



# ETUDE DU GROUPE DES SIMILITUDES AFFINES DU PLAN $\mathbb{R}^2$ COMME PRODUIT SEMI - DIRECT

Guillaume Byamwezi Munigwa

## ► To cite this version:

Guillaume Byamwezi Munigwa. ETUDE DU GROUPE DES SIMILITUDES AFFINES DU PLAN  $\mathbb{R}^2$  COMME PRODUIT SEMI - DIRECT. 2014. <hal-00995871>

**HAL Id: hal-00995871**

**<https://hal.science/hal-00995871v1>**

Preprint submitted on 24 May 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# ETUDE DU GROUPE DES SIMILITUDES AFFINES DU PLAN $\mathbb{R}^2$ COMME PRODUIT SEMI – DIRECT

Par BYAMWEZI MUNIGWA<sup>1</sup>

## Résumé

*Le calcul de certains invariants topologiques, tels que les groupes fondamentaux des espaces topologiques, n'est pas facile et exige souvent la décomposition des espaces concernés en produit direct des espaces facteurs dont les groupes fondamentaux sont bien connus ou faciles à trouver. Le recours au produit semi-direct est parfois envisageable lorsqu'il est difficile ou impossible d'obtenir le produit direct. C'est dans ce sens que la présente étude se propose de décomposer, à partir des méthodes algébriques élémentaires, le groupe  $SIM(2)$  des similitudes affines du plan  $\mathbb{R}^2$  en produit semi-direct. La contribution de ce travail est essentiellement l'explicitation de la définition de ce groupe en tant que produit semi-direct, la recherche de certains de ses sous-groupes importants et leur interprétation algébrique.*

**Mots clés :** *Produit direct de groupes, automorphisme de groupe, translation, homothétie, rotation.*

## Abstract

*The calculation of certain topological unvarying such as fundamental group of topological spaces is not easy at all. It sometimes requires the decomposition of the concerned spaces in the direct product of the factor spaces of which the fundamental groups are well-known or easy to find. Most of paces are difficult to decompose in such products and one has recourse to semi-direct product. It is in this regard that we have suggested to decompose thanks to elementary algebraic methods, the group  $SIM(2)$  of affine similarities, of the plan  $\mathbb{R}^2$  in semi-direct product. Our contribution is essentially the clarification of the definition of that group as the semi-direct product, the calculation of some of its important sub groups and their algebraic interpretation.*

**Keywords:** *Direct product of groups, automorphism, translation, homothetic, rotation.*

## I. INTRODUCTION

Dans un cadre un peu plus avancé, les physiciens appellent signal d'énergie finie, une fonction réelle  $f$  qui est telle que la quantité  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$  est finie. L'ensemble de tels signaux est un espace vectoriel noté  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ . Dans le domaine de l'analyse et de traitement des signaux, on peut utiliser les transformées de Fourier, mais divers auteurs ont montré leur

---

<sup>1</sup> Assistant au Département de Mathématique-Physique à l'Institut Supérieur Pédagogique de Bukavu

insuffisance. C'est ainsi que les mathématiciens préfèrent aux transformées de Fourier d'autres transformées connues sous le nom de transformées en ondelettes.

En définissant les transformées en ondelettes bidimensionnelles, celles agissant sur l'ensemble  $L^2(\mathbb{R}^2, d^2\vec{x})$  des fonctions à carré intégrable sur  $\mathbb{R}^2$ , Romain MURENZI ([1], [2]) s'est servi du groupe  $SIM(2)$  des similitudes affines du plan. Il y a donc lieu de se poser de question sur la nature des éléments de ce groupe tout en supposant la possibilité de sa décomposition en produit direct ou produit semi-direct.

Selon Paul DUBREIL : « *Pour étudier une structure algébrique, on s'intéresse d'abord aux parties remarquables (en particulier aux éléments remarquables), aux relations remarquables, aux applications remarquables et aux liens qui existent entre elles.* » ([8])

La présente étude s'est réalisée en combinant les notions d'Algèbre (Théorie élémentaires de groupes) et celles de géométrie plane suivant l'approche hypothético-déductive, l'objectif étant d'explicitier la nature des éléments de  $SIM(2)$ , la loi du groupe ainsi que les éléments remarquables.

## II. RAPPEL

### 2. 1. PRODUIT DIRECT ET PRODUIT SEMI-DIRECT

#### Définition 2.1.1 ([12] ; [8])

Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes d'éléments neutres respectivement  $e_1$  et  $e_2$ . Désignons par  $G_1 \times G_2$  leur produit cartésien. On définit sur  $G_1 \times G_2$  une loi de composition interne (notée multiplicativement) par :  $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$  ; avec  $x_1, y_1 \in G_1$  et  $x_2, y_2 \in G_2$ . Cette loi de composition munit  $G_1 \times G_2$  d'une structure de groupe appelé **produit direct** (ou simplement produit) des groupes  $G_1$  et  $G_2$ .

#### Définition 2.1.2 ([9])

Un groupe  $G$  est un produit semi-direct interne d'un sous-groupe distingué  $H$  par un sous-groupe  $K$  si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $H \cap K = \{e\}$  et  $G = H \cdot K$
- $\forall x \in G, \exists! (h, k) \in H \times K / x = hk$  ; (i.e tout élément  $x$  de  $G$  s'écrit de manière unique comme produit d'un élément  $h$  de  $H$  et d'un élément  $k$  de  $K$ ).
- La restriction à  $K$  de la surjection canonique  $G \rightarrow G/H$  est un isomorphisme entre  $K$  et  $G/H$ . La décomposition des éléments de  $G$  comme produit d'un élément de  $H$  et d'un élément de  $K$  est d'une certaine façon compatible avec la loi de composition du groupe.

Soient, en effet,  $g_1 = h_1 k_1$  et  $g_2 = h_2 k_2$  deux éléments de  $G$  ainsi décomposés.

On a :  $g_1 g_2 = h_1 k_1 h_2 k_2 = (h_1 k_1 h_2 k_1^{-1})(k_1 k_2)$ . Comme  $H$  est distingué,  $k_1 h_2 k_1^{-1}$  est bien dans  $H$  et par conséquent  $h_1 k_1 h_2 k_1^{-1} \in H$ .

Dans ce cas, le groupe  $K$  agit par conjugaison sur  $H$ , et le groupe  $G$  est donc isomorphe au **produit semi-direct externe**, i.e au groupe défini par le produit cartésien de  $H$  par  $K$  muni de la loi :  $\forall (h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1(k_1 h_2 k_1^{-1}), k_1 k_2)$

On sait que  $\forall k \in K, \varphi : h \in H \mapsto khk^{-1} \in H$  est un automorphisme de  $H$ . Notons-le  $\varphi_k$ . Aussi, l'application  $\varphi$  de  $K$  dans  $\text{Aut}(H)$  qui, à  $k$  associe  $\varphi_k$  est un morphisme de groupes. On est donc amené à poser la définition plus générale suivante :

### Définition 2.1.3 ([9])

Deux groupes abstraits et totalement étrangers l'un à l'autre,  $H$  et  $K$ , et un morphisme  $\varphi$  de  $K$  dans le groupe des automorphismes  $\text{Aut}(H)$  de  $H$  étant donnés, l'ensemble  $G = H \times K$  muni de la loi :  $(h, k)(h', k') = (h\varphi_k(h'), kk')$  est un groupe ; avec  $\varphi_k \in \text{Aut}(H)$ . on l'appelle **produit semi-direct de  $H$  par  $K$  relativement à  $\varphi$**  et est noté  $H \rtimes_{\varphi} K$  ou simplement  $H \rtimes K$ .

N.B. :

1) le résultat ne change pas au cas où  $H$  est additif et  $K$  multiplicatif. Dans ce cas la loi est définie dans  $H \times K$  par :  $\forall (h, k), (h', k') \in H \times K$ ,

$$(h, k)(h', k') = (-\varphi_{k^{-1}}(h), k^{-1}).$$

2) le cas où  $\varphi_k$  est trivial, i.e  $\varphi_k(h') = h'$ , correspond au produit direct.

## 2. 2. GROUPE DES SIMILITUDES LINEAIRES DU PLAN $\mathbb{R}^2$

Définition 2.2 ([4] ; [11])

On dit qu'un endomorphisme  $f$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  est une similitude linéaire ou simplement similitude s'il existe un scalaire  $\lambda$  tel que, quels que soient  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $\mathbb{R}^2$ , on ait

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \quad (1)$$

Il résulte de la conséquence du produit scalaire que la relation (1) équivaut à la suivante :

$$\|f(\vec{x})\|^2 = \lambda \|\vec{x}\|^2, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

En outre la relation (2) prouve que l'on a nécessairement  $\lambda \geq 0$ .

Comme il y a des  $\vec{x} \neq \vec{0}$  dans  $\mathbb{R}^2$ , le nombre  $\lambda$  est bien déterminé pour  $f$ . On l'appelle **multiplicateur de  $f$** .

### Exemple 2.2

Toute isométrie vectorielle est une similitude de multiplicateur 1. En effet, si  $f$  est une isométrie vectorielle, on a :  $\|f(x)\| = \|x\|$  ; i.e  $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$

**Remarque 2.2**

- Si  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont orthogonaux, alors  $f(\vec{x})$  et  $f(\vec{y})$  sont orthogonaux.
- Si  $\lambda > 0$ , la relation  $f(\vec{x}) = \vec{0}$  entraîne  $\vec{x} = \vec{0}$ , autrement dit  $f$  est un monomorphisme.
- Au contraire si  $\lambda = 0$ , on a  $f = \theta$  (application nulle).

**2.2. 1. Groupe des similitudes linéaires ([4])**

Soit  $f$  et  $g$  deux similitudes de multiplicateurs respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ . Posons  $h = g \circ f$ . On a :

$$\langle h(\vec{x}), h(\vec{y}) \rangle = \langle (g \circ f)(\vec{x}), (g \circ f)(\vec{y}) \rangle = \langle g(f(\vec{x})), g(f(\vec{y})) \rangle = \beta \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \beta \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

Ce qui traduit que la composée  $h$  de deux similitudes linéaires  $f$  et  $g$  est une similitude linéaire.

Si  $f$  est bijective (i.e  $\alpha \neq 0$ ), alors elle admet  $f^{-1}$  comme réciproque.

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle (f \circ f^{-1})(\vec{x}), (f \circ f^{-1})(\vec{y}) \rangle = \alpha \langle f^{-1}(\vec{x}), f^{-1}(\vec{y}) \rangle, \text{ i.e } \langle f^{-1}(\vec{x}), f^{-1}(\vec{y}) \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

D'où quelle que soit la similitude linéaire  $f$  de multiplicateur  $\alpha \neq 0$ ,  $f^{-1}$  est aussi une similitude de multiplicateur  $\frac{1}{\alpha}$ .

On voit donc que l'ensemble des similitudes linéaires bijectives est un sous-groupe du groupe linéaire  $GL(\mathbb{R}^2)$ .

Ce groupe des similitudes linéaires est noté **GO**( $\mathbb{R}^2$ ) (ou généralement **GO**(2) ).

**2.2. 2. Matrice d'une similitude linéaire ([3] ; [5] ; [6])**

Soit  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$ . Pour qu'un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  soit une similitude linéaire, il faut et il suffit que sa matrice relativement à  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  soit de l'une de ces deux formes :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \text{ pour les similitudes directes ou}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}; \text{ pour les similitudes indirectes.}$$

Le multiplicateur et le déterminant de  $f$  sont alors égaux à  $a^2+b^2$  pour les similitudes directes et  $-a^2-b^2$  pour les similitudes indirectes.

Notons que le groupe  $G_0^+(2)$  des similitudes linéaires directes non nulles est commutatif. En

effet la multiplication des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  est commutative :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - a'b \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - a'b \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix}$$

Néanmoins, nous noterons que le groupe  $GO(2)$  de toutes les similitudes linéaires non nulles n'est pas commutatif.

En effet,  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & -a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bb' & ab' - a'b \\ a'b - ab' & bb' + aa' \end{pmatrix}$  alors que

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & -a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bb' & a'b - ab' \\ ab' - a'b & bb' + aa' \end{pmatrix}$$

### 2.2. 3. Décomposition d'une similitude linéaire ([4])

$\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^2)$  désigne le groupe des homothéties positives. Il est isomorphe à  $\mathbb{R}_+^*$ .

$O(2)$  désigne le groupe des rotations.

Soit  $h_k$  une homothétie de rapport  $k \neq 0$ .  $\forall \vec{x} \in E, \langle h_k(\vec{x}), h_k(\vec{y}) \rangle = \langle k\vec{x}, k\vec{y} \rangle = k^2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

Ceci traduit que  $h_k$  est une similitude de multiplicateur  $k^2$ . Soit maintenant  $f$  une similitude de multiplicateur  $\lambda > 0$ . Alors le nombre réel  $k = \sqrt{\lambda}$  est défini et on a :

$$\langle (h_k^{-1} \circ f)(\vec{x}), (h_k^{-1} \circ f)(\vec{y}) \rangle = \langle h_k^{-1}(f(\vec{x})), h_k^{-1}(f(\vec{y})) \rangle; \text{ par définition de la composition des applications}$$

$$= \langle \frac{1}{k} f(\vec{x}), \frac{1}{k} f(\vec{y}) \rangle = \frac{1}{k^2} \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \frac{1}{k^2} \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle;$$

Ce qui signifie que  $h_k^{-1} \circ f$  est une isométrie ; i.e on peut écrire  $\forall f \in GO(2), \forall g \in O(2),$

$$\exists h_k^{-1} \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^2) \text{ tel que } h_k^{-1} \circ f = g; \text{ i.e } h_k \circ h_k^{-1} \circ f = h_k \circ g; \text{ i.e } f = h_k \circ g \quad (*)$$

### Proposition 2.2

*La décomposition  $f = h_k \circ g$  est unique*

En effet, supposons qu'il existe une autre décomposition  $h_{k'} \circ g'$ , avec  $g' \in O(2)$ . On a alors :

$$\begin{cases} f = h_k \circ g \\ f = h_{k'} \circ g' \end{cases} \Rightarrow h_k \circ g = h_{k'} \circ g' \Leftrightarrow h_k^{-1} \circ h_k \circ g = h_k^{-1} \circ h_{k'} \circ g'$$

$$\Leftrightarrow g = h_k^{-1} \circ h_{k'} \circ g'$$

$$\Leftrightarrow g \circ g'^{-1} = h_k^{-1} \circ h_{k'}$$

$$\Leftrightarrow g \circ g'^{-1} = h_{k^{-1}k'}$$

$$\Rightarrow g \circ g'^{-1} = h_\gamma; \text{ avec } \gamma = k^{-1}k'$$

Ce qui signifie que  $h_\gamma$  est une isométrie; i.e  $\gamma^2 = 1$  or  $k > 0$  et  $k' > 0$ ; donc  $\gamma = 1$

$$\text{i.e } k^{-1}k' = 1 \Rightarrow k = k'$$

$$\text{par suite } g \circ g'^{-1} = h_\gamma \text{ devient } g \circ g'^{-1} = I_{DE} \text{ car } \gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow g = g' \text{ D'où l'unicité.}$$

#### 2.2. 4. Identification de $GO(2)$ à un produit direct ([6])

Rappelons que toute similitude  $f$ , différente de l'application nulle, s'écrit d'une seule manière comme  $f = h_\lambda \circ g$  où  $g$  est une isométrie et  $h_\lambda$  une homothétie positive. Comme  $h_\lambda$  est une similitude directe, on voit que  $f$  est une similitude directe si  $g$  est une rotation, une similitude indirecte si  $g$  est une symétrie. C'est ainsi que l'étude du groupe  $GO(2)$  est parfois ramenée à celle de  $O(2)$ .

Il est clair que le produit direct  $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^2) \times O(2)$ , noté  $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^2) \times \mathbf{O}(2)$  ou généralement par  $\mathbb{R}_+^* \times O(2)$  est un groupe. Ses éléments sont des couples, ils sont donc de nature différente que ceux de  $GO(2)$ .

Cependant, on montre que  $\mathbb{R}_+^* \times O(2)$  est isomorphe à  $GO(2)$ .

En, effet, soit l'application  $\Phi : \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^2) \times O(2) \rightarrow GO(\mathbb{R}^2) : (h_k, g) \mapsto h_k \circ g$

Il est évident que  $\Phi$  est un morphisme du fait que  $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^2) \times O(2)$  est un groupe (groupe-produit).

Plus précisément :

- $\forall (h_k, g), (h_{k'}, g') \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^2) \times O(2)$ , on a :

$$\begin{aligned} \Phi((h_k, g) \cdot (h_{k'}, g')) &= \Phi((h_k \circ h_{k'}, g \circ g')) \\ &= (h_k \circ h_{k'}) \circ (g \circ g') ; \text{ par définition de } \Phi. \\ &= (h_k \circ g) \circ (h_{k'} \circ g') ; \text{ du fait que } g \text{ commute avec tout élément de } \\ &\quad \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^2), \\ &= \Phi((h_k, g)) \circ \Phi((h_{k'}, g')) \end{aligned}$$

Ce qui traduit que  $\Phi$  est un morphisme

- $\Phi$  est injectif. En effet, soient  $(h_k, g) \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^2) \times O(2)$  et  $(h_{k'}, g') \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^2) \times O(2)$  tels que  $\Phi((h_k, g)) = \Phi((h_{k'}, g'))$  i.e  $h_k \circ g = h_{k'} \circ g'$  i.e  $k=k'$  et  $g=g'$  (Voir ci-dessus)
- $\Phi$  est surjectif. En effet, on a déjà montré que  $\forall f \in GO(\mathbb{R}^2)$ ,  $\exists h_k \in \mathcal{H}^+(\mathbb{R}^2)$  et  $g \in O(2)$  tels que  $f=h_k \circ g$ . D'où la surjectivité. Cela traduit que  $\Phi$  est un isomorphisme de  $\mathcal{H}^+(\mathbb{R}^2) \times O(2)$  sur  $GO(\mathbb{R}^2)$ .

#### 2. 3. SIMILITUDES AFFINES DE $\mathbb{R}^2$

##### Définition 2.3.1 ([6])

Une application affine  $\mathcal{U}$  dans  $\mathbb{R}^2$  est dite similitude affine si, et seulement si, il existe une translation  $t_{\vec{b}}$  de vecteur  $\vec{b}$  et une similitude linéaire  $f$  telle que  $\mathcal{U} = t_{\vec{b}} \circ f$ .

$f$  est la similitude linéaire associée à  $\mathcal{U}$ .

**Définition 2.3.2** ([6])

On dit qu'une similitude affine  $\mathcal{U}$  est directe (resp. indirecte) si la similitude linéaire lui associée  $f$  est directe (resp. indirecte).

**Définition 2.3.3** ([6])

On dit qu'une similitude affine  $\mathcal{U}$  est une isométrie affine si la similitude linéaire lui associée  $f$  est une isométrie linéaire.

Les isométries affines directes (resp. indirectes) sont aussi appelées déplacements (resp. retournements).

**Propriété 2.3.1** ([6])

Pour toute similitude affine  $\mathcal{U}$  de multiplicateur différent de 1, il existe un point  $a$  invariant et un seul, et on a :  $\mathcal{U}(x) - a = f(x-a)$  (1) ;  $f$  étant la similitude linéaire associée à  $\mathcal{U}$ .

En effet, on peut écrire  $\mathcal{U} = t_{\vec{b}} \circ f$  où  $f \in \text{GO}(2)$

Dire que  $\mathcal{U}(a) = a$  signifie  $\vec{b} + f(a) = a$  i.e  $a - f(a) = \vec{b}$ .

Mais l'endomorphisme  $w = I - f$  est bijectif du fait que  $f(x) = \lambda x$  entraîne  $\|x\| = \|f(x)\|$  i.e  $\|x\| = \lambda \|x\|$

Comme  $\lambda \neq 1$  par hypothèse, cela n'entraîne que  $x = 0$ .

D'où  $\text{Ker}(I - f) = \{0\}$  ; i.e  $I - f$  est injectif et donc bijectif. D'où l'unicité du point  $a$ .

L'unique point fixe  $a$  s'appelle **centre de la similitude  $\mathcal{U}$** .

**Remarque 2.3.1**

La relation  $\mathcal{U}(x) - a = f(x - a)$  peut encore s'écrire :

$$\mathcal{U}(x) = a + f(x - a)$$

$$\text{i.e } \mathcal{U} = t_a \circ f \circ t_{-a}$$

$$\text{i.e } \mathcal{U} = t_a \circ f \circ t_a^{-1} \quad (2).$$

Cette relation (2) ramène (par transport de structure au moyen de  $t_a$ ) l'étude des similitudes affines de multiplicateur différent de 1 et de centre donné à celle des similitudes linéaires faite plus haut.

**Propriété 2.3.2** ([6])

Pour les isométries, on a les résultats suivants ;

(i)  $\mathcal{U}$  est l'identité  $I$

(ii)  $\mathcal{U}$  est une translation  $t_{\vec{b}}$  de vecteur  $\vec{b} \neq \vec{0}$



(iii) Il existe un point invariant  $a$  et un seul pour  $\mathcal{U}$  et l'on a  $\mathcal{U}(x) - a = f(x - a)$  i.e  $\mathcal{U} = t_a \circ f \circ t_a$ , où  $f$  est une rotation différente de l'identité.

(iv) Il existe une droite unique  $D$  et un vecteur unique  $\vec{b}$  appartenant à la direction de  $D$  tels que, si  $\mathcal{S}$  est la symétrie par rapport à  $D$ , on ait  $\mathcal{U} = t_{\vec{b}} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ t_{\vec{b}}$

En effet, supposons d'abord qu'il existe un point invariant  $a$  ; alors  $b = a - f(a)$  et on a la formule (1)

Si  $f$  est une rotation différente de l'identité, elle ne laisse invariant aucun point autre que 0 ; au contraire, si  $f$  est une symétrie par rapport à une droite vectorielle  $D_0$ , on est dans le cas (iv) avec  $b = 0$ ,  $\mathcal{U} = \mathcal{S}$ .

Si au contraire  $\mathcal{U}$  ne laisse aucun point invariant, le raisonnement précédent prouve que  $I - f$  n'est pas injectif, autrement dit qu'il existe  $x \neq 0$  tel que  $f(x) = x$ . Cela ne peut se produire que si  $f$  est une symétrie  $\mathcal{S}$  par rapport à une droite vectorielle  $D_0$ .

Posons  $b = b' + b''$  où  $b' \in D_0$  et  $b''$  est orthogonal à  $D_0$ . On sait que  $\mathcal{S} = t_{b'} \circ \mathcal{S}_0$  est la symétrie par rapport à la droite  $D = -\frac{1}{2}b'' + D_0$ .

On a donc  $\mathcal{U} = t_{b'} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ t_{b'}$ . L'unicité dans (iv) provient de ce que  $\mathcal{S}$  s'écrit d'une seule manière sous la forme  $t_c \circ \mathcal{S}_0$ , où  $\mathcal{S}_0$  est la symétrie par rapport à la direction  $D_0$  et  $D$  et  $c$  est orthogonal à  $D_0$ . Dans le cas (iii), on dit que  $\mathcal{U}$  est une rotation de centre  $a$ .

4°) La forme  $\mathcal{U}(x) - a = f(x - a)$  qui s'écrit aussi  $t_a \circ f \circ t_a^{-1}$  ramène (par transport de structure) l'étude des rotations de centre donné à celle du groupe  $SO(2)$ . ***Raison pour laquelle, dans la suite, nous ne considérerons que le groupe  $SO(2)$  pour étudier les similitudes affines. C'est-à-dire que nous utiliserons le groupe  $\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$ .***

### III. METHODOLOGIE, RESULTATS ET DISCUSSION

A partir des notions d'Algèbre et celles de géométrie plane présentées dans le rappel, il est bien clair que l'ensemble des similitudes affines planes est un groupe. On le note **SIM(2)**.

Suivant l'approche hypothético-déductive, les résultats de la présente étude sont énoncés sous forme de propositions. Les interprétations suivantes sont basées sur la théorie élémentaire des groupes qu'on peut trouver dans [7], [8], [10] et [12].

Retenons que :

- $\mathcal{T}(2)$  est le groupe des translations de  $\mathbb{R}^2$  isomorphe au groupe additif  $(\mathbb{R}^2, +)$ . Ses éléments seront notés  $\vec{b}$  tout en sachant que ce sont des couples dont la représentation matricielle dans la base canonique sera  $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ , avec  $x$  et  $y$  des coordonnées dans le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

- $\mathcal{H}^+(2)$  est le groupe des homothéties positives (dilatations) isomorphe au groupe multiplicatif  $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ .
- $SO(2)$  est le groupe des isométries linéaires positives (directes) isomorphe au groupe des matrices de la forme  $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ;  $\theta \in [0, 2\pi[$

### Proposition 3.1

$\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  est un groupe. (Ses éléments seront conventionnellement notés  $aR$ ).

En effet,

- $\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  n'est pas vide du fait que  $\mathbb{R}_+^*$  et  $SO(2)$  ne sont pas vides.
- $\forall aR, a'R' \in \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$ , on a  $a : aR \cdot a'R' = aa'RR' \in \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$ , la loi est interne.
- $\forall aR, a'R', a''R'' \in \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$ , on a  $(aR \cdot a'R') \cdot a''R'' = aa'RR' \cdot a''R'' = (aa')a''(RR'R'') = a(a'a'')R(R'R'') = aR(a'R'a''R'')$ . D'où l'associativité.
- $\exists eM \in \mathbb{R}_+^* \times SO(2) / aReM = aR$  et  $eM = aR$   
i.e  $aeRM = aR$  et  $eaMR = aR$   
i.e  $a^{-1}aeRM = a^{-1}aR$  et  $eaMRR^{-1} = aRR^{-1}$   
i.e  $eRM = R$  et  $eaM = aI_d$   
i.e  $eM = I_d$  et  $eM = I_d$   
 $\Rightarrow e = 1$  et  $M = I_d$ . D'où l'élément neutre est  $(1, I_d)$
- $\forall aR \in \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$ ,  $\exists a'R' \in \mathbb{R}_+^* \times SO(2) / aRa'R' = 1.I$  et  $a'R'aR = I$   
i.e  $aa'RR' = I$  et  $a'aR'R = I$  i.e  $a'R' = a^{-1}R^{-1}$ . D'où le symétrique de tout élément  $aR$  de  $\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  est  $a^{-1}R^{-1}$ .

On conclut que  $\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  est un groupe. Comme  $\mathbb{R}_+^*$  et  $SO(2)$  sont des groupes commutatifs il est évident que  $\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  est commutatif.

### Proposition 3.2

Soit  $aR$  un élément fixe de  $\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$ . L'application définie dans  $\mathbb{R}^2$  par

$\varphi_{aR} : \vec{b} \mapsto \varphi_{aR}(\vec{b}) = aR\vec{b}$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

En effet,

- $\forall \vec{b}, \vec{b}' \in \mathbb{R}^2$ , on a  $\varphi_{aR}(\vec{b} + \vec{b}') = aR(\vec{b} + \vec{b}') = aR\vec{b} + aR\vec{b}'$ ; du fait de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition des matrices ( $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $R$  et  $\vec{b}$  étant des matrices dont les formes sont définies ci-haut).

$$\Leftrightarrow \varphi_{aR}(\vec{b} + \vec{b}') = \varphi_{aR}(\vec{b}) + \varphi_{aR}(\vec{b}')$$

Ce qui traduit que  $\varphi_{aR}$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

- $\varphi_{aR}$  est injectif. En effet, soient  $\vec{b}, \vec{b}' \in \mathbb{R}^2 / \varphi_{aR}(\vec{b}) = \varphi_{aR}(\vec{b}')$ . Alors  $aR\vec{b} = aR\vec{b}'$  ; donc  $\vec{b} = \vec{b}'$  car  $a$  et  $R$  sont inversibles et, par conséquent, simplifiables.

Comme  $\mathbb{R}^2$  est de dimension finie, on conclut que  $\varphi_{aR}$  est bijectif. D'où  $\varphi_{aR}$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

En appliquant la définition 2.1.3, il est donc possible de définir le produit semi-direct de  $\mathbb{R}^2$  par le produit direct  $\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  par rapport à l'automorphisme défini ci-dessus que nous pouvons simplement noter  $\varphi$  au lieu de  $\varphi_{aR}$ .

Le produit semi-direct noté  $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\varphi} (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$  ou simplement  $\mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$ , est celui que l'on appelle **groupe des similitudes du plan affine**  $\mathbb{R}^2$ .

### Proposition 3.3

$\mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$  muni de la loi définie par :  $\forall (\vec{b}, aR); (\vec{b}', a'R') \in \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$ , on a :  $(\vec{b}, aR)(\vec{b}', a'R') = (\vec{b} + \varphi_{aR}(\vec{b}'), aa'RR')$  i.e  $(\vec{b}, aR)(\vec{b}', a'R') = (\vec{b} + aR\vec{b}', aa'RR')$  a la structure d'un groupe.

En effet,

- Cet ensemble est non vide du fait que  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  sont non vides.
- $\forall (\vec{b}, aR); (\vec{b}', a'R'); (\vec{b}'', a''R'') \in \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$ , on a :

$$\begin{aligned} ((\vec{b}, aR)(\vec{b}', a'R'))(\vec{b}'', a''R'') &= (\vec{b} + aR\vec{b}', aa'RR')(\vec{b}'', a''R'') \\ &= (\vec{b} + aR\vec{b}' + aa'RR'\vec{b}'', aa'a''RR'R'') \\ &= (\vec{b} + aR(\vec{b}' + a'R'b''), a'a''(R'R'')aR) \\ &= (\vec{b}, aR)(\vec{b}' + a'R'b'', a'a''R'R'') \\ &= (\vec{b}, aR)((\vec{b}', a'R')(\vec{b}'', a''R'')) \end{aligned}$$

- Supposons qu'il existe  $\exists (\vec{b}_0, a_0R_0) \in \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2)) / \forall (\vec{b}, aR) \in \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$ , on ait d'une part,  $(\vec{b}, aR)(\vec{b}_0, a_0R_0) = (\vec{b}, aR)$

$$\text{i.e } (\vec{b} + aR\vec{b}_0, aa_0RR_0) = (\vec{b}, aR) \Rightarrow \begin{cases} \vec{b} + aR\vec{b}_0 = \vec{b} \\ aa_0RR_0 = aR \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aR\vec{b}_0 = \vec{0} \\ a_0R_0 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{b}_0 = \vec{0} \\ a_0R_0 = I \end{cases}$$

et d'autre part  $(\vec{b}_0, a_0R_0)(\vec{b}, aR) = (\vec{b}, aR)$  i.e  $(\vec{b}_0 + a_0R_0\vec{b}, a_0aR_0R) = (\vec{b}, aR)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{b}_0 + a_0R_0\vec{b} = \vec{b} & (1) \\ a_0aR_0R = aR & (2) \end{cases}$$

(2)  $\Rightarrow a_0R_0 = I$  et (2) dans (1) donne  $\vec{b}_0 + \vec{b} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}_0 = \vec{0}$ . Donc  $(\vec{b}_0, a_0R_0) = (0, I)$ .

On conclut que  $(0, I)$  est élément neutre pour cette loi ; où  $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

• soient  $(\vec{b}, aR) \in \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$  et  $(\vec{b}', a'R') \in \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$  tels que

$$(\vec{b}, aR)(\vec{b}', a'R') = (O, I)$$

$$\text{i.e } (\vec{b} + aR\vec{b}', aa'RR') = (O, I)$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \vec{b} + aR\vec{b}' = O \\ aa'RR' = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aR\vec{b}' = -\vec{b} \\ a'R' = a^{-1}R^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{b}' = -a^{-1}R^{-1}\vec{b} \\ a'R' = a^{-1}R^{-1} \end{cases}$$

$$\text{et } (\vec{b}', a'R')(\vec{b}, aR) = (O, I)$$

$$\text{i.e } (\vec{b}' + a'R'\vec{b}, a'aR'R) = (O, I) \Rightarrow \begin{cases} \vec{b}' + a'R'\vec{b} = O & (1) \\ a'aR'R = I & (2) \end{cases}$$

$$(2) \text{ donne : } a'R' = a^{-1}R^{-1}$$

$$(2) \text{ dans (1) donne : } \vec{b}' = -a'R'\vec{b} \Rightarrow \vec{b}' = -a^{-1}R^{-1}\vec{b}. \text{ Donc } (\vec{b}', a'R') = (-a^{-1}R^{-1}\vec{b}, a^{-1}R^{-1})$$

On conclut que l'inverse de tout élément  $(\vec{b}, aR)$  de  $\mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$  est  $(-a^{-1}R^{-1}\vec{b}, a^{-1}R^{-1})$  i.e.  $(\varphi_{-a^{-1}R^{-1}}(-\vec{b}), a^{-1}R^{-1})$

Il en résulte donc que  $\text{SIM}(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$  est un groupe. ■

### Proposition 3.4

*L'application :  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2)) : \vec{b} \mapsto (\vec{b}, I)$  est un monomorphisme plongeant  $\mathbb{R}^2$  dans le produit  $\mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$ .*

En effet, il est facile de vérifier que  $\mathbb{R}^2$  est isomorphe à  $(\mathbb{R}^2, I)$ .

Par suite,  $\mathbb{R}^2$  est un sous-groupe normal de  $\mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$  ; il suffit de montrer que  $(\mathbb{R}^2, I)$

est normal. On a :  $\forall (\vec{b}, aR) \in \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2)), (\vec{b}, aR)(\mathbb{R}^2, I)(\vec{b}, aR)^{-1} \subset (\mathbb{R}^2, I)$ .

En effet, soit  $X \in (\vec{b}, aR)(\mathbb{R}^2, I)(\vec{b}, aR)^{-1}$ . Alors  $\exists \vec{y} \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$X = (\vec{b}, aR)(\mathbb{R}^2, I)(\vec{b}, aR)^{-1} \Leftrightarrow X = (\vec{b} + aR\vec{y}, aR)(-a^{-1}R^{-1}\vec{b}, a^{-1}R^{-1})$$

$$\Leftrightarrow X = (\vec{b} + aR\vec{y} + aR(-a^{-1}R^{-1})\vec{b}, a^{-1}R^{-1}aR) \Leftrightarrow X = (\vec{b} + aR\vec{y} - aR(aR)^{-1}\vec{b}, a^{-1}R^{-1}aR)$$

$$\Leftrightarrow X = (\vec{b} + aR\vec{y} - \vec{b}, I) \Leftrightarrow X = (aR\vec{y}, I) \in (\mathbb{R}^2, I) \text{ car } aR\vec{y} \text{ est bien dans } \mathbb{R}^2 \text{ par l'automorphisme défini plus haut ; ce qui traduit que } (\mathbb{R}^2, I) \text{ ou simplement } \mathbb{R}^2 \text{ est invariant dans } \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2)) = \text{SIM}(2). \blacksquare$$

### Proposition 3.5

L'application  $\psi : \mathbb{R}_+^* \times SO(2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$  telle que  $aR \mapsto (0, aR)$  est un monomorphisme plongeant  $\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  dans  $SIM(2)$ .

En effet,  $\forall aR, a'R' \in \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$ ,  $\psi(aRa'R') = \psi(aa'RR') = (0, aa'RR') = (0, aR)(0, a'R') = \psi(aR)\psi(a'R')$

De plus,  $aR, a'R' \in \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  tel que  $\psi(aR) = \psi(a'R')$

i.e  $(0, aR) = (0, a'R') \Rightarrow aR = a'R' . \blacksquare$

### Proposition 3.6

$\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  n'est pas invariant dans  $SIM(2)$ .

En effet, soit  $Y \in (\vec{b}, aR) (0, \mathbb{R}_+^* \times SO(2)) (\vec{b}, aR)^{-1}$

i.e  $\exists a'R' \in \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  tel que  $Y = (\vec{b}, aR)(0, aa'RR') (-a^{-1}R^{-1}\vec{b}, a^{-1}R^{-1})$

$$\Leftrightarrow Y = (\vec{b}, aRa'R') (-a^{-1}R^{-1}\vec{b}, a^{-1}R^{-1})$$

$$\Leftrightarrow Y = (\vec{b} - aRa'R'a^{-1}R^{-1}\vec{b}, aRa'R'a^{-1}R^{-1})$$

$$\Leftrightarrow Y = (\vec{b} - a'R\vec{b}, a'R')$$

Constatons que  $Y$  n'appartient nécessairement pas à  $(0, \mathbb{R}_+^* \times SO(2))$ .

Ce qui traduit que  $\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  n'est pas invariant dans  $SIM(2)$ .  $\blacksquare$

### Proposition 3.7

$$\mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}_+^* \times SO(2) = I_d$$

En effet, soit  $X \in \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$

i.e  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $X \in \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$ . Alors  $\exists \vec{b} \in \mathbb{R}^2$  et  $aR \in \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  /  $X = \vec{b}$  et  $X = aR$  ;

i.e  $X = (\vec{b}, I)$  et  $X = (0, aR)$  ;

i.e  $(\vec{b}, I) = (0, aR)$  ; i.e  $\vec{b} = \vec{0}$  et  $aR = I$  ; i.e  $X = (0, I)$ .

Remarquons que l'intersection de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  est l'identité.

$$\text{i.e } \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}_+^* \times SO(2) = I_d. \blacksquare$$

### Proposition 3.8

$SIM(2)/\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  est le grand quotient de  $SIM(2)$  qui soit commutatif.

En effet, soient  $(\vec{b}, aR)$  et  $(\vec{b}', a'R')$  éléments de  $\mathbb{R}^2 \rtimes (\mathbb{R}_+^* \times SO(2))$ .

Le commutateur de  $(\vec{b}, aR)$  et  $(\vec{b}', a'R')$  est :

$$\begin{aligned} & (\vec{b}, aR)(\vec{b}', a'R')(\vec{b}, aR)^{-1}(\vec{b}', a'R')^{-1} \\ &= (\vec{b} + aR\vec{b}', aa'RR')(-a^{-1}R^{-1}\vec{b}, a^{-1}R^{-1})(-a'^{-1}R'^{-1}\vec{b}', a'^{-1}R'^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\vec{b} + aR\vec{b}' - aa'RR'a^{-1}R^{-1}\vec{b}, aa'RR'a^{-1}R^{-1})(-a'^{-1}R'^{-1}\vec{b}, a'^{-1}R'^{-1}) \\
&= (\vec{b} + aR\vec{b}' - a'R'\vec{b}, a'R')(-a'^{-1}R'^{-1}\vec{b}, a'^{-1}R'^{-1}) \\
&= (\vec{b} + aR\vec{b}' - a'R'\vec{b} - \vec{b}', I) \\
&= (\vec{v}, I) ; \text{ où } \vec{v} = \vec{b} + aR\vec{b}' - a'R'\vec{b} - \vec{b}'
\end{aligned}$$

Remarquons que  $(\vec{v}, I)$  vit bien dans  $\mathbb{R}^2$ . On conclut que le sous-groupe dérivé de  $SIM(2)$  est  $\mathbb{R}^2$ . D'où  $SIM(2)/\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_+^* \times SO(2)$  est le grand quotient de  $SIM(2)$  qui soit commutatif. ■

#### IV. CONCLUSION

A l'issue de cette étude, il est bien clair que  $SIM(2)$  est décomposable en produit semi-direct. Etant donné que le groupe est non commutatif, il est intéressant de pouvoir chercher son groupe fondamental. En même temps une autre étude pourrait consister à trouver un moyen de mettre sur ce groupe un commutateur afin d'y définir la structure de Lie.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANTOINE JP, et Alii, (2006), *Two-dimensional wavelets and their relations*, Cambridge university Press
- [2] ANTOINE JP; (2008) *Physique mathématique avancée II : Représentation de carré intégrable, états cohérents, ondelettes*, Université du Burundi.
- [3] BARTHES , P., et al. (1972), *Les mathématiques en terminale D*, Armand Colin
- [4] CONDAMINE, M. (1971), *Géométrie termines C-E*, Delagrave
- [5] CREM, (1987), *MATH 6<sup>ème</sup> Géométrie*, ECA, Kinshasa
- [6] DIEUDONNE, J., (1978), *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Boisseau, Toulouse
- [7] DONEDDU, A., (1979), *Nouveau cours de mathématiques : structures fondamentales*, tome I, Vuibert, Paris.
- [8] DUBREIL, P.,(1972), *Théorie des groupes : cours d'initiation* , Dunod, Paris
- [9] DUCROS A., (2008), *Le produit semi-direct, Préparation à l'agrégation de mathématique*, Université de Nice Sophia, Antipolis
- [10] KARGAPOLOV, M., et MERZIAKOV, L, (1985), *Eléments de la théorie des groupes*, Ed. MIR, Moscou
- [11] KOSTRIKIN, A. (1981), *Introduction à l'algèbre*, 2<sup>ème</sup> Ed. Ed MIR,, Moscou
- [12] QUEYSANNE, M., (1964), *Algèbre MP et spéciales AA'*, Armand Colin

- [13] ZUBER JB. (2005), *Introduction à la théorie des groupes et de leurs représentations*, Cedex, France