



HAL
open science

Quelques propriétés des compacts géodésiques

Francis Maisonneuve

► **To cite this version:**

| Francis Maisonneuve. Quelques propriétés des compacts géodésiques. 2014. hal-00995937

HAL Id: hal-00995937

<https://hal.science/hal-00995937>

Preprint submitted on 25 May 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quelques propriétés des compacts géodésiques

Francis Maisonneuve

MINES ParisTech

mai 2014

Sommaire

1	Introduction	2
2	Écart géodésique	2
3	Géodésiques et fermés de \mathbb{R}^m	5
4	Fonctions morphologiques	9
5	La classe des compacts géodésiques	14
6	Mesures de l'allongement	18

1 Introduction

Lorsqu'on veut donner un sens intrinsèque à la notion de longueur, de centre ou d'allongement d'un objet, l'utilisation de la distance géodésique s'impose dès que l'objet n'est pas convexe.

Nous reprenons (30 ans plus tard !) l'examen de ces questions initié sur les plans théorique et pratique en particulier par Ch. Lantuéjoul ; examen ayant alors pour cadre restreint le plan euclidien et pour application les images 2D digitalisées [1, 2, 4]. Nous nous plaçons à présent pour cette étude théorique en dimension quelconque (\mathbb{R}^m euclidien, $m \geq 2$), et nous dégageons une classe assez générale de sous-ensembles pour lesquels les notions évoquées ci-dessus sont parfaitement définies et possèdent quelques propriétés remarquables.

2 Écart géodésique

Soit (X, d) un espace métrique (par exemple $X \subset \mathbb{R}^m$ euclidien, où $m \geq 2$).

On rappelle qu'un *arc* (ou un *chemin*) de X d'extrémités a et b (dans l'ordre) est une application continue $g : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $g(0) = a$ et $g(1) = b$. On note $\text{Im } g$ son image. Et deux arcs g et \tilde{g} sont dits *équivalents* s'il existe un homéomorphisme croissant $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tel que $\tilde{g} = g \circ \phi$. Alors $\text{Im } g = \text{Im } \tilde{g}$, et g et \tilde{g} ont mêmes extrémités (dans l'ordre).

On appelle *courbe simple* tout sous-ensemble Γ de X qui est l'image d'un arc g injectif. Alors g est un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur Γ compact, et tout autre arc injectif d'image Γ est équivalent à g ou à son *opposé* g^- , défini par $g^-(\lambda) = g(1 - \lambda)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$. On pourra ainsi parler des *extrémités* (sans ordre) de Γ .

Définition 2.1 Soit g un arc de X . Pour tout sous-intervalle $[\lambda, \mu] \subset [0, 1]$ ($\lambda < \mu$) et toute subdivision finie $\sigma = \{\lambda = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n = \mu\}$ de $[\lambda, \mu]$, on appelle *variation de g sur σ* le nombre

$$v_\sigma(g) = \sum_{i=1}^{n-1} d(g(\lambda_i), g(\lambda_{i+1})) \in \mathbb{R}_+.$$

Comme $\sigma \subset \sigma' \implies v_\sigma \leq v_{\sigma'}$ par inégalité triangulaire sur d , il est naturel d'appeler *variation totale de g sur $[\lambda, \mu]$* le nombre

$$V_{[\lambda, \mu]}(g) = \sup_{\sigma} v_\sigma(g) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

En particulier le nombre $V_{[0, 1]}(g) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ est appelé *longueur* de l'arc g et noté $L(g)$. On a clairement $L(g^-) = L(g)$. Lorsque $L(g) < +\infty$, on dit que g est *rectifiable*.

On vérifie facilement les deux points suivants :

Proposition 2.2

- Soit g un arc de X . Pour tous $\lambda < \mu < \nu$ dans $[0, 1]$, on a

$$V_{[\lambda, \nu]}(g) = V_{[\lambda, \mu]}(g) + V_{[\mu, \nu]}(g)$$

(vrai car, quitte à lui adjoindre μ , toute subdivision de $[\lambda, \nu]$ se présente comme la succession d'une subdivision de $[\lambda, \mu]$ et d'une subdivision de $[\mu, \nu]$).

- Soient g et \tilde{g} deux arcs de X équivalents par ϕ , c'est-à-dire $\tilde{g} = g \circ \phi$. On a

$$V_{[\lambda, \mu]}(\tilde{g}) = V_{[\phi(\lambda), \phi(\mu)]}(g), \text{ et en particulier } L(\tilde{g}) = L(g);$$

de sorte qu'on peut parler de la *longueur* $L(\Gamma)$ d'une *courbe simple* Γ (cf. ci-dessus)

(vrai car on a avec des notations évidentes, σ subdivision de $[\lambda, \mu] \iff \phi(\sigma)$ subdivision de $[\phi(\lambda), \phi(\mu)]$).

Définition 2.3 On appelle *écart géodésique* l'application d_X définie sur $X \times X$ par :

$$\forall x, y \in X, d_X(x, y) = \inf_{g \in \mathcal{R}_X(x, y)} L(g) \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

où $\mathcal{R}_X(x, y)$ désigne l'ensemble des arcs rectifiables de X d'extrémités x et y (par convention usuelle, $\inf_{g \in \mathcal{R}_X(x, y)} L(g) = +\infty$ si $\mathcal{R}_X(x, y) = \emptyset$).

Et on appelle *topologie géodésique de X* la topologie définie par l'écart d_X .

Proposition 2.4 L'application d_X est un écart séparant sur X tel que $d_X \geq d$ (de sorte que la topologie géodésique de X est bien définie et est au moins aussi fine que la topologie définie par d).

Preuve On a bien pour tout $x, y, z \in X$:

- $d_X(x, y) \geq d(x, y) \geq 0$, car $\forall g \in \mathcal{R}_X(x, y)$, on a $L(g) \geq d(x, y)$ (considérer $\sigma = \{0 < 1\}$, subdivision triviale de $[0, 1]$).
- $d_X(x, y) = d_X(y, x)$, car $\forall g \in \mathcal{R}_X(x, y)$, on a $g^- \in \mathcal{R}_X(y, x)$ avec $L(g^-) = L(g)$.
- $d_X(x, z) \leq d_X(x, y) + d_X(y, z)$: car c'est évident si $\mathcal{R}_X(x, y) = \emptyset$ ou $\mathcal{R}_X(y, z) = \emptyset$; et sinon $\forall g \in \mathcal{R}_X(x, y)$ et $\forall h \in \mathcal{R}_X(y, z)$, l'arc f de X définie pour tout $\lambda \in [0, 1]$ par

$$f(\lambda) = \begin{cases} g(2\lambda) & \text{pour } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ h(2\lambda - 1) & \text{pour } \frac{1}{2} < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

vérifie d'après la proposition 2.2 $L(f) = V_{[0, \frac{1}{2}]}(f) + V_{[\frac{1}{2}, 1]}(f) = L(g) + L(h) < +\infty$. Ainsi $f \in \mathcal{R}_X(x, z)$ et $d_X(x, z) \leq L(g) + L(h)$ pour tous $g \in \mathcal{R}_X(x, y)$ et $h \in \mathcal{R}_X(y, z)$, donc $d_X(x, z) \leq d_X(x, y) + d_X(y, z)$. \square

Proposition 2.5 Soit g un arc rectifiable de X . Alors :

- L'application croissante $\lambda \in [0, 1] \mapsto V_{[0, \lambda]}(g) \in \mathbb{R}_+$ est continue.
- En tant qu'application de $[0, 1]$ dans (X, d_X) , g est continu (c'est un d_X -arc).

Preuve

- La preuve figure dans [5], corollaire 24-7.
- Soit $\lambda_0 \in [0, 1]$; on a pour tout $\lambda \in [0, 1] \setminus \{\lambda_0\}$,

$$d_X(g(\lambda_0), g(\lambda)) \leq V_{[\lambda_0 \wedge \lambda, \lambda_0 \vee \lambda]}(g) = |V_{[0, \lambda]}(g) - V_{[0, \lambda_0]}(g)|$$

d'après la proposition 2.2 ; donc on a bien $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} d_X(g(\lambda_0), g(\lambda)) = 0$ d'après le premier point. \square

Proposition 2.6 sur la connexité

- Pour tout $x \in X$, la composante connexe par arcs de (X, d_X) contenant x est

$$C_x = \{y \in X : d_X(x, y) < +\infty\} = \{y \in X : \mathcal{R}_X(x, y) \neq \emptyset\};$$

et d_X coïncide sur $C_x \times C_x$ avec la distance d_{C_x} .

En particulier X est d_X -connexe par arcs si et seulement si d_X est à valeurs finies (autrement dit est une distance) ; il suffit donc que X soit d_X -borné.

- Le sous-ensemble C_x est aussi la composante connexe de (X, d_X) contenant x ; de sorte que X est d_X -connexe si et seulement s'il est d_X -connexe par arcs.
- (X, d_X) est localement connexe (par arcs).

Preuve

- Pour tout $y \in C_x$, on a $d_X(x, y) < +\infty$, de sorte que $\mathcal{R}_X(x, y) \neq \emptyset$. C_x est donc inclus dans la composante d_X -connexe par arcs de x d'après le second point de la proposition 2.5. D'autre part $\forall z \in X$ tel que $d_X(x, z) = +\infty$, il n'existe pas de d_X -arc g d'extrémités x et z : car sinon on aurait $\text{Im } g$ d_X -compact, donc d_X -borné, de sorte que $d_X(x, z) < +\infty$. Ainsi C_x coïncide avec la composante connexe par arcs de (X, d_X) contenant x .

Comme $C_x \subset X$, on a $d_{C_x} \geq d_X$ sur $C_x \times C_x$. D'autre part $\forall y, z \in C_x$, on a $\mathcal{R}_X(y, z) = \mathcal{R}_{C_x}(y, z)$ d'après le second point de la proposition 2.5 et le fait que $C_x = C_y$; de sorte que $d_{C_x} = d_X$ sur $C_x \times C_x$. Et comme d_{C_x} est à valeurs finies, c'est bien une distance.

- Pour tout $x \in X$, C_x est d_X -connexe par arcs d'après le point précédent, donc C_x est d_X -connexe. De plus C_x est un ouvert de (X, d_X) , puisqu'il coïncide par inégalité triangulaire sur d_X avec la réunion des d_X -boules ouvertes de centre y et de rayon 1 lorsque y décrit C_x . C'est donc aussi un fermé de (X, d_X) , comme complémentaire dans X de la réunion des autres composantes d_X -connexes par arcs qui sont d_X -ouvertes dans X comme C_x . On en déduit que C_x coïncide avec la composante connexe de (X, d_X) contenant x , plus grand sous-ensemble d_X -connexe de X contenant x .

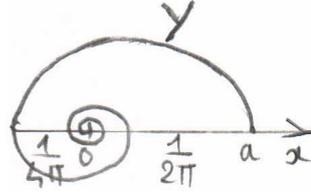
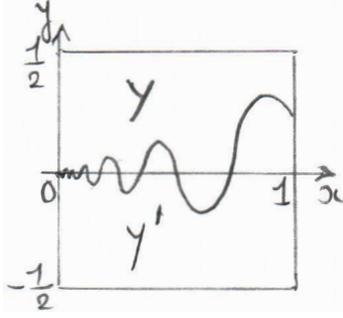
- Pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, la d_X -boule ouverte $D_x^\varepsilon = \{y \in X : d_X(x, y) < \varepsilon\}$ de centre x et de rayon ε est d_X -connexe par arcs : en effet, $\forall y \in D_x^\varepsilon$, il existe un arc rectifiable g de X d'extrémités x et y tel que $L(g) < \varepsilon$ par définition de $d_X(x, y)$. Alors

$$\forall y' = g(\lambda) \in \text{Im } g, \text{ on a } d_X(x, y') \leq V_{[0, \lambda]}(g) \leq L(g) < \varepsilon;$$

de sorte que $\text{Im } g \subset D_x^\varepsilon$. De même $\forall z \in D_x^\varepsilon$, il existe un arc rectifiable h de X d'extrémités x et z tel que $L(h) < \varepsilon$, et donc tel que $\text{Im } h \subset D_x^\varepsilon$. Alors en définissant la fonction f par concaténation de g^- et h comme à la proposition 2.4, f est un arc rectifiable de X d'extrémités y et z tel que $\text{Im } f \subset D_x^\varepsilon$; donc D_x^ε est bien d_X connexe par arcs. \square

Exemple 2.7 Considérons les arcs g et h de \mathbb{R}^2 euclidien définis par

$$g(0) = h(0) = 0 \text{ et } \forall \lambda \in]0, 1], g(\lambda) = \left(\lambda, \frac{\lambda}{2} \sin \frac{1}{\lambda} \right) \text{ et } h(\lambda) = \left(\lambda \cos \frac{1}{\lambda}, \lambda \sin \frac{1}{\lambda} \right).$$



Ces arcs sont injectifs et de longueur infinie (h détermine une spirale hyperbolique, déjà proposée dans [1]). Les courbes simples $\text{Im } g$ et $\text{Im } h$ sont des sous-ensembles X de \mathbb{R}^2 connexes (par arcs) et compacts, mais elles ne sont pas d_X -connexes (on a les deux composantes d_X -connexes $\{0\}$ et $X \setminus \{0\}$), ni d_X -compacts ($X \setminus \{0\}$ n'est même pas d_X -borné).

3 Géodésiques et fermés de \mathbb{R}^m

On va voir dans cette section deux applications du théorème d'Ascoli.

Proposition 3.1

- Soit g un arc rectifiable de X . Pour toute constante $k > L(g)$, il existe un arc \tilde{g} équivalent à g (et donc tel que $L(\tilde{g}) = L(g)$) qui est k -lipschitzien, et donc rectifiable.
- On note $\mathcal{C}([0, 1], X)$ le sous-ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans (X, d) (autrement dit des arcs de X), que l'on munit de la norme de la convergence uniforme.

L'application longueur

$$g \in \mathcal{C}([0, 1], X) \xrightarrow{L} L(g) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

est semi-continue inférieurement.

Preuve

- Considérons l'application $\lambda \in [0, 1] \xrightarrow{\psi} \psi(\lambda) = \frac{1}{k} V_{[0, \lambda]}(g) + \left(1 - \frac{L(g)}{k}\right) \lambda$,

telle que $V_{[0, \lambda]}(g) = k \psi(\lambda) - (k - L(g)) \lambda$.

Elle est strictement croissante (car $1 - \frac{L(g)}{k} > 0$) et continue (premier point de la proposition 2.5); donc c'est un homéomorphisme croissant de $[0, 1]$ sur $[\psi(0), \psi(1)] = [0, 1]$. On note $\tilde{g} = g \circ \phi$ l'arc de X équivalent à g par $\phi \stackrel{\text{déf}}{=} \psi^{-1}$.

On a pour tous $\lambda < \mu$ dans $[0, 1]$, d'après la proposition 2.2

$$\begin{aligned} d(\tilde{g}(\lambda), \tilde{g}(\mu)) &\leq V_{[\lambda, \mu]}(\tilde{g}) = V_{[\phi(\lambda), \phi(\mu)]}(g) = V_{[0, \phi(\mu)]}(g) - V_{[0, \phi(\lambda)]}(g) \\ &\leq [k\mu - (k - L(g))\phi(\mu)] - [k\lambda - (k - L(g))\phi(\lambda)] \\ &\leq k(\mu - \lambda) - (k - L(g))(\phi(\mu) - \phi(\lambda)) \\ &\leq k(\mu - \lambda). \end{aligned}$$

- La fonction longueur $L = V_{[0, 1]}$ est l'enveloppe supérieure des fonctions v_σ où σ décrit l'ensemble des subdivisions finies de $[0, 1]$; fonctions v_σ qui sont trivialement continues sur $\mathcal{C}([0, 1], X)$. Donc L est bien semi-continue inférieurement. \square

Définition 3.2 Soit (X, d) un espace métrique. On dira qu'un arc rectifiable f de X est un *arc X -géodésique* entre ses extrémités a et b , $a \neq b$, s'il est de longueur minimum $d_X(a, b) < +\infty$, et s'il est paramétré au facteur $d_X(a, b)$ près par son abscisse curviligne, autrement dit

$$\forall \lambda \in [0, 1], V_{[0, \lambda]}(f) = d_X(a, b) \lambda.$$

Son image Γ est une courbe simple incluse dans X , dite aussi *X -géodésique entre a et b*

(en effet un arc X -géodésique est injectif, puisque sinon on pourrait en extraire un arc de mêmes extrémités et d'image incluse qui serait strictement plus court!).

Théorème 3.3 d'existence des géodésiques On suppose que (X, d) est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^m euclidien.

Si deux points $a \neq b$ sont dans une même composante connexe (par arcs) de (X, d_X) , alors il existe au moins un arc X -géodésique f d'extrémités a et b .

Preuve Soit $h \in \mathcal{R}_X(a, b)$ (cf. la proposition 2.6) et soit une constante $k > L(h)$ fixée. Le sous-ensemble

$$\mathcal{L}_X^k(a, b) \stackrel{\text{déf}}{=} \{g : \text{arc } k\text{-lipschitzien de } X \text{ d'extrémités } a \text{ et } b\}$$

est non vide d'après l'hypothèse et la proposition 3.1, et on a $\mathcal{L}_X^k(a, b) \subset \mathcal{R}_X(a, b)$.

Pour tout $g \in \mathcal{L}_X^k(a, b)$, on a $\forall x = g(\lambda) \in \text{Im } g$, $d(a, x) = d(g(0), g(\lambda)) \leq k \lambda \leq k$; de sorte que $\text{Im } g$ est inclus dans la boule fermée $B_f(a, k)$ de centre a et de rayon k . Ainsi $\mathcal{L}_X^k(a, b)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}([0, 1], X \cap B_f(a, k))$; et $X \cap B_f(a, k)$ est compact, comme fermé borné de \mathbb{R}^m .

De plus $\mathcal{L}_X^k(a, b)$ est fermé dans $\mathcal{C}([0, 1], X \cap B_f(a, k))$: car si $g \in \mathcal{C}([0, 1], X \cap B_f(a, k))$ est la limite (uniforme) d'une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{L}_X^k(a, b)$, on a pour tous λ, μ dans $[0, 1]$

$$d(g(\lambda), g(\mu)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(g_n(\lambda), g_n(\mu)) \leq k d(\lambda, \mu),$$

donc $g \in \mathcal{L}_X^k(a, b)$. Enfin $\mathcal{L}_X^k(a, b)$ vérifie la condition d'équicontinuité uniforme, avec $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$:

$$\forall \varepsilon > 0, |\mu - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{k} \implies \forall g \in \mathcal{L}_X^k(a, b), d(g(\lambda), g(\mu)) \leq \varepsilon.$$

On conclut que $\mathcal{L}_X^k(a, b)$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{C}([0, 1], X \cap B_f(a, k))$ d'après le théorème d'Ascoli.

Comme la fonction longueur est semi-continue inférieurement d'après la proposition 3.1 et est finie (majorée par k) sur $\mathcal{L}_X^k(a, b)$ compact, elle y atteint sa borne inférieure finie en (au moins) un arc g , qui vaut $L(g) = d_X(a, b)$ (cf. le premier point de la proposition 3.1).

Or on a pour tout $\lambda \neq \mu$ dans $[0, 1]$ d'après la proposition 2.2,

$$d(g(\lambda), g(\mu)) \leq V_{[\lambda \wedge \mu, \lambda \vee \mu]}(g) = |V_{[0, \lambda]}(g) - V_{[0, \mu]}(g)|.$$

On en déduit d'abord que $V_{[0, \lambda]}(g) = V_{[0, \mu]}(g) \implies g(\lambda) = g(\mu)$, ce qui montre que g ne dépend de λ que par l'intermédiaire de $\frac{1}{L(g)} V_{[0, \lambda]}(g)$, qui décrit en croissant tout le segment $[0, 1]$ d'après la proposition 2.5 :

$$\exists f : [0, 1] \rightarrow X \text{ tel que } \forall \lambda' \in [0, 1], g(\lambda') = f\left(\frac{1}{L(g)} V_{[0, \lambda']}(g)\right)$$

On a donc $a = g(0) = f(0)$, $b = g(1) = f(1)$; et $\forall \lambda \neq \mu$ dans $[0, 1]$, on a d'après ci-dessus en considérant λ' et μ' dans $[0, 1]$ tels que $\frac{1}{L(g)} V_{[0, \lambda']}(g) = \lambda$ et $\frac{1}{L(g)} V_{[0, \mu']}(g) = \mu$,

$$d(f(\lambda), f(\mu)) = d(g(\lambda'), g(\mu')) \leq |V_{[0,\lambda]}(g) - V_{[0,\mu]}(g)| = L(g) |\lambda - \mu|;$$

ce qui prouve que f est $L(g)$ -lipschitzienne.

f est donc un arc de X d'extrémités a et b tel que, pour toute subdivision σ de $[\lambda, \mu]$ où $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$, on a $v_\sigma(f) \leq L(g) (\mu - \lambda)$; de sorte que $V_{[\lambda,\mu]}(f) \leq L(g) (\mu - \lambda)$.

On en déduit d'abord $L(f) = V_{[0,1]}(f) \leq L(g) = d_X(a, b)$, et donc $L(f) = d_X(a, b)$. Puis $\forall \lambda \in [0, 1]$, $V_{[0,\lambda]}(f) = d_X(a, b) \lambda$ et non $V_{[0,\lambda]}(f) < d_X(a, b) \lambda$, car $V_{[\lambda,1]}(f) \leq d_X(a, b) (1 - \lambda)$ et $d_X(a, b) = V_{[0,1]}(f) = V_{[0,\lambda]}(f) + V_{[\lambda,1]}(f)$ d'après la proposition 2.2. Donc f est bien un arc X -géodésique entre a et b . \square

Remarque 3.4 Dans le cas général il n'y a pas unicité des X -géodésiques entre deux points.

On note dorénavant \mathcal{F} l'ensemble des fermés non vides de \mathbb{R}^m euclidien. Étant donné une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{F} , on lui associe assez classiquement les deux ensembles :

$$\liminf_{\mathcal{F}} X_n \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (X_{n+p} \oplus \varepsilon B) \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{F}} X_n \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{p \in \mathbb{N}} X_{n+p}},$$

où B désigne la boule unité fermée de \mathbb{R}^m .

Lemme 3.5 On a $\liminf_{\mathcal{F}} X_n \subset \limsup_{\mathcal{F}} X_n$

avec $\liminf_{\mathcal{F}} X_n \in \mathcal{F}$ et $\limsup_{\mathcal{F}} X_n \in \mathcal{F}$ (si ces ensembles sont non vides).

Preuve On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{\bigcup_{p \in \mathbb{N}} X_{n+p}} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \left[\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} X_{n+p} \right) \oplus \varepsilon B \right] = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} (X_{n+p} \oplus \varepsilon B)$, donc

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{p \in \mathbb{N}} X_{n+p}} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} (X_{n+p} \oplus \varepsilon B) \supset \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (X_{n+p} \oplus \varepsilon B);$$

c'est-à-dire $\limsup_{\mathcal{F}} X_n \supset \liminf_{\mathcal{F}} X_n$.

L'ensemble $\limsup_{\mathcal{F}} X_n$ est fermé comme intersection de fermés. On a d'autre part

$$\forall \varepsilon > 0, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (X_{n+p} \oplus \varepsilon B) \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (X_{n+p} \oplus \varepsilon B)} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (X_{n+p} \oplus 2\varepsilon B);$$

comme $\liminf_{\mathcal{F}} X_n = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (X_{n+p} \oplus \varepsilon B) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (X_{n+p} \oplus 2\varepsilon B)$, on en déduit que

$\liminf_{\mathcal{F}} X_n = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (X_{n+p} \oplus \varepsilon B)}$; de sorte que $\liminf_{\mathcal{F}} X_n$ est aussi fermé comme intersection de fermés. \square

On suppose dans toute la suite que $X \in \mathcal{F}$.

Proposition 3.6 Soit $X \in \mathcal{F}$. On a l'équivalence :

$$X \text{ convexe} \iff d_X = d \text{ sur } X \times X.$$

Preuve Si X est convexe, $\Gamma = [a, b]$ est pour tous $a, b \in X$ une X -géodésique entre a et b , de sorte que $d_X(a, b) = d(a, b)$. On en déduit que $d_X = d$.

Inversement si $d_X = d$ sur $X \times X$, il existe pour tous $a, b \in X$ une X -géodésique Γ entre a et b d'après le théorème 3.3, qui est telle que $L(\Gamma) = d_X(a, b) = d(a, b)$. Ceci impose $\Gamma = [a, b]$ (métrique d euclidienne), de sorte que $[a, b] \subset X$. On en déduit que X est convexe. \square

Théorème 3.7 (convergence de d_{X_n}) Soit $X \in \mathcal{F}$ et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathcal{F} telle que

$$\limsup_{\mathcal{F}} X_n \subset X.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient $x_n, x'_n \in X_n$. Si les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent au sens de d respectivement vers x et x' , on a

$$x, x' \in X \text{ et } d_X(x, x') \leq \liminf d_{X_n}(x_n, x'_n).$$

Preuve Comme tous les termes des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir du rang n sont dans $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} X_{n+p}$, on a $x, x' \in \overline{\bigcup_{p \in \mathbb{N}} X_{n+p}}$; et comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, x et x' sont dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{p \in \mathbb{N}} X_{n+p}} = \limsup_{\mathcal{F}} X_n$ et donc dans X .

Soit $l \stackrel{\text{déf}}{=} \liminf d_{X_n}(x_n, x'_n)$; on suppose $l < +\infty$, sinon le résultat est évident.

Quitte à extraire une sous-suite convenable d'entiers, on peut supposer que la suite numérique $(d_{X_n}(x_n, x'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{X_n}(x_n, x'_n) < l + 1$.

Il existe donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ un arc X_n -géodésique g_n entre x_n et x'_n , qui est $(l + 1)$ -lipschitzien. L'ensemble $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ est ainsi une partie uniformément équicontinue de l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^m)$ des arcs de \mathbb{R}^m . De plus $\forall z \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Im } g_n$, on a par inégalité triangulaire

$$d(x, z) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} d(x, x_n) + (l + 1) < +\infty,$$

car une suite convergente est bornée; de sorte que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Im } g_n$ est borné dans \mathbb{R}^m et donc son adhérence est compacte.

D'après le théorème d'Ascoli, $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ est donc relativement compact dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^m)$; de sorte que, quitte à extraire à nouveau une sous-suite, on peut supposer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers un arc g de \mathbb{R}^m d'extrémités $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x'$. Et comme $\forall \lambda \in]0, 1[$, tous les termes de la suite $(g_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$ à partir du rang n sont dans $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} X_{n+p}$, on a $g(\lambda) \in \limsup_{\mathcal{F}} X_n \subset X$ selon le même raisonnement que ci-dessus; de sorte que $\text{Im } g \subset X$. Ainsi g est un arc de X d'extrémités x et x' .

Comme l'application L est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^m)$ (proposition 3.1), on a $L(g) \leq \liminf L(g_n)$ avec $L(g_n) = d_{X_n}(x_n, x'_n)$; d'où $d_X(x, x') \leq \liminf d_{X_n}(x_n, x'_n)$. \square

On déduit du théorème 3.7 en posant $X_n = X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Corollaire 3.8 Soit $X \in \mathcal{F}$. L'écart géodésique d_X est semi-continu inférieurement sur $X \times X$ (muni de la distance euclidienne).

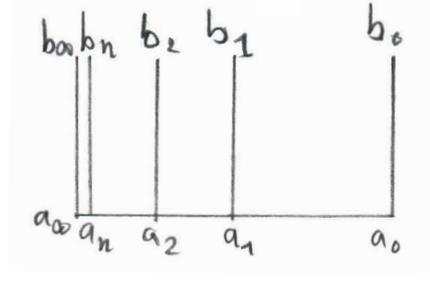
Remarque 3.9 Soit $X \subset \mathbb{R}^m$. L'écart géodésique d_X est évidemment continue sur $(X, d_X) \times (X, d_X)$.

Exemple 3.10 Voici un exemple dans \mathbb{R}^2 de $X \in \mathcal{F}$ qui est compact, tel que d_X n'est pas continu sur $X \times X$ et tel que (X, d_X) est (connexe) borné mais non compact:

$\forall n \in \mathbb{N}$, soient $a_n = (\frac{1}{2^n}, 0)$ et $b_n = (\frac{1}{2^n}, 1)$, et soit $a_\infty = (0, 0)$ et $b_\infty = (0, 1)$; on considère

$$X = \left(\bigcup_{0 \leq n \leq \infty} [a_n, b_n] \right) \cup [a_0, a_\infty]$$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, b_\infty) = 0$ mais $\lim_{n \rightarrow \infty} d_X(b_n, b_\infty) = 2 > 0 = d_X(b_\infty, b_\infty)$. La topologie définie sur X par d_X est donc strictement plus fine que celle définie par d ; de sorte que X compact n'est pas d_X -compact. Et X est d_X -borné (son d_X -diamètre est égal à 3, cf. ci-dessous), donc est d_X -connexe (cf. la proposition 2.6).



4 Fonctions morphologiques

On considère dans ce paragraphe un ensemble $X \in \mathcal{F}$, couramment supposé d_X -connexe, et un ensemble $Y \in \mathcal{F}$ inclus dans X . On va définir des indicateurs qui prennent en compte la “taille” apparente de Y dans X . Ces notions ont déjà été présentées de manière intuitive dans [2, 4].

Définition 4.1 (fonction de propagation) On note T_X^Y la fonction définie sur X par :

$$\forall x \in X, T_X^Y(x) = \sup_{y \in Y} d_X(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

On appelle X (ou d_X)-*diamètre de Y* , notée $D_X(Y)$, la borne supérieure de T_X^Y sur Y ; et X (ou d_X)-*rayon de Y* , notée $R_X(Y)$, la borne inférieure de T_X^Y sur X :

$$D_X(Y) = \sup_{y \in Y} T_X^Y(y) = \sup_{y, y' \in Y} d_X(y, y') \in \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ et } R_X(Y) = \inf_{x \in X} T_X^Y(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Dans le cas particulier important où $X = Y$, on utilisera les notations simplifiées

$$T^Y, D(Y) \text{ et } R(Y),$$

$D(Y)$ étant plus couramment appelé *longueur de Y* et $R(Y)$ *rayon géodésique*.

Voici quelques applications du théorème 3.7 :

Théorème 4.2 (convergence de $T_{X_n}^{Y_n}$) Soient d'une part $X \in \mathcal{F}$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathcal{F} telle que

$$\limsup_{\mathcal{F}} X_n \subset X.$$

Soient d'autre part $Y \in \mathcal{F}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathcal{F} telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \subset X_n \text{ et } Y \subset \liminf_{\mathcal{F}} Y_n,$$

de sorte que $Y \subset X$. Alors pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in X_n$, qui converge au sens de d vers x , on a

$$x \in X \text{ et } T_X^Y(x) \leq \liminf T_{X_n}^{Y_n}(x_n).$$

Preuve Comme $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \subset X_n$, on a bien d'après le lemme 3.5

$$Y \subset \liminf_{\mathcal{F}} Y_n \subset \limsup_{\mathcal{F}} Y_n \subset \limsup_{\mathcal{F}} X_n \subset X.$$

Montrons d'abord que comme $Y \subset \liminf_{\mathcal{F}} Y_n$, on peut construire pour tout $y \in Y$ une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in Y_n \text{ et } y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \text{ (au sens de } d).$$

En effet comme $y \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (Y_{n+p} \oplus \varepsilon B) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (Y_{n+p} \oplus \frac{1}{k} B)$, il existe pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ un $n_k > n_{k-1}$ (en ayant posé $n_0 = 0$) tel que $y \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (Y_{n_k+p} \oplus \frac{1}{k} B)$, c'est-à-dire tel que $d(y, Y_n) \leq \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq n_k$: il suffit alors, pour $n_k \leq n < n_{k+1}$, de choisir y_n dans Y_n fermé tel que $d(y, y_n) \leq \frac{1}{k}$ ($y_n \in Y_n$ arbitraire pour $0 \leq n < n_1$) pour avoir $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Ceci étant vu, on a d'après le théorème 3.7, en notant $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite ci-dessus associée à $y \in Y$,

$$x \in X \text{ et } \forall y \in Y, d_X(x, y) \leq \liminf d_{X_n}(x_n, y_n)$$

où $\forall n \in \mathbb{N}, d_{X_n}(x_n, y_n) \leq T_{X_n}^{Y_n}(x_n)$. On a donc $\forall y \in Y, d_X(x, y) \leq \liminf T_{X_n}^{Y_n}(x_n)$, de sorte que $T_X^Y(x) \leq \liminf T_{X_n}^{Y_n}(x_n)$. \square

On déduit du théorème 4.2 en posant $X_n = X$ et $Y_n = Y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Corollaire 4.3 Soit $X, Y \in \mathcal{F}$ tels que $Y \subset X$. L'application T_X^Y est semi-continue inférieurement sur X (muni de la distance euclidienne d).

Remarque 4.4 Soit $Y \subset X \subset \mathbb{R}^m$. L'application T_X^Y est continue sur (X, d_X) , car on a par inégalité triangulaire et passage au sup :

$$\forall x, x' \in X, T_X^Y(x) \leq d_X(x, x') + T_X^Y(x') \text{ et } T_X^Y(x') \leq d_X(x', x) + T_X^Y(x).$$

Mais elle n'est pas en général continue sur (X, d) (cf. l'exemple 4.13).

En ce qui concerne les diamètres et les rayons, on obtient :

Proposition 4.5 Soit $X, Y \in \mathcal{F}$ tels que $Y \subset X$.

- L'application T_X^Y atteint sa borne inférieure $R_X(Y) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ en des points de X qu'on appelle X -centres de Y .
- On a la double inégalité dans $\overline{\mathbb{R}}_+$: $R_X(Y) \leq D_X(Y) \leq 2R_X(Y)$.

Preuve

- Comme T_X^Y est semi-continue inférieurement sur (X, d) (corollaire 4.3), le résultat est immédiat si X est un compact de \mathbb{R}^m ; si X est un fermé non borné de \mathbb{R}^m , il suffit de montrer pour conclure que $T_X^Y(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \in X$ vérifie $d(0, x) \rightarrow +\infty$. Or pour $y_0 \in Y$ arbitraire, on a pour tout $x \in X, T_X^Y(x) \geq d_X(y_0, x) \geq d(y_0, x) \geq d(0, x) - d(0, y_0)$.

- L'inégalité $R_X(Y) \leq D_X(Y)$ est évidente par définition de $R_X(Y)$ et $D_X(Y)$ (on a $Y \subset X$). Si $c \in X$ est un X -centre de Y , on a pour tous $y, y' \in Y, d_X(y, y') \leq d_X(y, c) + d_X(c, y')$; donc $d_X(y, y') \leq 2R_X(Y)$, ce qui établit la seconde inégalité. \square

Remarque 4.6 On a l'égalité $D(Y) = 2R(Y) < +\infty$ avec un centre unique dans le cas où Y est une courbe simple rectifiable ; et on a l'égalité $D(Y) = R(Y) < +\infty$ avec tout point comme centre dans le cas où Y est une courbe *fermée* simple rectifiable.

Proposition 4.7

• Soient $Y \subset X$ et les suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme dans le théorème 4.2. On a

$$D_X(Y) \leq \liminf D_{X_n}(Y_n) \text{ et } R_X(Y) \leq \liminf R_{X_n}(Y_n).$$

• En conséquence si on convient de dire que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Y dans \mathcal{F} si $Y = \liminf_{\mathcal{F}} Y_n = \limsup_{\mathcal{F}} Y_n$, les applications D_X et R_X sont semi-continues inférieurement sur $\{Y \in \mathcal{F} : Y \subset X\}$; et les applications D et R sont semi-continues inférieurement sur \mathcal{F} .

Preuve

• En effet soit $y \in Y$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $y_n \in Y_n$ tel que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y (cf. le théorème 4.2). On a $T_X^Y(y) \leq \liminf T_{X_n}^{Y_n}(y_n)$ où $\forall n \in \mathbb{N}, T_{X_n}^{Y_n}(y_n) \leq D_{X_n}(Y_n)$. On a donc $\forall y \in Y, T_X^Y(y) \leq \liminf D_{X_n}(Y_n)$, de sorte que $D_X(Y) \leq \liminf D_{X_n}(Y_n)$.

Soit $r = \liminf R_{X_n}(Y_n)$; on suppose $r < +\infty$, sinon la seconde inégalité est évidente.

Quitte à extraire une sous-suite convenable d'indices $n \in \mathbb{N}$, on peut supposer que la suite numérique $(R_{X_n}(Y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers r et que pour tout $n \in \mathbb{N}, R_{X_n}(Y_n) < r + 1$.

D'après la proposition 4.5, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ un X_n -centre c_n de Y_n . Pour $y \in Y$ et les $y_n \in Y_n$ comme ci-dessus, on a

$$d(c_n, y) \leq d(c_n, y_n) + d(y_n, y) \leq (r + 1) + \sup_{n \in \mathbb{N}} d(y_n, y),$$

de sorte que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans \mathbb{R}^m . Quitte à extraire une nouvelle sous-suite convenable d'indices $n \in \mathbb{N}$, on peut donc supposer que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point x .

D'après le théorème 4.2, on a $x \in X$ et $T_X^Y(x) \leq \liminf T_{X_n}^{Y_n}(c_n) = r$ car $T_{X_n}^{Y_n}(c_n) = R_{X_n}(Y_n)$. D'où $R_X(Y) = \inf_{x' \in X} T_X^Y(x') \leq r = \liminf R_{X_n}(Y_n)$.

• Il suffit de choisir $X_n = X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour obtenir le résultat sur D_X et R_X ; puis $X_n = Y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $X = Y$ pour obtenir le résultat sur D et R . \square

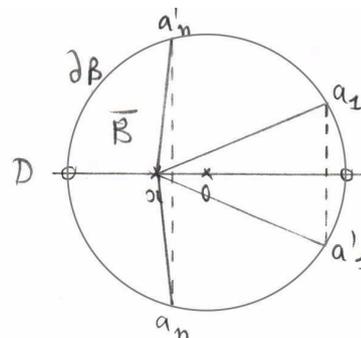
Remarque 4.8 Les applications D et R ne sont pas continues sur \mathcal{F} en général. Considérons en effet B la boule unité fermée de \mathbb{R}^2 , un point $x \in B \setminus \{0\}$, Δ la droite passant par 0 et x et enfin $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans ∂B ne contenant pas les deux points de $\Delta \cap \partial B$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = Y_n = \bigcup_{0 \leq k \leq n} ([x, a_k] \cup [x, a'_k])$$

où a'_k est le symétrique de a_k par rapport à Δ . $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de \mathcal{F} qui converge vers B (au sens de la proposition 4.7), car du fait de la croissance de la suite, on a

$$\liminf_{\mathcal{F}} Y_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n} = \limsup_{\mathcal{F}} Y_n.$$



Chaque Y_n a pour (unique) centre le point x , ce qui montre qu'une limite de centres n'est pas nécessairement le centre de la limite, à savoir ici le point 0, centre de B . Et on a

$$2 = D(B) < \lim_{n \rightarrow \infty} D(Y_n) = 2(1 + \|x\|) \text{ et } 1 = R(B) < \lim_{n \rightarrow \infty} R(Y_n) = 1 + \|x\|,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne.

Considérons à présent $X, X', Y, Y' \in \mathcal{F}$ tels que $Y \subset X$ et $Y' \subset X'$.

Lemme 4.9 Soient $x, y \in X$ et $x', y' \in X'$. On a

$$d_{X \oplus X'}(x + x', y + y') \leq d_X(x, y) + d_{X'}(x', y').$$

Preuve L'inégalité est évidente si $d_X(x, y) = +\infty$ ou $d_{X'}(x', y') = +\infty$. Sinon il existe une X -géodésique Γ entre x et y et une X' -géodésique Γ' entre x' et y' d'après le théorème 3.3.

Comme $x' + \Gamma$ est une courbe simple de $X \oplus X'$ d'extrémités $x' + x$ et $x' + y$ et comme $y + \Gamma'$ est une courbe simple de $X \oplus X'$ d'extrémités $y + x'$ et $y + y'$, on a

$$\begin{aligned} d_{X \oplus X'}(x + x', y + y') &\leq d_{X \oplus X'}(x + x', y + x') + d_{X \oplus X'}(y + x', y + y') \\ &\leq L(x' \oplus \Gamma) + L(y \oplus \Gamma') = L(\Gamma) + L(\Gamma') = d_X(x, y) + d_{X'}(x', y'). \end{aligned}$$

Proposition 4.10

• En supposant de plus (pour simplifier) que $X \oplus X' \in \mathcal{F}$ et $Y \oplus Y' \in \mathcal{F}$, on a

$$\forall (x, x') \in X \times X', T_{X \oplus X'}^{Y \oplus Y'}(x + x') \leq T_X^Y(x) + T_{X'}^{Y'}(x');$$

de sorte que

$$D_{X \oplus X'}(Y \oplus Y') \leq D_X(Y) + D_{X'}(Y') \text{ et } R_{X \oplus X'}(Y \oplus Y') \leq R_X(Y) + R_{X'}(Y').$$

• En supposant de plus $Y \cap Y' \neq \emptyset$, on a $\begin{cases} D_{X \cup X'}(Y \cup Y') \leq D_X(Y) + D_{X'}(Y') \\ R_{X \cup X'}(Y \cup Y') \leq R_X(Y) + R_{X'}(Y') \end{cases}$.

Preuve

• On déduit du lemme 4.9 que l'on a $d_{X \oplus X'}(x + x', y + y') \leq T_X^Y(x) + T_{X'}^{Y'}(x')$ pour tous $(x, x') \in X \times X'$ et $(y, y') \in Y \times Y'$; donc

$$T_{X \oplus X'}^{Y \oplus Y'}(x + x') \leq T_X^Y(x) + T_{X'}^{Y'}(x') \text{ pour tout } (x, x') \in X \times X'.$$

On en déduit que $T_{X \oplus X'}^{Y \oplus Y'}(y + y') \leq D_X(Y) + D_{X'}(Y')$ pour tout $(y, y') \in Y \times Y'$; d'où $D_{X \oplus X'}(Y \oplus Y') \leq D_X(Y) + D_{X'}(Y')$.

On en déduit aussi $T_{X \oplus X'}^{Y \oplus Y'}(x + x') \leq R_X(Y) + R_{X'}(Y')$ si x est un X -centre de Y et x' est un X' -centre de Y' ; d'où $R_{X \oplus X'}(Y \oplus Y') \leq R_X(Y) + R_{X'}(Y')$.

• Soit $a \in Y \cap Y'$. Pour tous $y, z \in Y \cup Y'$, on a

$$\begin{cases} \text{si } y, z \in Y, d_{X \cup X'}(y, z) \leq d_X(y, z) \leq D_X(Y) \leq D_X(Y) + D_{X'}(Y') \\ \text{si } y, z \in Y', d_{X \cup X'}(y, z) \leq d_{X'}(y, z) \leq D_{X'}(Y') \leq D_X(Y) + D_{X'}(Y') \\ \text{si } y \in Y \text{ et } z \in Y', d_{X \cup X'}(y, z) \leq d_X(y, a) + d_{X'}(a, z) \leq D_X(Y) + D_{X'}(Y') \end{cases}.$$

On en déduit $D_{X \cup X'}(Y \cup Y') \leq D_X(Y) + D_{X'}(Y')$.

L'inégalité $R_{X \cup X'}(Y \cup Y') \leq R_X(Y) + R_{X'}(Y')$ est triviale si $R_X(Y) = +\infty$ ou $R_{X'}(Y') = +\infty$. Sinon soient c un X -centre de Y et c' un X' -centre de Y' ; on a

$$d_{X \cup X'}(c, c') \leq d_X(c, a) + d_{X'}(a, c') \leq R_X(Y) + R_{X'}(Y') < +\infty.$$

Soit f un arc $X \cup X'$ -géodésique entre c et c' . Comme

$$\forall \lambda \in [0, 1], V_{[0, \lambda]}(f) + V_{[\lambda, 1]}(f) = L(f) = d_{X \cup X'}(c, c') \leq R_X(Y) + R_{X'}(Y'),$$

on déduit de la proposition 2.5 qu'il existe un $\lambda \in [0, 1]$ tel que $V_{[0, \lambda]}(f) \leq R_{X'}(Y')$ et $V_{[\lambda, 1]}(f) \leq R_X(Y)$ (si $L(f) \leq R_{X'}(Y')$, $\lambda = 1$ convient, et sinon $\lambda \in [0, 1]$ tel que $V_{[0, \lambda]}(f) = R_{X'}(Y')$, qui existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires, convient) ; de sorte que le point $x = f(\lambda) \in X \cup X'$ vérifie $d_{X \cup X'}(c, x) \leq R_{X'}(Y')$ et $d_{X \cup X'}(x, c') \leq R_X(Y)$.

On a donc pour tout $y \in Y \cup Y'$,

$$\begin{cases} \text{si } y \in Y, d_{X \cup X'}(x, y) \leq d_{X \cup X'}(x, c) + d_X(c, y) \leq R_{X'}(Y') + R_X(Y) \\ \text{si } y \in Y', d_{X \cup X'}(x, y) \leq d_{X \cup X'}(x, c') + d_{X'}(c', y) \leq R_X(Y) + R_{X'}(Y') \end{cases} ;$$

d'où $R_{X \cup X'}(Y \cup Y') \leq R_X(Y) + R_{X'}(Y')$. □

Remarque 4.11 Les inégalités ci-dessus peuvent être des égalités :

- si $Y = Y'$ est convexe, on a $Y \oplus Y' = 2Y$ et on vérifie aisément que pour toute homothétie de rapport $k > 0$, $D(kY) = kD(Y)$ et $R(kY) = kR(Y)$ (ici $k = 2$) ;
- si Y est un segment de droite dont une des extrémités est 0 et si $Y' = -Y$, on voit sans difficulté que $D(Y \cup Y') = D(Y) + D(Y')$ et $R(Y \cup Y') = R(Y) + R(Y')$.

Intéressons-nous à présent aux points où la fonction T_X^Y atteint ses maxima.

Définition 4.12

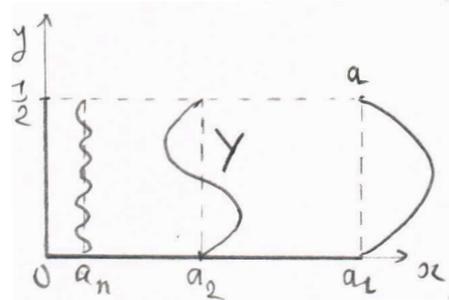
- On appelle *X-bout de Y* tout point $a \in Y$ appartenant à un maximum régional de la fonction T_X^Y restreinte à Y .
- On appelle *X-bout extrême de Y* tout point $a \in Y$ appartenant à un maximum absolu de la fonction T_X^Y restreinte à Y , autrement dit tel que $T_X^Y(a) = D_X(Y)$.

Exemples 4.13

- Tout point de Y en est un bout extrême si par exemple Y est une courbe fermée simple rectifiable (cf. la remarque 4.6).

- On peut avoir Y compact de \mathbb{R}^m , d_Y -borné ayant un seul point bout extrême : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\Gamma_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ et } x = \frac{1}{2^{n+1}} \sin(2^n \pi y) \right\}$ et soit $a_n = \left(\frac{1}{2^{n-1}}, 0\right)$.

On pose $Z = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} a_n + \Gamma_n \right) \cup [0, a_1]$ et on considère $Y = \bar{Z}$. On vérifie que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $L(\Gamma_n) = L(\Gamma_1) \in]\frac{1}{2}, +\infty[$; donc $D(Y) = 2L(\Gamma_1) + 1 < +\infty$ et $R(Y) = L(\Gamma_1) + \frac{1}{2}$. Le point a_2 est (le) centre de Y , et le point $a = (1, \frac{1}{2})$ en est l'unique bout extrême.



Cet exemple montre que la fonction T_X^Y n'est pas continue sur (X, d) en général (cf. le corollaire 4.3 et la remarque 4.4) : ici T^Y n'est continue en aucun point de $Y \setminus Z$.

- On peut avoir Y compact de \mathbb{R}^m , d_Y -borné et n'ayant aucun point bout extrême : considérer la réunion du Y précédent et de son symétrique par rapport à la droite (a, a_1) .
- On peut avoir Y compact et connexe par arcs de \mathbb{R}^m tel que $D(Y) = R(Y) = +\infty$: c'est le cas des deux courbes simples $\text{Im } g$ et $\text{Im } h$ définies à l'exemple 2.7, dont tous les points sont bouts extrêmes et centres (dégénérés).

5 La classe des compacts géodésiques

On voit que les exemples ci-dessus où d_Y et d ne définissent pas la même topologie sont relativement marginaux. D'où l'idée d'exclure dorénavant ces cas pathologiques, en se restreignant au cas des compacts.

Définition 5.1 Soit \mathcal{K} l'ensemble des d -compacts non vides de \mathbb{R}^m . On note $\mathcal{K}_G \subset \mathcal{K}$ l'ensemble des *compacts géodésiques*, c'est-à-dire des sous-ensembles Y non vides de \mathbb{R}^m qui sont d_Y -compacts .

Proposition 5.2 (caractérisation) Soit $Y \subset \mathbb{R}^m$. On a l'équivalence

$$Y \in \mathcal{K}_G \iff Y \in \mathcal{K} \text{ et } d_Y \text{ définit la même topologie sur } Y \text{ que } d.$$

De plus lorsque $Y \in \mathcal{K}_G$, la distance d_X associée à tout sous-ensemble X tel que $Y \subset X \subset \mathbb{R}^m$ définit la même topologie compacte sur Y .

Preuve En effet l'application identique de (Y, d_Y) sur (Y, d_X) (où $Y \subset X \subset \mathbb{R}^m$) est 1-lipschitzienne (car $d_Y \geq d_X$), donc continue ; si (Y, d_Y) est compact, c'est donc un homéomorphisme, de sorte que d_Y et d_X définissent la même topologie sur Y qui est en conséquence d_X -compact, en particulier pour $X = \mathbb{R}^m$. Enfin la réciproque est évidente. \square

Proposition 5.3 Soit $Y \in \mathcal{K}_G$ et soit un sous-ensemble X tel que $Y \subset X \subset \mathbb{R}^m$.

- Pour tout $x \in X$, l'ensemble $E_x = \{y \in Y : d_X(x, y) = T_X^Y(x)\}$ est un $d_{(Y)}$ -fermé non vide de Y .
- Il existe au moins deux X -bouts extrêmes a, b de Y tels que $d_X(a, b) = D_X(Y)$; et l'ensemble des X -bouts extrêmes de Y est un $d_{(Y)}$ -fermé de Y .

Preuve

- En effet, comme noté à la remarque 3.9, l'application $d_X(\cdot, x)$ est continue sur (X, d_X) , a fortiori sur (Y, d_X) . Comme Y est un d_X -compact non vide (cf. la proposition 5.2), $d_X(\cdot, x)$ y atteint sa borne supérieure $T_X^Y(x)$ (éventuellement infinie) sur E_x ; E_x est donc un d_X -fermé non vide de Y , ou aussi bien un d -fermé ou un d_Y -fermé non vide de Y d'après la proposition 5.2.

- De même (cf. la remarque 3.9) l'application d_X est continue sur $(X, d_X) \times (X, d_X)$ et a fortiori sur $(Y, d_X) \times (Y, d_X)$, qui est un compact non vide d'après la proposition 5.2. d_X

y atteint donc sa borne supérieure $D_X^Y(x)$ (éventuellement infinie), de sorte qu'il existe au moins un couple $(a, b) \in Y \times Y$ tel que $d_X(a, b) = D_X(Y)$.

Enfin comme noté à la remarque 4.4, l'application T_X^Y est continue sur (X, d_X) et a fortiori sur (Y, d_X) où elle admet $D_X(Y)$ comme borne supérieure. Le même raisonnement que précédemment permet de conclure que l'ensemble (non vide) des X -bouts extrêmes de Y est un d_X -fermé de Y , ou aussi bien un d -fermé ou un d_Y -fermé de Y . \square

Corollaire 5.4 Soit $Y \in \mathcal{K}_G$ et soit un sous-ensemble X tel que $Y \subset X \subset \mathbb{R}^m$. On a l'équivalence

$$D_X(Y) < +\infty \iff Y \text{ est inclus dans une } d_X\text{-composante connexe de } X.$$

Preuve Elle découle de la proposition 2.6, et du second point de la proposition 5.3 pour l'implication \leftarrow . \square

Notons que $D_X(Y) < +\infty$ équivaut par définition même de $D_X(Y)$ à Y d_X -borné.

Proposition 5.5

- Soit $Y \in \mathcal{K}_G$. On a $D(Y) < +\infty \iff Y$ $d_{(Y)}$ -connexe $\iff Y$ $d_{(Y)}$ -connexe par arcs.
- On a l'équivalence

$$Y \in \mathcal{K}_G \iff Y = \bigcup_{1 \leq i \leq n} Y_i \text{ où les } Y_i \in \mathcal{K}_G \text{ sont connexes et 2 à 2 disjoints ;}$$

autrement dit $Y \in \mathcal{K}_G$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, elles-mêmes dans \mathcal{K}_G .

Preuve

- La première équivalence découle du corollaire 5.4 et de la proposition 2.6 pour $X = Y$. Et on a vu à la proposition 5.2 que d et d_Y définissent la même topologie sur Y , donc les mêmes notions de connexité.

La seconde équivalence découle de la proposition 2.6.

- Si $Y = \bigcup_{1 \leq i \leq n} Y_i$ comme indiqué, les Y_i sont aussi d_Y -compacts et d_Y -connexes d'après la proposition 5.2, puisque $Y_i \subset Y \subset \mathbb{R}^m$. On a donc $Y \in \mathcal{K}_G$ et les Y_i sont des fermés de (Y, d_Y) ; mais ce sont aussi des ouverts de (Y, d_Y) comme complémentaires dans Y de la réunion finie des autres Y_j qui sont fermés comme Y_i et en nombre fini. Il s'agit donc des composantes d_Y -connexes (par arcs) de Y .

Inversement $Y \in \mathcal{K}_G$ admet une partition en composantes d_Y -connexes Y_i qui sont d_Y -fermés et donc d_Y -compacts, et sur lesquelles d_Y coïncide avec d_{Y_i} (cf. la proposition 2.6); de sorte que ces Y_i sont dans \mathcal{K}_G . Enfin ces Y_i sont en nombre fini, car sinon il existerait une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans Y telle que y_n et y_m ne seraient pas dans le même Y_i dès que $n \neq m$; on aurait alors $d_Y(y_n, y_m) = +\infty$ et la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admettrait pas de suite extraite d_Y -convergente : contradiction avec $Y \in \mathcal{K}_G$. \square

Proposition 5.6 (enveloppe convexe) Soit $Y \in \mathcal{K}$ un compact non vide de \mathbb{R}^m .

- Son enveloppe convexe $\hat{Y} \supset Y$ est dans \mathcal{K}_G .
- Pour tout $X \in \mathcal{F}$ contenant Y , on a $D(\hat{Y}) \leq D_X(Y)$ et $R(\hat{Y}) \leq R_X(Y)$.
- On a $\sqrt{\frac{2m+2}{m}} R(\hat{Y}) \leq D(\hat{Y})$.

Preuve

• En effet \hat{Y} est compact comme Y puisqu'on est dans \mathbb{R}^m , et étant convexe on a $d_{\hat{Y}} = d$ (cf. la proposition 3.6); donc $\hat{Y} \in \mathcal{K}_G$.

• D'après le théorème de Carathéodory, \hat{Y} est l'ensemble des combinaisons convexes de $m+1$ points de Y . Soient $a, b \in \hat{Y}$ tels que $d(a, b) = D(\hat{Y})$ (proposition 5.3 appliqué à \hat{Y} , qui est dans \mathcal{K}_G d'après le point précédent, et à $X = \hat{Y}$); on a donc $a = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i a_i$ et $b = \sum_{j=1}^{m+1} \mu_j b_j$ avec

$$a_1, \dots, b_{m+1} \in Y, \lambda_1, \dots, \mu_{m+1} \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = \sum_{j=1}^{m+1} \mu_j = 1.$$

On en déduit qu'il existe $i, j \in \{1, \dots, m+1\}$ tels que $d(a_i, b_j) \geq d(a, b)$: en effet on a

$$d(a, b) = \left\| \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i a_i - b \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i (a_i - b) \right\| \leq \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \|a_i - b\| = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i d(a_i, b),$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. Comme $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$, on en déduit que $\exists i \in \{1, \dots, m+1\}$ tels que $d(a_i, b) \geq d(a, b)$; et on a

$$d(a_i, b) = \left\| a_i - \sum_{j=1}^{m+1} \mu_j b_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{m+1} \mu_j (a_i - b_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^{m+1} \mu_j \|a_i - b_j\| = \sum_{j=1}^{m+1} \mu_j d(a_i, b_j),$$

et comme $\sum_{j=1}^{m+1} \mu_j = 1$, on en déduit que $\exists j \in \{1, \dots, m+1\}$ tels que $d(a_i, b_j) \geq d(a_i, b)$.

On conclut $D_X(Y) \geq d_X(a_i, b_j) \geq d(a_i, b_j) \geq d(a, b) = D(\hat{Y})$.

Soit c un X -centre de Y . L'application continue $d(\cdot, c)$ sur \hat{Y} compact atteint sa borne supérieure $T^{\hat{Y}}(c) \in \mathbb{R}_+$ en un point $a = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i a_i \in \hat{Y}$. Selon le même raisonnement que précédemment, il existe $i \in \{1, \dots, m+1\}$ tel que $d(a_i, c) \geq d(a, c) = T^{\hat{Y}}(c)$. On en déduit

$$R_X(Y) \geq d_X(a_i, c) \geq d(a_i, c) \geq T^{\hat{Y}}(c) \geq R(\hat{Y}).$$

• Il s'agit de l'inégalité de Jung [7] relative à la distance euclidienne d , applicable à \hat{Y} puisque $d_{\hat{Y}} = d$ sur \hat{Y} . \square

On sait que l'on peut munir l'ensemble \mathcal{K} d'une structure d'espace métrique (complet) en considérant la *distance de Hausdorff* sur \mathcal{K} (B étant la boule unité fermée de \mathbb{R}^m):

$$\forall Y, Y' \in \mathcal{K}, \delta(Y, Y') \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \min\{r > 0 : Y \subset Y' \oplus rB \text{ et } Y' \subset Y \oplus rB\}.$$

Lemme 5.7

• Soit $Y \in \mathcal{K}$ et soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathcal{K} telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(Y_n, Y) = 0$ (ce qu'on note $\lim_{\delta} Y_n = Y$). On a

$$Y = \liminf_{\mathcal{F}} Y_n = \limsup_{\mathcal{F}} Y_n.$$

• Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathcal{K} décroissante (pour l'inclusion) et soit $Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ supposé non vide. On a $Y = \lim_{\delta} Y_n$.

• Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathcal{K} croissante (pour l'inclusion) telle que $Y = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n}$ est dans \mathcal{K} . On a $Y = \lim_{\delta} Y_n$.

Preuve

- On a par hypothèse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \in \mathbb{N}, \text{ on a } Y_{n_\varepsilon+p} \subset Y \oplus \varepsilon B \text{ et } Y \subset Y_{n_\varepsilon+p} \oplus \varepsilon B.$$

On a donc d'une part $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} Y_{n_\varepsilon+p} \subset Y \oplus \varepsilon B$, car $Y \oplus \varepsilon B$ est fermé (et même compact) ; on en déduit que $\forall \varepsilon > 0, \limsup_{\mathcal{F}} Y_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} Y_{n+p} \subset Y \oplus \varepsilon B$, de sorte que $\limsup_{\mathcal{F}} Y_n \subset \bar{Y} = Y$.

On a d'autre part $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $Y \subset \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (Y_{n_\varepsilon+p} \oplus \varepsilon B)$; on en déduit que $\forall \varepsilon > 0, Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (Y_{n+p} \oplus \varepsilon B)$, de sorte que $Y \subset \liminf_{\mathcal{F}} Y_n = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (Y_{n+p} \oplus \varepsilon B)$.

Comme par ailleurs on a $\liminf_{\mathcal{F}} Y_n \subset \limsup_{\mathcal{F}} Y_n$ d'après le lemme 3.5, on conclut bien que $Y = \liminf_{\mathcal{F}} Y_n = \limsup_{\mathcal{F}} Y_n$.

- Soit $\varepsilon > 0$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, Y \subset Y_n \subset Y_n \oplus \varepsilon B$. D'autre part soit $\overset{\circ}{B}$ l'intérieur de B ; comme $Y \oplus \varepsilon \overset{\circ}{B} = \bigcup_{y \in Y} y \oplus \varepsilon \overset{\circ}{B}$ est un ouvert, $(Y_n \cap (Y \oplus \varepsilon \overset{\circ}{B})^c)_{n \in \mathbb{N}}$ (où c désigne le complémentaire dans \mathbb{R}^m) est une suite décroissante de fermés dans Y_0 compact, telle que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [Y_n \cap (Y \oplus \varepsilon \overset{\circ}{B})^c] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n \cap (Y \oplus \varepsilon \overset{\circ}{B})^c = Y \cap (Y \oplus \varepsilon \overset{\circ}{B})^c = \emptyset.$$

D'après la propriété de l'intersection finie, il existe donc $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}$, on a $Y_{n_\varepsilon+p} \cap (Y \oplus \varepsilon \overset{\circ}{B})^c = \emptyset \implies Y_{n_\varepsilon+p} \subset Y \oplus \varepsilon \overset{\circ}{B} \subset Y \oplus \varepsilon B$. On conclut ainsi que $Y = \lim_\delta Y_n$.

- Soit $\varepsilon > 0$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \subset Y \subset Y \oplus \varepsilon B$. D'autre part on a

$$Y = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n} \subset \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \right) \oplus \varepsilon \overset{\circ}{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Y_n \oplus \varepsilon \overset{\circ}{B}),$$

et comme Y est compact, on peut extraire de ce recouvrement ouvert $\{Y_n \oplus \varepsilon \overset{\circ}{B}\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sous-recouvrement fini. Il existe donc $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $Y \subset Y_{n_\varepsilon} \oplus \varepsilon \overset{\circ}{B}$, de sorte que $\forall p \in \mathbb{N}$, on a $Y \subset Y_{n_\varepsilon+p} \oplus \varepsilon B$. On conclut ainsi que $Y = \lim_\delta Y_n$. \square

La seconde partie de la proposition 4.7 fournit alors la

Proposition 5.8 Soit $X \in \mathcal{F}$. Les applications D_X, R_X sont semi-continues inférieurement sur le fermé $\{Y \in \mathcal{K}_G : Y \subset X\}$ de (\mathcal{K}_G, δ) ; et les applications D et R sont semi-continues inférieurement sur (\mathcal{K}_G, δ) .

Preuve Le seul point à vérifier est que l'ensemble $\{Y \in \mathcal{K}_G : Y \subset X\}$ est bien un fermé de (\mathcal{K}_G, δ) : or si une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans cet ensemble δ -converge vers $Y \in \mathcal{K}_G$, on a $Y = \limsup_{\mathcal{F}} Y_n \subset \limsup_{\mathcal{F}} X = X$ d'après le premier point du lemme 5.7. \square

En ce qui concerne la stabilité de la classe \mathcal{K}_G , on a :

Proposition 5.9 Soient $Y, Y' \in \mathcal{K}_G$. On a

$$Y \oplus Y' \in \mathcal{K}_G \text{ et } Y \cup Y' \in \mathcal{K}_G.$$

Preuve D'après le lemme 4.9, l'application

$$(y, y') \in (Y, d_Y) \times (Y, d_Y) \mapsto y + y' \in (Y \oplus Y', d_{Y \oplus Y'})$$

est continue ; donc $Y \oplus Y'$, image du compact $Y \times Y'$ par cette application, est $d_{Y \oplus Y'}$ -compact.

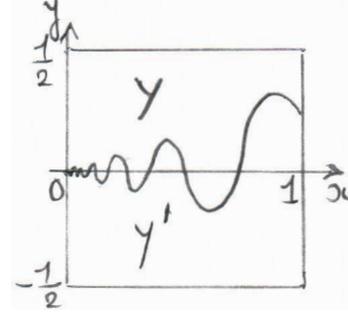
D'autre part on déduit de la proposition 5.2 que $Y \subset Y \cup Y'$ et $Y' \subset Y \cup Y'$ sont $d_{Y \cup Y'}$ -compacts, donc leur réunion $Y \cup Y'$ aussi. \square

Remarques 5.10

- Soient $Y, Y' \in \mathcal{K}_G$ tels que $Y \cap Y' \neq \emptyset$.

On n'a pas nécessairement $Y \cap Y' \in \mathcal{K}_G$, même si cet ensemble est connexe : considérons en effet la courbe simple

$$\Gamma = \{(0, 0)\} \cup \left\{ (x, y) \in]0, 1] \times \mathbb{R} : y = \frac{x}{2} \sin \frac{1}{x} \right\},$$



de longueur $L(\Gamma) = +\infty$; si Y (respectivement Y') est le compact de $[0, 1] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ constitué des points situés au-dessus (respectivement en-dessous) de Γ , on a $Y, Y' \in \mathcal{K}_G$ et $Y \cap Y' = \Gamma \notin \mathcal{K}_G$.

- Soient $Y, Y' \in \mathcal{K}_G$. On n'a pas non plus nécessairement $Y \ominus Y' \in \mathcal{K}_G$, même si cet ensemble est connexe non vide : en effet soient les points $a = (0, \frac{1}{2})$ et $a' = (0, -\frac{1}{2})$; si Y est le compact de $[0, 1] \times [-1, 1]$ constitué des points situés entre $a \oplus \Gamma$ et $a' \oplus \Gamma$, et si $Y' = [a, a']$, Γ définie au point précédent, on a $Y, Y' \in \mathcal{K}_G$ et $Y \ominus Y' = \Gamma \notin \mathcal{K}_G$.

Terminons cette section par un résultat simple d'approximation des éléments de \mathcal{K} par ceux de \mathcal{K}_G :

Proposition 5.11 Soient $Y \in \mathcal{K}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $Y \oplus \varepsilon B \in \mathcal{K}_G$.

Ainsi tout compact de \mathbb{R}^m est la limite d'une suite décroissante d'éléments de \mathcal{K}_G — de sorte que \mathcal{K}_G est dense dans (\mathcal{K}, δ) .

Preuve Soit $(y_n + \varepsilon b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $Y \oplus \varepsilon B$. Comme Y et B sont compacts on peut supposer, quitte à extraire des sous-suites, que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d -converge vers $y \in Y$ et que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d -converge vers $b \in B$ (de sorte que la suite $(y_n + \varepsilon b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d -converge vers $y + \varepsilon b$, ce qui prouve classiquement que $Y \oplus \varepsilon B$ est aussi compact).

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $Y_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \{y_n, n \geq n_0\} \subset y \oplus \frac{\varepsilon}{2} B$; et on vérifie qu'il existe une constante $k < +\infty$ telle que $d_{Y_0 \oplus \varepsilon B} \leq k d$ sur $Y_0 \oplus \varepsilon B$ ($k = \frac{2}{\sqrt{3}}$?). Ainsi la suite $(y_n + \varepsilon b_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $y + \varepsilon b$ pour la distance $d_{Y_0 \oplus \varepsilon B}$ et a fortiori pour la distance $d_{Y \oplus \varepsilon B}$ puisque $Y_0 \oplus \varepsilon B \subset Y \oplus \varepsilon B$. On en déduit que $Y \oplus \varepsilon B \in \mathcal{K}_G$.

On a donc $Y = \bar{Y} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} (Y + \frac{1}{k} B) = \lim_{\delta} (Y + \frac{1}{k} B)$ (cf. le point 2 du lemme 5.7). \square

6 Mesures de l'allongement

Pour tout $Y \in \mathcal{K}$, notons $V(Y) < +\infty$ le volume (l'aire si $n = 2$) de Y , autrement dit sa mesure de Lebesgue.

Définition 6.1 (indices de X -allongement) Soit $\mathcal{K}'_G = \{Y \in \mathcal{K}_G : V(Y) > 0\}$.

Étant donné $Y \in \mathcal{K}'_G$ et $X \in \mathcal{F}$ contenant Y , on appellera

- *premier indice de X -allongement de Y* le nombre (sans dimension)

$$\rho_X^1(Y) = \left[\left(\frac{D_X(Y)}{2} \right)^m \frac{V(B)}{V(Y)} \right]^{\frac{1}{m-1}}, \text{ noté } \rho^1(Y) \text{ si } X = Y;$$

- *second indice de X -allongement de Y* le nombre (sans dimension)

$$\rho_X^2(Y) = \left[R_X(Y)^m \frac{V(B)}{V(Y)} \right]^{\frac{1}{m-1}}, \text{ noté } \rho^2(Y) \text{ si } X = Y.$$

Théorème 6.2 (inégalités) Soient $X, X' \in \mathcal{F}$ supposés d_X -connexes et soient $Y, Y' \in \mathcal{K}'_G$ tels que $Y \subset X$ et $Y' \subset X'$. On a pour $i = 1$ ou 2 :

- $1 \leq \rho_X^i(Y) < +\infty$ et $\rho_X^i(Y) = 1 \iff Y$ est une boule fermée ;
- En supposant de plus que $X \oplus X' \in \mathcal{F}$, $\rho_{X \oplus X'}^i(Y \oplus Y') \leq \max(\rho_X^i(Y), \rho_{X'}^i(Y'))$;
- Si $Y \cap Y' \neq \emptyset$, $[\rho_{X \cup X'}^i(Y \cup Y')]^{1-\frac{1}{m}} \leq [\rho_X^i(Y)]^{1-\frac{1}{m}} + [\rho_{X'}^i(Y')]^{1-\frac{1}{m}}$;
- $\rho^i(\hat{Y}) \leq \rho_X^i(Y)$, avec égalité si et seulement si $Y = \hat{Y}$;
- $2^{-\frac{m}{m-1}} \rho_X^2(Y) \leq \rho_X^1(Y) \leq \rho_X^2(Y)$ et $\left(\frac{m+1}{2m} \right)^{\frac{m}{2(m-1)}} \rho^2(\hat{Y}) \leq \rho^1(\hat{Y})$.

Preuve

- En effet on a $\rho_X^i(Y) < +\infty$ d'après le corollaire 5.4 et $V(Y) > 0$. Et on a d'après l'*inégalité de Bieberbach* [6] : $V(Y) \leq \left(\frac{\text{diam}(Y)}{2} \right)^m V(B)$, où $\text{diam}(Y)$ est le diamètre euclidien de Y , avec égalité si et seulement si Y est une boule fermée. Comme $d \leq d_X$ sur Y , on a $\text{diam}(Y) \leq D_X(Y)$; donc $\rho_X^1(Y) \geq 1$, avec égalité si et seulement si Y est une boule fermée.

Soit c un X -centre de Y . Comme $d \leq d_X$ sur X , on a $Y \subset c \oplus R_X(Y)B$. On a ainsi $V(Y) \leq R_X(Y)^m V(B)$; donc $\rho_X^2(Y) \geq 1$, avec égalité si et seulement si $Y = c \oplus R_X(Y)B$.

- On a d'après le *théorème de Brunn* [6] : $V(Y \oplus Y')^{\frac{1}{m}} \geq V(Y)^{\frac{1}{m}} + V(Y')^{\frac{1}{m}}$. On en déduit d'après la proposition 4.10

$$\frac{D_{X \oplus X'}(Y \oplus Y')}{V(Y \oplus Y')^{\frac{1}{m}}} \leq \frac{D_X(Y) + D_{X'}(Y')}{V(Y)^{\frac{1}{m}} + V(Y')^{\frac{1}{m}}} \leq \max\left(\frac{D_X(Y)}{V(Y)^{\frac{1}{m}}}, \frac{D_{X'}(Y')}{V(Y')^{\frac{1}{m}}} \right);$$

et, toujours d'après la proposition 4.10, on obtient les mêmes inégalités avec R_X au lieu de D_X . D'où $\rho_{X \oplus X'}^i(Y \oplus Y') \leq \max(\rho_X^i(Y), \rho_{X'}^i(Y'))$.

- On a $V(Y \cup Y') \geq V(Y)$ et $V(Y \cup Y') \geq V(Y')$; on a donc d'après la proposition 4.10

$$\frac{D_{X \cup X'}(Y \cup Y')}{V(Y \cup Y')^{\frac{1}{m}}} \leq \frac{D_X(Y)}{V(Y \cup Y')^{\frac{1}{m}}} + \frac{D_{X'}(Y')}{V(Y \cup Y')^{\frac{1}{m}}} \leq \frac{D_X(Y)}{V(Y)^{\frac{1}{m}}} + \frac{D_{X'}(Y')}{V(Y')^{\frac{1}{m}}},$$

et les mêmes inégalités avec R_X au lieu de D_X . D'où

$$[\rho_{X \cup X'}^i(Y \cup Y')]^{1-\frac{1}{m}} \leq [\rho_X^i(Y)]^{1-\frac{1}{m}} + [\rho_{X'}^i(Y')]^{1-\frac{1}{m}}.$$

- Comme $Y \subset \hat{Y}$, on a l'inégalité $V(Y) \leq V(\hat{Y})$; on en déduit (cf. la proposition 5.6), $\hat{Y} \in \mathcal{K}'_G$ et $\rho_X^i(Y) \geq \rho^i(\hat{Y})$.

Si $Y = \hat{Y}$, cette dernière inégalité est évidemment une égalité. Inversement, celle-ci impose $V(Y) = V(\hat{Y})$, donc $Y \supset \hat{Y}$. Comme $V(\hat{Y}) > 0$, il existe $m+1$ points de \hat{Y} qui ne sont pas dans un même hyperplan de \mathbb{R}^m , donc $\hat{Y} \neq \emptyset$; et comme \hat{Y} est convexe, on a alors $\hat{Y} = \overset{\circ}{\hat{Y}}$. Ainsi $Y = \bar{Y} \supset \overset{\circ}{\hat{Y}} = \hat{Y}$, donc $Y = \hat{Y}$.

- D'après la proposition 4.5, on a $R_X(Y) \leq D_X(Y) \leq 2R_X(Y)$, donc

$$\frac{1}{2} [\rho_X^2(Y)]^{1-\frac{1}{m}} \leq [\rho_X^1(Y)]^{1-\frac{1}{m}} \leq [\rho_X^2(Y)]^{1-\frac{1}{m}}.$$

Enfin comme d'après la proposition 5.6, on a $\sqrt{\frac{2m+2}{m}} R(\hat{Y}) \leq D(\hat{Y})$, on en déduit

$$\sqrt{\frac{2m+2}{m}} [\rho_X^2(\hat{Y})]^{1-\frac{1}{m}} \leq 2 [\rho_X^1(\hat{Y})]^{1-\frac{1}{m}}. \quad \square$$

Remarques 6.3

- Dans le cas où $X = Y \in \mathcal{K}'_G$ est un objet nettement allongé dans une direction, par exemple pour fixer les idées si Y est un parallépipède rectangle plus ou moins tordu, de dimensions approximatives r, \dots, r et ℓ avec $r \ll \ell$, on a

$$\rho^1(Y) \approx \rho^2(Y) \approx \left[\left(\frac{\ell}{2} \right)^m \frac{V(B)}{r^{m-1} \ell} \right]^{\frac{1}{m-1}} \propto \frac{\ell}{r};$$

ce résultat de dépendance linéaire en $\frac{\ell}{r}$ est en accord avec la notion intuitive d'allongement. Notons au passage que de manière générale $\rho^i(kY) = \rho^i(Y)$ pour toute homothétie de rapport $k > 0$, et $\rho^i(a+Y) = \rho^i(Y)$ pour toute translation d'amplitude $a \in \mathbb{R}^m$ (pour $1 \leq i \leq 2$).

- Les inégalités concernant $Y \oplus Y'$ et $Y \cup Y'$ (pour $Y \cap Y' \neq \emptyset$) sont les meilleures possibles sans hypothèses supplémentaires.

En effet si $Y = Y' \in \mathcal{K}'_G$ est convexe, on a $Y \oplus Y' = 2Y$ (cf. la remarque 4.11), donc $\rho^i(Y \oplus Y') = \rho^i(2Y) = \rho^i(Y) = \max(\rho^i(Y), \rho^i(Y'))$.

D'autre part soit $a \in \mathbb{R}^m$ de norme 1 et pour $0 < \varepsilon < 1$, soient

$$Y_\varepsilon = [0, a] \cup \varepsilon B \text{ et } Y'_\varepsilon = [0, -a] \cup \varepsilon B.$$

On a $Y_\varepsilon, Y'_\varepsilon \in \mathcal{K}'_G$, $Y_\varepsilon \cap Y'_\varepsilon = \{0\} \neq \emptyset$

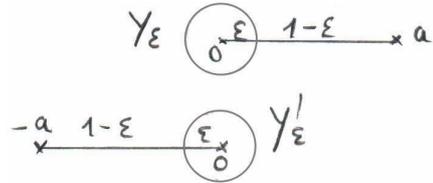
et $Y_\varepsilon \cup Y'_\varepsilon = [-a, a] \cup \varepsilon B$. De plus

$$D(Y_\varepsilon) = D(Y'_\varepsilon) = 1 + \varepsilon, \quad D(Y_\varepsilon \cup Y'_\varepsilon) = 2; \quad R(Y_\varepsilon) = R(Y'_\varepsilon) = \frac{1+\varepsilon}{2}, \quad R(Y_\varepsilon \cup Y'_\varepsilon) = 1.$$

$$\text{Ainsi } \frac{[\rho^i(Y_\varepsilon \cup Y'_\varepsilon)]^{1-\frac{1}{m}}}{[\rho^i(Y_\varepsilon)]^{1-\frac{1}{m}} + [\rho^i(Y'_\varepsilon)]^{1-\frac{1}{m}}} \leq \frac{D(Y_\varepsilon \cup Y'_\varepsilon)}{D(Y_\varepsilon) + D(Y'_\varepsilon)} = \frac{R(Y_\varepsilon \cup Y'_\varepsilon)}{R(Y_\varepsilon) + R(Y'_\varepsilon)} = \frac{1}{1+\varepsilon},$$

qui tend vers 1 lorsque ε tend vers 0.

- Les inégalités $2^{-\frac{m}{m-1}} \rho_X^2(Y) \leq \rho_X^1(Y) \leq \rho_X^2(Y)$ sont également les meilleures possibles sans hypothèses supplémentaires (partir de la remarque 4.6 en remplaçant la courbe simple et la courbe fermée simple Γ par $\Gamma \oplus \varepsilon B$ avec $\varepsilon \ll L(\Gamma)$).



On s'intéresse à présent à la régularité des indices ρ^i . On rappelle le résultat classique :

Proposition 6.4 La fonction volume V est semi-continue supérieurement sur (\mathcal{K}, δ) .

Preuve Soit $Y \in \mathcal{K}$ et soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathcal{K} telle que $Y = \lim_{\delta} Y_n$. On a pour tout $\varepsilon > 0$, $Y_n \subset Y \oplus \varepsilon B$ et donc $V(Y_n) \leq V(Y \oplus \varepsilon B)$ pour n assez grand.

Ainsi $\limsup V(Y_n) \leq V(Y \oplus \varepsilon B)$ pour tout $\varepsilon > 0$; comme $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} (Y + \frac{1}{k} B) = \bar{Y} = Y$, on en déduit $\limsup V(Y_n) \leq V(Y)$ par continuité décroissante de la mesure de Lebesgue sur les compacts. \square

Remarque 6.5 L'application V n'est pas continue, comme l'atteste l'exemple développé à la remarque 4.8 où on construit une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{K} telle que $\lim_{\delta} Y_n = B$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $V(Y_n) = 0$.

Proposition 6.6 (régularité des ρ_X^i) Soit $X \in \mathcal{F}$.

- Les indices ρ_X^i sont semi-continues inférieurement sur le fermé $\{Y \in \mathcal{K}'_G : Y \subset X\}$ de (\mathcal{K}'_G, δ) .

- Les indices ρ^i sont semi-continues inférieurement sur (\mathcal{K}'_G, δ) .

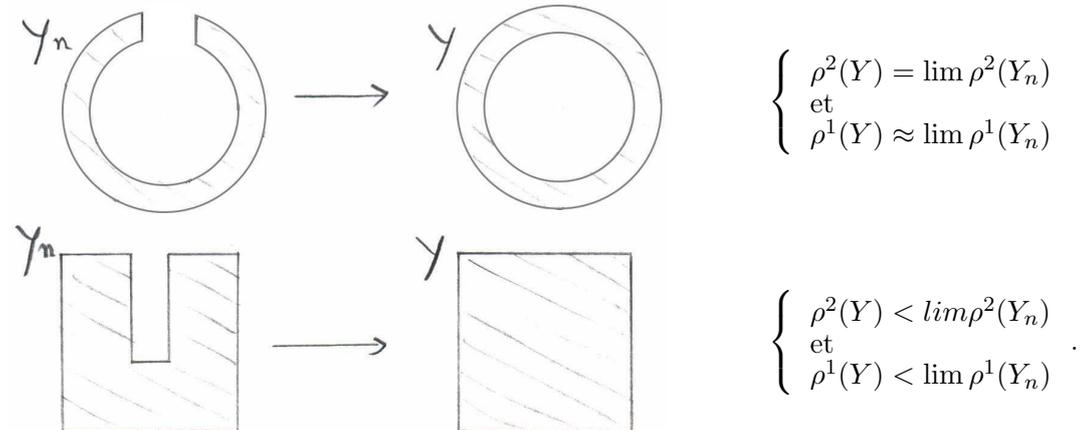
Preuve

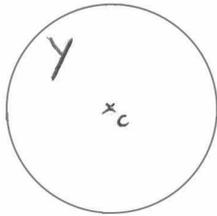
D'après la proposition 5.8, l'ensemble $\{Y \in \mathcal{K}'_G : Y \subset X\} = \{Y \in \mathcal{K}_G : Y \subset X\} \cap \mathcal{K}'_G$ est un fermé de (\mathcal{K}'_G, δ) , et les applications D_X, R_X sont δ -semi-continues inférieurement sur le fermé $\{Y \in \mathcal{K}_G : Y \subset X\}$, donc aussi sur $\{Y \in \mathcal{K}'_G : Y \subset X\}$ par restriction; et les applications D et R sont δ -semi-continues inférieurement sur \mathcal{K}_G , donc aussi sur \mathcal{K}'_G par restriction.

De plus d'après la proposition 6.4, la fonction V est δ -semi-continue supérieurement sur \mathcal{K}'_G , donc $\frac{1}{V}$ est δ -semi-continue inférieurement sur \mathcal{K}'_G . Et il est immédiat que le produit de fonctions strictement positives semi-continues inférieurement est aussi une fonction strictement positive semi-continue inférieurement; d'où les résultats sur les ρ_X^i et les ρ^i . \square

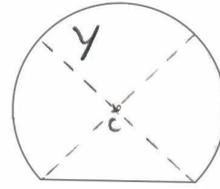
Remarque 6.7 Le résultat ci-dessus exprime en particulier qu'une légère déformation d'un objet $Y \in \mathcal{K}'_G$ n'entraîne pas de croissance brusque des indices $\rho^i(Y)$: plus précisément, si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δ -converge vers Y dans \mathcal{K}'_G , on a $\rho^i(Y) \leq \liminf \rho^i(Y_n)$.

Mais on peut avoir une décroissance brusque des $\rho^i(Y)$, comme l'attestent les exemples ci-dessous :

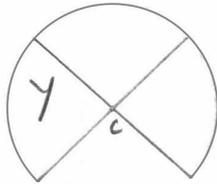




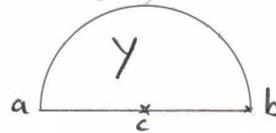
$$\begin{cases} c \in \overset{\circ}{X} \\ E_c = \{\text{bords extrêmes}\} \end{cases}$$



$$\begin{cases} c \in \overset{\circ}{X} \\ E_c \neq \{\text{bords extrêmes}\} \end{cases}$$



$$\begin{cases} c \in \partial X \\ E_c = \{\text{bords extrêmes}\} \end{cases}$$



$$\begin{cases} c \in \partial X \\ E_c \neq \{\text{bords extrêmes}\} \end{cases}$$

En conclusion, chacun des deux indices d'allongement ρ_X^i permet de définir une "courbe granulométrique" relative aux composantes connexes Y d'un milieu donné. Le choix du cadre de mesure X ($X = \mathbb{R}^m$, X coïncidant avec la réunion des composantes connexes Y , ou encore X intermédiaire) s'impose en général clairement par la nature de la mesure souhaitée.

Vu l'identité des propriétés générales vérifiées par ces deux indices, il n'est pas évident de choisir lequel utiliser préférentiellement. Il s'avère qu'on met en œuvre plutôt le premier pour une raison purement pratique, liée à des questions de parité au niveau de la discrétisation des images.

Bibliographie

- [1] Ch. Lantuéjoul : *Existence et Unicité Géodésique*. Internal report, CGMM, Fontainebleau, N-771 (1982)
- [2] Ch. Lantuéjoul, F. Maisonneuve : *Geodesic Methods in Quantitative Image Analysis*. Pattern Recognition, Vol. 17, n°2, pp.177-187 (1984)
- [3] Ch Lantuéjoul, S. Beucher : *On the Use of the Geodesic Metric in Image Analysis*. J of Microscopy 121-1, pp. 39-49 (1980)
- [4] Ch. Lantuéjoul, F. Maisonneuve : *Geodesic Convexity*. Acta Stereol, 3/2, pp. 169-174 (1984)
- [5] G. Choquet : *Cours d'analyse*. Masson, Paris (1969)
- [6] H. Hadwiger, traduction abrégée de G. Matheron : *Leçons sur le volume la surface et le problème des isopérimétriques*. Internal report, CGMM, Fontainebleau, N-110 (1969)
- [7] H. Jung, *Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschleisst*. J. reine angew. Math. 12", pp.241-257 (1901)
- [8] G.Matheron : *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley and Sons, 1975