce type, la première est duale (méthode FETI), la deuxième, mixte (méthode LATIN micro-macro). Pour les approches primales, on pourra consulter [Le Tallec 94] ; signalons aussi une méthode primale extensible qui utilise un mécanisme de transfert global d'information similaire à celui de la méthode FETI : la méthode BDD (pour "Balancing Domain Decomposition" [Mandel 93]).

4.1 Une méthode duale multi-échelles : la méthode FETI

Cette méthode ("Finite Element Tearing and Interconnecting"), initiée dans [Farhat et Roux 91], utilise comme inconnues principales les inter-efforts à l'interface entre sous-domaines, et non pas les déplacements à l'interface ; c'est en cela qu'il s'agit d'une méthode "duale." Elle est actuellement une référence dans le domaine du calcul de structures en décomposition de domaine.

4.1.1 Principes de la méthode

Le problème (6), une fois discrétisé par éléments finis en déplacement, peut s'écrire de la façon suivante : il s'agit de minimiser l'énergie potentielle, sommée sur les sous-domaines, sous contrainte de recollement en déplacement aux interfaces :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{q^E} & \frac{1}{2} {q^E}^T K^E q^E - {f^E}^T q^E \\ \sum_E B^E q^E = 0 & \end{array} \tag{8}$$

Toutes les quantités ayant un exposant E sont relatives au sous-domaine Ω^E, par exemple, K^E est la matrice de rigidité du sous-domaine seul, elle est donc

singulière si le sous-domaine est “flottant” (n’a pas de frontière à déplacement imposé). B^E est une matrice booléenne signée qui repère uniquement les degrés de liberté du sous-domaine qui sont situés sur l’interface globale Γ (réunion de toutes les interfaces entre sous-domaines). Le problème de raccord en déplacement des sous-domaines s’écrit alors $\sum_E B^E q^E = 0$, ou en assemblant les matrices, $Bq = 0$.

L’idée consiste alors à relaxer cette dernière contrainte, en introduisant des multiplicateurs de Lagrange dans un vecteur λ global sur Γ. L’équilibre du sous-domaine Ω^E s’écrit alors :

$$K^E q^E = f^E - B^{E^T} \lambda \tag{9}$$

Ces multiplicateurs sont interprétés comme des inter-efforts généralisés sur l’interface Γ, figure 29-b.

Notons que si le sous-domaine Ω^E est flottant, pour que le problème (9) ait une solution, il faut que le second membre soit à résultante et moment nul. La solution est alors définie à un mouvement de solide rigide près, sous la forme

$$q^E = K^{E^+}[f^E - B^{E^T}\lambda] + R^E \alpha^E \tag{10}$$

K^{E^+} est un inverse généralisé de K^E, R^E, l’ensemble des modes rigides du sous-domaine, et α^E les coefficients de la combinaison linéaire des modes rigides présents (vecteur de taille maximum 6 en 3D).

Condenser le problème de raccord sur les λ consiste à substituer l’expression de q^E donnée dans (10) dans la condition de raccord, ce qui conduit à un problème en λ seulement :

$$F_I \lambda = d + G\alpha \tag{11}$$

où $F_I = \sum_E B^E K^{E^+} B^{E^T}$, $d = \sum_E B^E K^{E^+} f^E$, B, R et α étant les assemblées des B^E, R^E et α^E, et enfin $G = BR$. Comme signalé, les λ doivent aussi être dans l’ensemble des efforts à résultante et moment nul sur tous les sous-domaines. Ce problème est alors résolu par une méthode de gradient conjugué projeté dans le dit ensemble, et on appelle P un opérateur de projection correspondant. Le plus simple d’entre eux est le suivant

$$P = I - G[G^T G]^{-1} G^T \tag{12}$$

où I est la matrice identité.

Le problème (11) se réécrit alors (on peut montrer aisément que $R^T G\alpha = 0$) :

$$P^T F_I P \lambda = P^T d$$

Au cours des itérations du gradient conjugué, l’application de $P^T F_I P$ à un vecteur courant λ consiste à résoudre

- un problème de Neumann sur chaque sous-domaine indépendamment (efforts imposés sur le bord, lors du calcul de l'application de K^{E^+} au vecteur d'effort équilibré sur chaque sous-domaine Ω^E) et

- une étape supplémentaire : appliquer deux projections par itération (pour respecter la symétrie). Chacune est un problème global sur l'ensemble des sous-domaines, donc plus difficilement parallélisable, mais ne porte que sur les mouvements de solide rigide de ces sous-domaines (au plus 6 inconnues par sous-domaine en 3D) ; l'opérateur correspondant est effectivement $(G^T G)$.

La présence de ce problème global permet de qualifier cette méthode de multi-échelles. Le gros intérêt est qu'elle devient ainsi extensible. En particulier, avec un préconditionneur de Dirichlet additionnel [Farhat et Roux 94], le conditionnement de la matrice d'itération du problème à résoudre devient $o(1 + \log^2 \frac{H}{h})$. H est la taille des sous-domaines, et h la taille de la maille élément fini utilisée.

Le conditionnement est directement lié au nombre d'itérations nécessaires pour converger, qui dépend alors peu de H/h et pas de H : l'algorithme est ainsi qualifié de quasi-optimal (faible dépendance en H/h) et numériquement extensible (pas de dépendance en H). C'est cette méthode qui a été utilisée pour résoudre le problème de calcul de l'éprouvette triaxiale du chapitre 2.1.

Un exemple d'application, extrait de [Farhat *et al.* 00], est celui d'une roue porteuse dont le maillage est représenté sur la figure 30. L'extensibilité est d'importance, puisque la résolution de ce problème à plus de 2 millions de degrés de liberté (ddl) est réalisée en utilisant 1200 sous-domaines.

4.1.2 2 échelles dans la méthode ?

Pour rattacher cette méthode aux techniques multi-grilles décrites précédemment, il suffit de considérer que l'échelle grossière porte sur les inconnues α, c'est à dire sur les mouvements de corps rigide des sous-domaines. Appliquer le projecteur P sur un résidu (un saut de déplacement à l'interface) peut être interprété comme le recollement en moyenne (moindres carrés) au sens des modes rigides des différents blocs constitués par les sous-domaines. Elle a donc un sens plus géométrique que mécanique, si on la compare à la technique multi-grilles en hétérogène décrite au chapitre 3.2.

Il est à noter que la deuxième génération de méthode FETI n'utilise pas seulement les mouvements de solide rigide comme échelle macro, mais aussi les déplacements de certains nœuds (typiquement, les nœuds "coin" des sous-domaines) [Farhat *et al.* 00, Pierson 00].

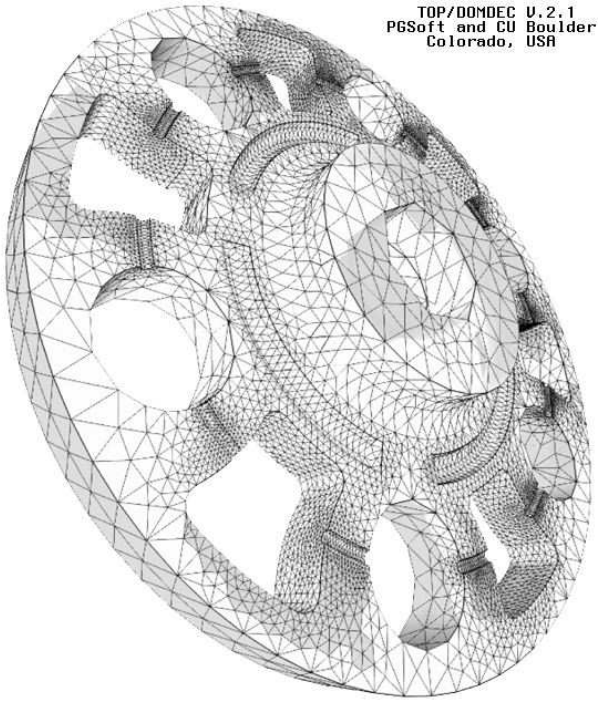

Figure 30: maillage éléments finis d'une roue porteuse, d'après [Farhat *et al.* 00]

4.2 Une méthode mixte multi-échelles

Une méthode mixte traite à égalité d'importance les déplacements et inter-efforts aux interfaces. Une méthode mono-échelle de ce type est décrite dans [Champaney *et al.* 97, Dureisseix et Champaney 00]. C'est d'ailleurs cette version qui a été utilisée pour résoudre le problème de simulation d'une tranche d'éprouvette composite au chapitre 1.3.3. La particularité de ces approches est qu'elles font jouer un rôle important aux interfaces, qui sont des entités mécaniques à part entière, avec leur propre comportement. Une conséquence est l'introduction modulaire d'autres comportements d'interface, pour traiter en particulier les problèmes de contact avec frottement [Champaney *et al.* 99].

Une première version multi-échelles, valable pour des structures faiblement hétérogènes, a ensuite été mise en place dans [Dureisseix et Ladevèze 98].

La version qu'on va décrire ici, appelée micro-macro, est adaptée au cas de structures fortement hétérogènes [Ladevèze et Dureisseix 99, Ladevèze et Dureisseix 00].

Comme la technique dérivée des méthodes multi-grilles décrite au chapitre 3.2, elle a pour objectif d'analyser les structures dont le comportement est décrit à l'échelle micro et elle vise a remplacer les techniques standards d'homogénéisation et de ré-analyse locale plus ou moins couplées.

4.2.1 Principes de la méthode LATIN micro-macro

Le premier point clé de la méthode consiste, comme précédemment, à décomposer la structure en un assemblage de sous-structures Ω^E et d'interfaces $\Gamma^{EE'}$. Une sous-structure peut contenir, par exemple, une ou plusieurs cellules d'un matériau composite.

Le deuxième ingrédient consiste à utiliser les interfaces comme des "coupures" dans la structure à partir desquelles on peut décrire la solution comme la superposition d'une partie macro à grande longueur de variation, et d'une partie micro additive. Sur chaque interface, on sépare ainsi les champs d'inter-effort F^E, et de déplacement W^E en partie micro (d'indice m) et macro (d'indice M) :

$$W^E = W^E_M + W^E_m \quad \text{et} \quad F^E = F^E_M + F^E_m$$

La plus simple description de ce type peut être faite avant même toute discrétisation. Elle consiste à prendre la partie affine des champs en question, figure 31. Par exemple, *par interface*, le champ de déplacement macro W^E_M se construit à partir de 2 translations, 1 rotation et 1 extension longitudinale en 2D, donc à partir de 4 paramètres par interface (9 paramètres en 3D). En notant q^E_M ces paramètres (et f^E_M les paramètres correspondants pour les inter-efforts), on a

$$F^E_M = P f^E_M \quad \text{et} \quad W^E_M = P q^E_M$$

P est un opérateur de type prolongation, en utilisant la terminologie des multi-grilles, chapitre 3.

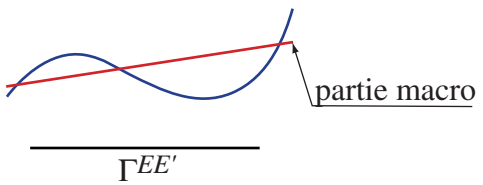

Figure 31: extraction de la partie macro par interface

Remarques sur la discrétisation

- Remarquons que les vecteurs F^E sont les vecteurs d'efforts discrétisés, au même titre qu'un champ de pression sur un bord. Pour calculer les forces généralisées associées, par interface, il est nécessaire d'utiliser une matrice de type "matrice de masse" (calculée par intégration sur l'interface des produits croisés de fonctions de base sur le bord) : MF^E.

- Si les quantités macro sont définies à partir d'un petit nombre de paramètres, il faut par contre autant de paramètres que donnera la discrétisation éléments finis du problème par interface pour décrire les parties micro ; on les notera q_m^E et f_m^E pour les déplacements et les inter-efforts.

- Par un choix *ad hoc* des quantités macro, le travail macro sur une interface peut s'écrire

$$\int_{\Gamma^{EE'}} W_M^E \cdot F_M^E dS = {q_M^E}^T P^T M P f_M^E = {q_M^E}^T f_M^E$$

Ensuite, il est nécessaire que la description micro-macro précédente satisfasse à la dualite "travail" sur les interfaces, c'est à dire que :

$$\int_{\Gamma^{EE'}} W^E \cdot F^E dS = \int_{\Gamma^{EE'}} W_M^E \cdot F_M^E dS + \int_{\Gamma^{EE'}} W_m^E \cdot F_m^E dS$$

on peut montrer que c'est le cas de la description précédente, avec la propriété d'orthogonalité

$$P^T M F_m^E = 0 \tag{13}$$

Enfin, comme stratégie de résolution, on utilise la méthode non-incrémentale LATIN ("LArge Time INcrement") [Ladevèze 96]. On considère deux types de solutions possibles : celles qui satisfont au comportement des sous-structures (équilibre et compatibilité des déformations, avec les champs F^E et W^E provenant des interfaces voisines), dont l'ensemble est noté A_d ; et celles qui satisfont au comportement des interfaces (conditions de transfert), dont l'ensemble est noté Γ.

Cette méthode est itérative, à deux étapes ; elle construit successivement une approximation dans chaque ensemble précédent, en utilisant des directions de recherche qui sont les paramètres de la méthode, figure 32.

Remarquons qu'en vue de construire un problème macro global, on impose tout le temps aux quantités macro de satisfaire exactement les conditions de transfert aux interfaces : $W_M^E = W_M^{E'}$ et $F_M^E + F_M^{E'} = 0$.

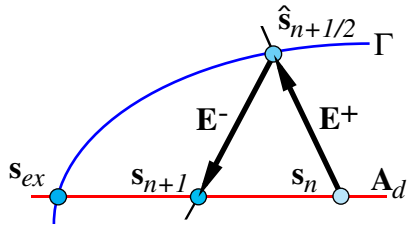

Figure 32: une itération de la LATIN

L'étape linéaire consiste à déterminer une solution de A_d, connaissant une solution de Γ (qu'on notera avec un chapeau, $\hat{s}$).

Après discrétisation par éléments finis, on doit avoir l'équilibre de chaque sous-structure

$$K^E q^E - MF^E = f_d^E \tag{14}$$

avec les efforts, inconnus aussi, $F^E = Pf_M^E + f_m^E$. Pour fermer le problème, il faut rajouter la direction de recherche E^- :

$$(f_m^E - \hat{f}_m^E) + k_m^E(q_m^E - \hat{q}_m^E) = 0$$

Toutes les quantités avec un chapeau sont issues de l'étape précédente, elle sont donc connues à ce moment. k_m^E, est un scalaire homogène à une raideur d'interface : c'est le paramètre de direction de recherche. Comme il s'agit d'une méthode mixte, k_m^E lie la correction en effort $(f_m^E - \hat{f}_m^E)$ à la correction en déplacement $(q_m^E - \hat{q}_m^E)$. La solution à convergence (la solution à l'échelle micro) ne dépend pas de ce paramètre, mais il influe sur la vitesse de convergence.

Quant aux quantités macro, on leur a imposé de satifaire aux conditions de transfert $q_M^E = q_M^{E'}$ et $f_M^E + f_M^{E'} = 0$.

Cette étape s'écrit comme une succession de problèmes micro indépendants (1 par sous-structure, qui est le pendant de l'étape de localisation des méthodes classiques d'homogénéisation), et d'un problème macro global (problème homogénéisé).

Le problème micro se traite facilement en substituant f_m^E dans (14) :

$$K^E q^E + k_m^E M q_m^E = (f_d^E + M\hat{f}_m^E + k_m^E M\hat{q}_m^E) + MPf_M^E$$

Ce problème est bien le problème de localisation : on trouve un terme de charge macro (une sonde) f_M^E et il s'interprète comme un problème sur une cellule Ω^E, avec une raideur micro répartie sur le bord $K_m^E = k_m^E M$. Cette raideur peut être vue comme une façon de modéliser les interactions micro

avec les cellules voisines. Le résolution de ce problème pour tous les f_M^E des interfaces de la cellule permet de trouver tous les déplacements macro correspondants q_M^E. Ils sont en effet la partie macro des différentes solutions trouvées q^E : on peut trouver leur expression en utilisant la condition (13) ; on obtient : $q_M^E - P^T M q^E = 0$.

Implantation. D'un point de vue efficacité numérique, il est intéressant de ne pas faire apparaître la partie micro, mais plutôt la partie macro en utilisant $q_m^E = q^E - P q_M^E$:

$$K^E q^E + K_m^E (q^E - P q_M^E) = \hat{f}_d + M P f_M^E$$

où $\hat{f}_d = f_d^E + (M \hat{f}_m^E + K_m^E \hat{q}_m^E)$ est un terme de charge donné. On a ainsi deux types d'inconnues : q^E et q_M^E, lié entre elles comme on vient de le voir. L'ensemble du problème peut être écrit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \tilde{K} & -Q \\ -Q^T & k_m^E I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^E \\ (k_m^E)^{-1} f_M^E + q_M^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_d \\ f_M^E \end{bmatrix}$$

où $\tilde{K}$ est une rigidité modifiée par les termes d'interface $\tilde{K} = K^E + K_m^E$ et $Q = K_m^E P$.

En condensant les q^E sur les autres degrés de liberté, on obtient les deux systèmes suivants :

$$\tilde{K} q_M^E = \hat{f}_d + Q[(k_m^E)^{-1} f_M^E + q_M^E] \tag{15}$$

$$A[(k_m^E)^{-1} f_M^E + q_M^E] = f_M^E + g \tag{16}$$

où $A = k_m^E I - Q^T \tilde{K}^{-1} Q$ et $g = -Q^T \tilde{K}^{-1} \hat{f}_d$.

Interprétation

- L'analogue, pour l'homogénéisation périodique, de la rigidité de la cellule avec des conditions de périodicité au bord (pour traduire l'influence micro des autres cellules voisines) est ici $\tilde{K}$. L'influence des autres cellules sur la solution locale U^E est modélisée par le terme de raideur bord k_m^E.

- Le problème (15) est le post-traitement local, une fois connue la solution homogénéisée. On remarquera ici que, la méthode étant mixte, interviennent à la fois des termes en effort macro et en déplacement macro dans la charge $[(k_m^E)^{-1} f_M^E + q_M^E]$.

- La contribution de la cellule à l'opérateur homogénéisé est ici le terme A, comme on va le voir immédiatement.

Le problème macro effectif se construit à partir des contributions (16) que l'on peut en effet écrire localement (par sous-structure) : $Aq_M^E + ((k_m^E)^{-1}A - I)f_M^E = g$, soit $q_M^E = ((k_m^E)^{-1}I - A^+)f_M^E + A^+g$ (A requiert en effet une inversion généralisée : ce point de détail n'étant pas explicité ici, le lecteur intéressé pourra consulter [Ladevèze et Dureisseix 00] par exemple).

L'analogue de la contribution macro K_C dans l'approche multi-grilles du chapitre 3.2 est ici le terme $((k_m^E)^{-1}I - A^+)$.

L'assemblage de ces contributions, en tenant compte de l'admissibilité macro $q_M^E = q_M^{E'}$ et $f_M^E + f_M^{E'} = 0$ fournit le problème macroscopique homogénéisé.

L'étape locale recouple les différentes cellules entre elles, au niveau micro, en ré-évaluant le terme de charge $\hat{f}_d$ du problème micro (15).

En effet, cette étape consiste, connaissant une solution admissible de A_d, à chercher une solution vérifiant le comportement des interfaces (conditions de transmission) en utilisant une direction de recherche E^+ conjuguée de la précédente :

$$(\hat{f}_m^E - f_m^E) - k_m^E(\hat{q}_m^E - q_m^E) = 0$$

Elle est explicite dans le cas d'une interface parfaite, puisqu'elle donne :

$$\hat{f}_m^E = -\hat{f}_m^{E'} = \frac{1}{2}[(f_m^E - f_m^{E'}) - k_m^E(q_m^E - q_m^{E'})]$$
$$\hat{q}_m^E = \hat{q}_m^{E'} = \frac{1}{2}[(q_m^E + q_m^{E'}) - (k_m^E)^{-1}(f_m^E + f_m^{E'})]$$

Cet algorithme est convergent et les différentes étapes ont une solution unique à partir du moment où $k_m^E > 0$.

4.2.2 Exemples d'application

L'exemple présenté, dû à Olivier Loiseau, est celui d'une plaque en cisaillement en élasticité plane, et pour accentuer un effet de bord, elle est perforée sur le pourtour, figure 33. La plaque est décomposée en 64 sous-structures. Le code prototype réalisé a été implanté dans Matlab®.

La figure 34 présente la solution convergée à la 20e itération, en terme de contrainte équivalente de Mises et de déplacements micro et macro aux interfaces.

La figure 35, quant à elle, présente la contrainte macro $\boldsymbol{\sigma}_M$ (reconstruite à partir de la solution complète), à gauche, et la contrainte micro $\boldsymbol{\sigma}_m$ additionnelle, à droite. Cette figure reporte aussi les mêmes contraintes dans la zone intérieure (privée de 2 couches de sous-structures). On peut remarquer

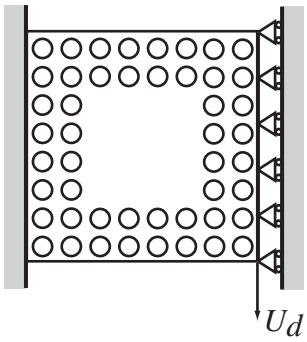

Figure 33: plaque cisaillée multi-perforée

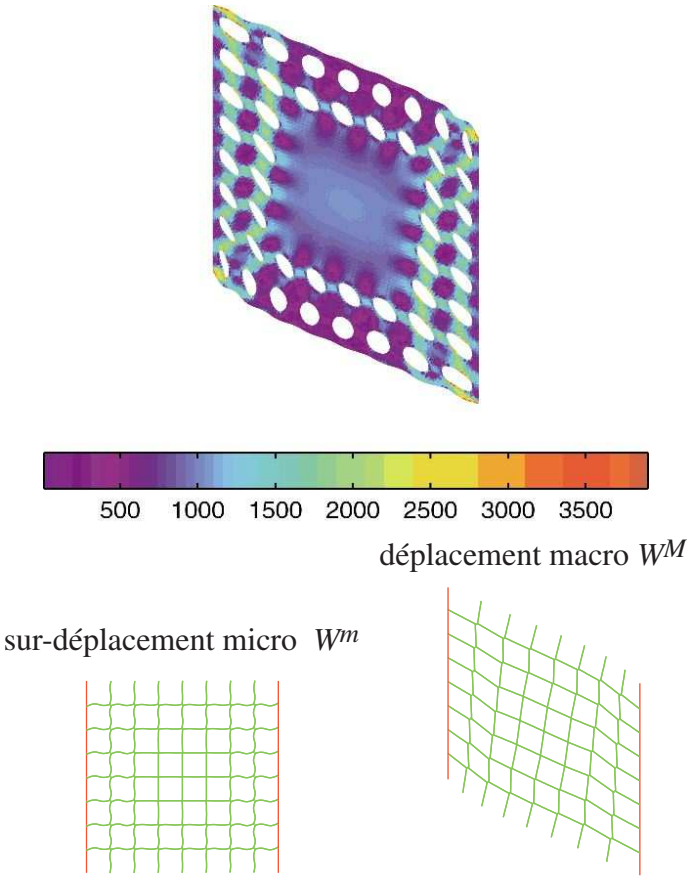

Figure 34: solution en contrainte de Mises et déplacements micro et macro aux interfaces

que dans cette zone, la contribution de la partie micro est très faible. Par contre, aux endroits où il existe des forts gradients, sa contribution n'est pas

négligeable.

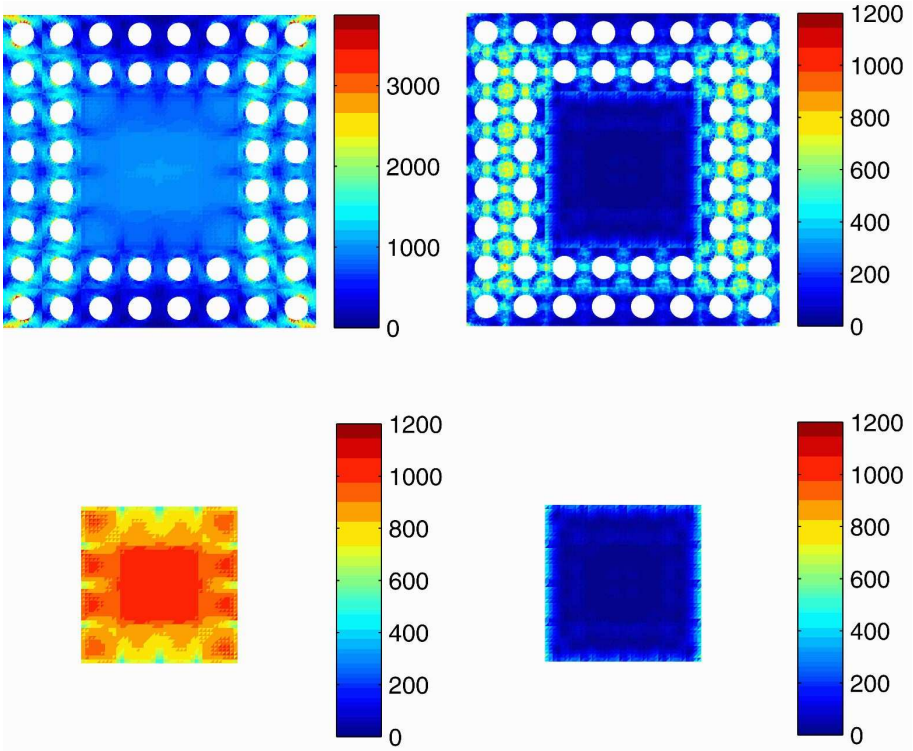

Figure 35: contribution macro (à gauche) et micro (à droite) à la solution en contrainte de Mises

Il serait aussi intéressant de ne redescendre à l'échelle micro qu'aux endroits où la solution homogène est inadéquate. Pour cela, il faudrait disposer d'un indicateur de la qualité de la solution macro pour décider ou non du changement d'échelle. Des travaux existent déjà sur de telles problématiques, en particulier dans [Fish et Belsky 95, Oden *et al.* 99, Moës *et al.* 99].

4.2.3 Bilan

Cette approche est adaptée au cas des structures hétérogènes dont le comportement est décrit à l'échelle micro. D'un point de vue algorithmique, sa convergence est prouvée.

En tant que technique d'homogénéisation, elle ne nécessite pas d'avoir un milieu périodique, et propose un cadre systématique (pas de traitement particulier des zones bord). Le problème macro porte sur les quantités macro généralisées (moments d'ordre 0 et 1 des inter-efforts et déplacements aux interfaces), il peut être considéré comme un milieu de Cosserat. La première

itération fournit une solution homogénéisée et une première re-localisation, les itérations suivantes corrigent automatiquement les deux pour prendre en compte les termes de couplages micro entre cellules, et en particulier les effets de bord. Le paramètre de la méthode, k_m^E, s'interprète comme une raideur de bord, modélisant l'interaction des cellules voisines sur la cellule traitée.

Cette approche permet l'utilisation des ordinateurs à architectures parallèles puisqu'elle s'interprète comme une méthode mixte et multi-échelles de décomposition de domaine. En tant que telle, elle possède les propriétés d'extensibilité. Par rapport à la méthode FETI, le problème macro contient plus d'information que les seuls modes rigides ; en particulier, comme la méthode multi-grilles particulière du chapitre 3.2, elle est bâtie sur une technique d'homogénéisation. Enfin, d'un point de vue algorithmique, la complexité de cette approche (coût en terme de nombre d'opérations) est similaire à celui de la méthode FETI.

5 Conclusions

Dans plusieurs cas de figure, une structure peut présenter des réponses spatiales à plusieurs échelles ; par exemple, et c'est le cas traité ici, lorsque la micro-structure est fortement hétérogène. Il existe d'autres exemples de ce comportement, en particulier celui des problèmes multi-physiques où le couplage de phénomènes de natures différentes conduit à des temps de réponse différents. Pour de tels cas, la réponse présente aussi des composantes multi-échelles en temps. On peut envisager ainsi des techniques spécifiques ; le couplage de formulations explicite / implicite en temps est une première étape dans ce sens [Combescure *et al.* 98].

Dans les problématiques abordées ici, on peut noter que les nouvelles stratégies de calcul tirent parti des propriétés mécaniques des problèmes traités pour pouvoir être plus performantes. Les techniques d'homogénéisation permettent de bâtir des approximations efficaces, les méthodes multi-grilles, comme les méthodes de décomposition de domaine, gagnent à les utiliser pour augmenter leur performances.

L'auteur tient à remercier pour leur participation Sylvain Calloch, Catherine Crestia, Laurent Guitard et Olivier Loiseau (LMT-Cachan), ainsi que Frédéric Feyel (ONERA), Charbel Farhat (Colorado University, Boulder), Jacob Fish (Rensselaer Institute), Georges Cailletaud (ENSMP) et Xavier Aubard (SEP-SNECMA).

References

[Adjedj et Aubry 89] Adjedj G. et Aubry D., Development of a hierarchical and adaptive finite element software, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n° 75, 1989, pp. 153–165.

[Aubard *et al.* 99] Aubard X., Champaney L., Cluzel C., Guitard L. et Ladevèze P., Composite boundary-effects computational modelling, *Proc. 12th International Conference on Composite Materials*, Paris, 1999.

[Barbe *et al.* 00] Barbe F., Decker L., Jeulin D. et Cailletaud G., Intergranular and intragranular behavior of polycrystalline aggregates. Part 1: FE model, soumis à *International Journal of Plasticity*, 2000.

[Barrett *et al.* 94] Barrett R., Berry M., Chan T. F., Demmel J., Donato J., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C. et Van der Vorst H., *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2nd Edition*, Philadelphia, PA, SIAM, 1994, http://www.netlib.org/linalg/html_templates/Templates.htm.

[Berveiller et Zaoui 79] Berveiller M. et Zaoui A., An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycristals, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 26, 1979, pp. 325–344.

[Bramble *et al.* 86] Bramble J. H., Pasciak J. E. et Schatz A. H., The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring, I, *Math. Comp.*, vol. 47, n° 175, 1986, pp. 103–134.

[Butler *et al.* 96] Butler E. P., Danforth S. C., Cannon W. R. et Ganczy S. T., Technical report for ARPA LC^3 program, Northrop-Grumman, 1996.

[Cailletaud 92] Cailletaud G., A micromechanical approach to inelastic behaviour of metals, *Internal Journal of Plasticity*, vol. 8, 1992, pp. 55–73.

[Cailletaud et Pilvin 94] Cailletaud G. et Pilvin P., Utilisation de modèles polycristallins pour le calcul par éléments finis, *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 3, n° 4, 1994, pp. 515–541.

[Champaney *et al.* 97] Champaney L., Cognard J.-Y., Dureisseix D. et Ladevèze P., Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method, *Computational Mechanics*, vol. 19, 1997, pp. 253–263.

[Champaney *et al.* 99] Champaney L., Cognard J.-Y. et Ladevèze P., Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions, *Computers & Structures*, n° 73, 1999, pp. 249–266.

[Chan et Goovaerts 92] Chan T. F. et Goovaerts D., On the relationship between overlapping and nonoverlapping domain decomposition methods, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 13, 1992, pp. 663–670.

[Combescure *et al.* 98] Combescure A., de Gayffier A., Gravouil A. et Greffet N., A Lagrange multiplier based domain decomposition method for time-dependent problems involving several time-scales, *Proc. 4th World Congress on Computational Mechanics*, 1998.

[Crestia *et al.* 99] Crestia C., Calloch S., Cosculluela A., Hild F. et Marquis D., Identification of the damage and failure mechanisms of a 3D carbon-carbon composite under uniaxial loading, *Proc. 12th International Conference on Composite Materials*, Paris, 1999.

[Diot et Arnault 91] Diot C. et Arnault V., Orientation anisotropy in SiC matrix of unidirectional SiC/SiC composite, *Proceedings of the 9th International Conference on Textures of Materials*, Avignon, 1991.

[Dodds, jr. et Lopez 80] Dodds, jr. R. H. et Lopez L. A., Substructuring in linear and non linear analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, 1980, pp. 583–597.

[Dongarra *et al.* 99] Dongarra J. J., Meuer H. W. et Strohmeier E., Top 500 supercomputer sites, *Proceedings of Supercomputer '99 Conference*, Mannheim, 1999, Disponible sur http://www.top500.org/ et http://www.netlib.org/benchmark/top500.html.

[Duff 86] Duff I. S., Parallel implementation of multifrontal schemes, *Parallel Computing*, vol. 3, 1986, pp. 192–204.

[Dureisseix et Champaney 00] Dureisseix D. et Champaney L., Calcul de structures et parallélisme : un bilan et quelques développements récents, *Mécanique et Industries*, vol. 1, 2000, pp. 43–60.

[Dureisseix et Ladevèze 98] Dureisseix D. et Ladevèze P., *A multi-level and mixed domain decomposition approach for structural analysis*, pp. 246–253, AMS, 1998, *Domain Decomposition Methods 10, Contemporary Mathematics*, vol. 218.

[Eshelby 61] Eshelby J. D., *Elastic inclusions and inhomogeneities*, North-Holland, 1961, *Progress in solid mechanics*, vol. 2.

[Farhat et Roux 91] Farhat C. et Roux F.-X., A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, 1991, pp. 1205–1227.

[Farhat et Roux 94] Farhat C. et Roux F.-X., Implicit parallel processing in structural mechanics, *Computational Mechanics Advances*, éd. par Oden J. Tinsley, North-Holland, juin 1994.

[Farhat *et al.* 00] Farhat C., Pierson K. et Lesoinne M., The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 184, n° 2-4, 2000, pp. 333–374.

[Fedorenko 64] Fedorenko R. P., The speed of convergence of one iterative process, *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, vol. 4, 1964, pp. 227–235.

[Feyel et Chaboche 00] Feyel F. et Chaboche J.-L., FE^2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 183, 2000, pp. 309–330.

[Feyel *et al.* 97] Feyel F., Calloch S., Marquis D. et Cailletaud G., FE computation of a triaxial specimen using a polycristalline model, *Computational Material Science*, vol. 3, n° 4, 1997, pp. 515–541.

[Fish 97] Fish J., Holistic approach for problems in heterogeneous media, *USACM Bulletin*, vol. 10, n° 1, 1997, pp. 4–12.

[Fish et Belsky 95] Fish J. et Belsky V., Multigrid method for periodic heterogeneous media. Part 1 and part 2, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 126, 1995, pp. 1–38.

[Fish *et al.* 99] Fish J., Yu Q. et Shek K. L., Computational damage mechanics for composite materials based on mathematical homogenization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, 1999, pp. 1657–1679.

[Fivel *et al.* 98] Fivel M., Tabourot L., Rauch E. et Canova G., Identification through mesoscopic simulations of macroscopic parameters of physically based constitutive equations for the plastic behaviour of FCC single crystals, *J. Phys. IV*, vol. 8, 1998, pp. 151–158.

[Hackbush et Trottenberg 81] Hackbush W. et Trottenberg U., *Multigrid methods*, Springer Verlag, 1981, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 960.

[Hashin 83] Hashin Z., Analysis of composite materials: a survey, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, 1983, pp. 481–502.

[Hashin et Shtrikman 62] Hashin Z. et Shtrikman S., A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycristals, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 10, 1962, pp. 343–352.

[Hill 65] Hill R., A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 13, 1965, pp. 213–222.

[Kröner 67] Kröner E., Elastic moduli of perfectly disordered composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 15, 1967, pp. 319–329.

[Ladevèze 96] Ladevèze P., *Mécanique non-linéaire des structures — Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*, Paris, Hermès, 1996.

[Ladevèze et Dureisseix 99] Ladevèze P. et Dureisseix D., Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures, *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences*, vol. 327, 1999, pp. 1237–1244.

[Ladevèze et Dureisseix 00] Ladevèze P. et Dureisseix D., A micro-macro approach for parallel computing of heterogeneous structures, à paraître dans *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, vol. 1, n° 1-4, 2000.

[Le Tallec 94] Le Tallec P., Domain decomposition methods in computational mechanics, *Computational Mechanics Advances*, North-Holland, 1994.

[Lebon *et al.* 90] Lebon F., Le Dain M.-A., Bellet M., Chenot J.-L. et Raous M., *Introduction aux méthodes multigrilles en mécanique des structures linéaires et non linéaires*, pp. 215–230, Pluralis, 1990, *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, vol. 3.

[Lemarchand *et al.* 98] Lemarchand C., Chaboche J.-L., Devincre B. et Kubin L.-P., Multiscale modelling of a plastic deformation, *Proceedings of the 3rd European Mechanics of Materials Conference*, Oxford, 1998.

[Mandel 93] Mandel J., Balancing domain decomposition, *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 9, 1993, pp. 233–241.

[Moës *et al.* 99] Moës N., Oden J. T., Vemaganti K. et Remacle J.-F., Simplified methods and a posteriori error estimation for the homogenization of representative volume elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 176, 1999, pp. 265–278.

[Noor 97] Noor A. K., New computing systems and future high performance computing environment and their impact on structural analysis and design, *Computers & Structures*, vol. 64, n° 1-4, 1997, pp. 1–30.

[Oden *et al.* 99] Oden J. T., Vemaganti K. et Moës N., Hierarchical modeling of heterogeneous solids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 172, 1999, pp. 3–25.

[Parsons et Hall 90a] Parsons I. D. et Hall J. F., The multigrid method in solid mechanics: part I—algorithm description and behaviour, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, 1990, pp. 719–737.

[Parsons et Hall 90b] Parsons I. D. et Hall J. F., The multigrid method in solid mechanics: part II—practical applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, 1990, pp. 739–753.

[Pierson 00] Pierson K., *A family of domain decomposition methods for the massively parallel solution of computational mechanics problem*, Department of Aerospace Engineering Sciences, PhD dissertation, University of Colorado, 2000.

[Ponte-Castaneda et Suquet 97] Ponte-Castaneda P. et Suquet P., *Non linear composites*, pp. 171–302, 1997, *Advances in Applied Mechanics*, vol. 34.

[Przemieniecki 63] Przemieniecki J. S., Matrix structural analysis of substructures, *Am. Inst. Aero. Astro. J.*, vol. 1, 1963, pp. 138–147.

[Robinson 86] Robinson J., An introduction to hierarchical displacement elements and the adaptive technique, *Finite Elements in Analysis and Design*, n° 2, 1986, pp. 377–388.

[Sanchez-Palencia 80] Sanchez-Palencia E., *Non homogeneous media and vibration theory*, Springer Verlag, 1980, *Lecture Notes in Physics*, vol. 127.

[Schwarz 69] Schwarz H. A., Über einige Abbildungsaufgaben, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, vol. 11, 1869, pp. 65–83.

[Southwell 35] Southwell R. V., Stress-calculation in frameworks by the method of systematic relaxation of constraints — part I and II, *Proc. Roy. Soc. Edinburg, Sect. A*, vol. 151, 1935, pp. 57–91.

[Zienkiewicz *et al.* 83] Zienkiewicz O. C., De S. R. Gago J. P. et Kelly D. W., The hierarchical concept in finite element analysis, *Computers & Structures*, vol. 16, n° 1–4, 1983, pp. 53–65.