

# L'autoénergie d'une impureté dans un gaz parfait de Fermi au second ordre en l'interaction

Christian Trefzger et Yvan Castin

Laboratoire Kastler Brossel, École normale supérieure, CNRS et UPMC, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

**Résumé.** Nous considérons, en dimension trois, une impureté de masse  $M$  en interaction avec un gaz parfait spatialement homogène de fermions de masse  $m$ , polarisé de spin et de température nulle. L'interaction se produit exclusivement dans l'onde  $s$ , avec une longueur de diffusion  $a$  et une portée  $b$  négligeable devant le nombre d'onde de Fermi  $1/k_F$  du gaz. Elle transforme l'impureté de vecteur d'onde initial  $\mathbf{K}$  en une quasi-particule de vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  appelée polaron de Fermi, plus précisément ici un *monoméron*. À  $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ , la quasi-particule a une durée de vie finie dans son sous-espace d'impulsion initial, puisqu'elle peut rayonner des paires particule-trou dans la mer de Fermi, ce dont l'habituelle approche variationnelle (avec un nombre tronqué de telles paires) ne rend pas compte au voisinage de  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ . Aussi avons-nous recours à la théorie des perturbations dans la limite  $k_F a \rightarrow 0^-$ , ce qui exclut énergétiquement la branche diméronique et permet d'obtenir des résultats systématiques. De façon remarquable, nous obtenons une expression analytique totalement explicite pour  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$ , la fonction énergie propre ou *autoénergie* de l'impureté au second ordre en  $a$ . Ceci nous permet de montrer que la différentielle troisième de  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$  admet des lignes de singularité dans le plan  $(K, \omega)$ . Dans le cas de masses égales  $m = M$ , on peut même avoir des singularités dans la différentielle seconde, plus accessible expérimentalement ; à l'aide d'une approche heuristique auto-cohérente, tirant parti de notre connaissance de  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$ , nous parvenons alors à régulariser la dérivée seconde par rapport à  $K$  de l'énergie complexe  $\Delta E(\mathbf{K})$  de la quasi-particule, qui était divergente en  $K = k_F$  dans la référence [C. Trefzger, Y. Castin, Europhys. Lett. **104**, 50005 (2013)], et nous prédisons une intéressante loi d'échelle pour cette quantité au voisinage de  $K = k_F$ . Nous terminons par une retombée directe de notre théorie, le calcul par la règle d'or de Fermi de tous les moments de l'impulsion de la paire particule-trou émise par l'impureté en mouvement amorti dans la mer de Fermi.

PACS numbers: 03.75.Ss - Gaz de Fermi dégénérés

## 1. Introduction et motivations

Nous étudions ici, en dimension trois, le problème d'une impureté mobile discernable de masse  $M$  interagissant élastiquement avec un gaz parfait de fermions de masse  $m$ , tous dans le même état de spin, à température nulle et dans la limite thermodynamique. La résolution de ce problème est une étape fondamentale dans la compréhension microscopique du concept de quasi-particule, à la base de la théorie dite des "liquides"

de Fermi, développée par Landau [1]. Elle permet d'illustrer les effets attendus résultant du couplage de l'impureté au réservoir que constitue la mer de Fermi : des effets réactifs déplaçant l'énergie réelle de l'impureté et changeant sa masse effective, et des effets dissipatifs présents lorsque l'impureté est en mouvement, et qui lui confèrent alors une durée de vie finie dans le canal d'impulsion initial considéré  $\hbar\mathbf{K}$ , l'impureté pouvant perdre de la quantité de mouvement par rayonnement de paires particule-trou dans la mer de Fermi. Ces deux effets peuvent être résumés par la notion d'énergie complexe  $\Delta E(\mathbf{K})$  comptée à partir de l'énergie de la mer de Fermi non perturbée.

Du point de vue du formalisme, ceci conduit naturellement à l'introduction de la fonction énergie propre ou (de façon néologique) de l'autoénergie  $\Sigma(\mathbf{K}, \omega)$ , ici de l'impureté, une fonction du vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  et d'une pulsation  $\omega$ , qui intervient dans l'équation de Dyson satisfaite par la transformée de Fourier spatiotemporelle  $\mathcal{G}(\mathbf{K}, \omega)$  de la fonction de Green à deux points, et qui est donc une brique élémentaire des méthodes diagrammatiques du problème à  $N$  corps [2]. En effet, l'énergie complexe  $\Delta E(\mathbf{K})$  susmentionnée, après division par  $\hbar$ , doit être un pôle du prolongement analytique de la fonction  $\omega \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{K}, \omega)$  au demi-plan complexe inférieur.

Notre problème à une impureté jouit bien entendu d'une longue histoire. Il a émergé dans un contexte de physique nucléaire, dans le cas d'une particule  $\Lambda$  en interaction avec une mer de Fermi de nucléons [3, 4] via un potentiel de sphère dure de rayon  $a > 0$ . Les résultats, obtenus par resommation de diagrammes dans le formalisme de la matrice  $T$ , sont limités à  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$  mais le développement en puissances de  $k_F a$  a été, de manière remarquable, poussé jusqu'à l'ordre quatre [5],  $k_F$  étant ici le nombre d'onde de Fermi.

Récemment, le problème connaît un très net regain d'intérêt grâce aux expériences menées sur les atomes froids, l'impureté étant un atome de même espèce chimique que les fermions, mais dans un état de spin différent [6, 7], ou carrément un atome d'une autre espèce chimique [8]. Les expériences de la référence [7] s'interprètent alors très bien par le fait que la fraction d'atomes dans l'état de spin minoritaire, lorsqu'elle est assez petite, constitue un "liquide" de Fermi, c'est-à-dire finalement un gaz presque parfait de quasi-particules fermioniques, mais dont l'énergie interne et la masse effective ont été modifiées par interaction avec la mer de Fermi dans l'état de spin majoritaire, comme le propose la théorie [9, 10] et comme le confirment des mesures très précises de l'équation d'état des gaz polarisés de spin [11, 12].

D'un point de vue théorique, la modélisation des interactions appropriée aux atomes froids diffère fortement de celle à base de sphères dures des premières références [3, 4, 5]. En effet, dans le cas des atomes et pour les expériences précitées, l'interaction entre une impureté et un fermion est résonnante dans l'onde  $s$ , et négligeable dans les autres ondes partielles. Ceci signifie que la longueur de diffusion  $a$  dans l'onde  $s$  est bien plus grande, en valeur absolue, que la portée  $b$  de l'interaction, et peut avoir un signe arbitraire, deux caractéristiques étrangères aux sphères dures. On peut même tendre expérimentalement vers la limite unitaire  $1/a = 0$  grâce à l'étonnant outil des résonances de Feshbach [13]. Dans ce régime résonnant  $|a| \gg b$ , on s'attend à ce que le potentiel d'interaction soit caractérisé par la longueur de diffusion seulement, à l'exclusion de tout

autre détail microscopique (sur sa dépendance en position par exemple), auquel cas on parle d'*universalité à un paramètre*, et l'on est conduit théoriquement à faire tendre la portée  $b$  du potentiel vers zéro à longueur de diffusion fixée, dans tout modèle à notre convenance. En réalité, cette universalité à un paramètre n'a rien d'automatiquement acquis. Elle est mise en défaut lorsque le rapport de masse  $m/M$  est trop grand, auquel cas l'interaction attractive effective induite par l'impureté légère entre les fermions conduit à l'effet Efimov à trois corps, de rapport critique  $m/M \simeq 13,607$  [14, 15, 16], mais aussi à l'effet Efimov à quatre corps, de rapport critique  $m/M \simeq 13,384$  [17]. En présence d'un tel effet Efimov, il faut introduire des paramètres supplémentaires à trois corps, à quatre corps, pour caractériser l'interaction, et le spectre d'énergie n'est pas borné inférieurement dans la limite de portées réelles et effective nulles, ce qui constitue l'effet Thomas [18]. À ce jour, une condition nécessaire et suffisante sur le rapport de masse interdisant tout effet Efimov, y compris à la limite thermodynamique, n'est pas encore connue [19], mais nous la supposons vérifiée ici.

Dans ce contexte des atomes froids, une avancée conceptuelle importante a été de réaliser que notre problème à une impureté appartient à la classe générale des systèmes polaroniques [20]. Par analogie avec la physique du solide, dans laquelle le polaron est un électron habillé par les phonons (bosoniques) décrivant quantiquement la déformation du réseau cristallin induit par interaction électromagnétique avec la charge électronique, l'impureté constitue un polaron de Fermi, puisqu'elle est habillée par les paires particule-trou induites par son interaction, cette fois à courte portée, avec les fermions. La situation est en fait très riche, car plusieurs classes de polarons peuvent exister, suivant que la quasi-particule se construise par habillage par des paires de particule-trou de l'impureté nue elle-même [9, 10], ou d'un état lié à deux corps (dimère) entre l'impureté et une particule fermionique préexistant dans l'espace libre [20, 21, 22, 23], ou même d'un état lié à trois corps (trimère) entre l'impureté et deux particules fermioniques [24]. En systématisant la terminologie de la référence [25], on peut alors parler de monoméron, diméron ou triméron, pour souligner le caractère de quasi-particule de l'objet considéré ; on peut parler aussi d'atome, de dimère ou de trimère habillé comme dans l'article de revue [26]. L'avantage de la première terminologie apparaît dans le cas plus surprenant où la liaison entre l'impureté et un petit nombre de fermions ne préexiste pas dans le vide mais est elle-même induite par la présence de la mer de Fermi. C'est le cas des trimérons de la référence [24], et des dimérons à  $a < 0$  sur une résonance de Feshbach étroite [25, 27, 28] ; dans ce dernier cas, voir la conclusion de [25] pour une interprétation physique.

Limitons-nous ici, et dans tout ce qui suit, à la branche monoméronique, en considérant le cas d'une longueur de diffusion négative  $a < 0$  sur une résonance de Feshbach large (donc de portées réelle et effective négligeables) ; la branche diméronique est alors une branche excitée [20] instable [29] ‡. À ce jour, le problème à une impureté avec interaction résonnante a été traité analytiquement, essentiellement à vecteur d'onde

2. Rappelons que l'énergie du dimère tend vers  $-\infty$  comme  $-\hbar^2/(2\mu a^2)$  lorsque  $a \rightarrow 0^+$ ,  $\mu$  étant la masse réduite de l'impureté et d'un fermion, et qu'il n'y a pas de dimère à  $a < 0$ .

nul  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ , par une approche variationnelle non perturbative qui tronque l'espace de Hilbert en gardant au plus  $n$  paires particule-trou, mais sans limitation sur leurs états possibles. Cette approche a été lancée par la référence [9] (voir aussi [30]), avec  $n = 1$ ; à  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ , l'énergie  $\Delta E(\mathbf{0})$  est réelle, et la valeur approchée prédite  $\Delta E^{[1]}(\mathbf{0})$  donne une borne supérieure sur  $\Delta E(\mathbf{0})$ , ce qui a suffi à établir l'existence d'une phase de type "liquide" de Fermi dans un gaz fortement polarisé à la limite unitaire  $1/a = 0$  [9]. Dans ce cas assez spectaculaire d'interactions fortes, il n'y a *a priori* pas de petit paramètre permettant de contrôler la précision de l'ansatz variationnel de [9]; le fait que le résultat soit identique à celui d'une utilisation non perturbative (donc non systématique) du formalisme de la matrice  $T$  (dans l'approximation des échelles) [30, 31] ne permet pas plus de démontrer la fiabilité du résultat. Il a été compris cependant que l'étude semi-analytique systématique pour des  $n$  croissants (limitée en pratique à  $n = 2$ ) est une stratégie gagnante, et qu'elle permet de vérifier explicitement, dans le cas considéré, la rapide convergence de la suite  $\Delta E^{[n]}(\mathbf{0})$  [32, 31] vers les résultats numériques de Monte-Carlo diagrammatique de la référence [20].

Cependant, nous nous concentrons dans ce travail sur le cas plus original d'une impulsion totale non nulle,  $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ , encore peu défriché (voir cependant la référence [33] pour de grandes valeurs de  $K$ ). Le problème change alors de nature et le monoméron devient une résonance d'énergie complexe  $\Delta E(\mathbf{K})$  [4]; la quasi-particule en mouvement est en effet instable par rayonnement de paires particule-trou [34] puisque l'énergie cinétique et l'impulsion emportées par ces dernières peuvent être, rappelons-le, aussi proches de zéro que l'on veut. L'approche variationnelle change aussi de statut : non seulement elle ne fournit plus de borne supérieure sur la partie réelle de l'énergie  $\Re \Delta E(\mathbf{K})$ , mais elle prédit un intervalle non physique de valeurs de  $K$ , commençant en 0, sur lequel la partie imaginaire de l'énergie  $\Im \Delta E(\mathbf{K})$  vaut exactement zéro [35] [le même phénomène se produit pour le diméron en dimension deux, voir [36]]. Ceci contredit explicitement le résultat perturbatif de la référence [4] obtenu pour  $M = m$  au second ordre inclus en  $k_F a$ , qui donne une  $\Im \Delta E(\mathbf{K})$  s'annulant continûment en  $K^4$  lorsque  $\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{0}$ , et c'est plus généralement en désaccord avec la théorie des "liquides" de Fermi [34].

Cette déconfiture de l'approche variationnelle à  $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$  peut être facilement comprise en resituant le problème à une impureté dans le contexte général d'un état discret couplé à un continuum [37], comme il est fait dans la référence [25]. L'état discret correspond à l'impureté de vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  en présence de la mer de Fermi non perturbée; son énergie (comptée à partir de celle de la mer de Fermi) est donc l'énergie cinétique de l'impureté  $\hbar^2 K^2 / (2M)$ . Le continuum est constitué de paires particule-trou d'impulsions quelconques dans l'espace de Fourier, en présence de l'impureté dans l'état de vecteur d'onde idoine (assurant la conservation de l'impulsion totale). (i) Dans un traitement exact du problème, on voit bien que le continuum contient en particulier un monoméron d'impulsion totale arbitrairement faible, donc d'énergie  $\simeq \Delta E(\mathbf{0})$ , que l'on peut imaginer comme une perturbation du gaz de fermions relativement localisée au voisinage d'un point dans l'espace réel [38], en présence de paires particule-trou

rayonnées à l'infini et qui emportent l'impulsion manquante, sans que cela coûte nécessairement une énergie significative. Une particule et un trou de vecteurs d'onde respectivement  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{q}$  peuvent en effet emporter une impulsion de module jusqu'à  $2k_F$  avec une énergie cinétique positive négligeable  $\hbar^2(k^2 - q^2)/(2m)$  lorsque  $k \rightarrow k_F^+$  et  $q \rightarrow k_F^-$ . Le bord inférieur du continuum correspond donc à l'énergie exacte  $\Delta E(\mathbf{0})$ , d'ailleurs ici négative. Le couplage entre l'état discret et le continuum conduit bien en général le premier à se diluer dans le second pour donner naissance à une résonance, et  $\Im \Delta E(\mathbf{K}) < 0$  à  $K > 0$ . (ii) Dans le traitement variationnel du problème, limité à au plus  $n$  paires particule-trou, on s'attend à ce que le continuum commence à l'énergie  $\Delta E^{[n-1]}(\mathbf{0})$ , puisqu'au moins une paire doit être rayonnée à l'infini pour amener le monoméron au repos. Or ceci est strictement supérieur à  $\Delta E^{[n]}(\mathbf{0})$ , selon l'habituel raisonnement variationnel ; à  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ , le couplage de l'état discret au continuum semble ainsi faire apparaître un état discret d'énergie  $\Delta E^{[n]}(\mathbf{0})$  séparée du continuum par une bande interdite artificielle de largeur  $\Delta E^{[n-1]}(\mathbf{0}) - \Delta E^{[n]}(\mathbf{0})$ . Si tel est le cas,  $\Delta E^{[n]}(\mathbf{K})$  devrait rester exactement réel sur un voisinage de  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ , heureusement d'autant plus étroit que  $n$  est grand, mais sans que cela ait la moindre signification physique. Ce scénario plausible est confirmé par le calcul explicite effectué pour  $n = 1$  dans la référence [25], si l'interaction est suffisamment faible : à  $M/m$  fini fixé, on trouve bien que le continuum commence à l'énergie  $\Delta E^{[0]}(\mathbf{0}) = 0$ , pourvu que  $k_F a$ , négatif, soit assez proche de zéro pour ne pas satisfaire à l'équation (24) de cette référence. Ceci a été utilisé pour estimer la valeur non physique du module de  $\mathbf{K}$  sous laquelle  $\Im \Delta E^{[1]}(\mathbf{K}) = 0$  [35].

L'approche variationnelle étant hors jeu à  $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ , la boîte à outils autres que numériques du théoricien se trouve fort dépourvue. Nous nous rabattons donc sur la seule méthode fiable et systématique, l'approche perturbative, ici jusqu'au second ordre inclus en  $k_F a$ , dans l'esprit des articles fondateurs [3, 4, 5]. Cependant, au lieu de l'interaction de sphère dure, nous utilisons un modèle sur réseau cubique de pas  $b$ , de type modèle de Hubbard, avec une interaction (ici attractive) sur site de constante de couplage nue  $g_0$  ajustée, en fonction de  $b$ , pour reproduire exactement la longueur de diffusion souhaitée. Ce modèle, initialement introduit dans le cas d'un gaz de bosons en interaction faible sous une forme embryonnaire dans [39] puis définitive dans [40], a connu depuis un certain succès dans le cas des fermions de spin 1/2, y compris dans le régime d'interaction forte [41, 42, 43]. Nous développons alors l'autoénergie  $\Sigma(\mathbf{K}, \omega)$  jusqu'à l'ordre deux en  $k_F a$ , à  $b$  fixé, puis nous passons à la limite d'un espace continu  $b \rightarrow 0$  dans les coefficients du développement. Le point central est que toutes les intégrales correspondantes dans l'espace de Fourier peuvent être calculées analytiquement, si bien que des formules explicites peuvent être obtenues pour  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$ . Nous donnons ces formules à  $\omega$  quelconque et pour un rapport de masse  $M/m$  quelconque entre l'impureté et les fermions. L'ordre opposé des limites ( $b \rightarrow 0$  à longueur de diffusion fixée, puis  $k_F a \rightarrow 0^-$ ) conduirait au même résultat, en vertu de l'universalité à un paramètre mentionnée plus haut et de l'absence à  $a < 0$  d'effets essentiellement non perturbatifs (comme l'émergence d'un dimère à la limite de portée nulle à  $a > 0$ ), mais au prix d'un dispendieux recours à la resommation non perturbative des diagrammes en échelle

comme dans [5].

À l'ordre deux en  $k_F a$  considéré ici, nous retrouvons alors pour  $\Delta E(\mathbf{0})$  à la limite de portée nulle exactement les mêmes résultats que ceux de Bishop [5] pour l'interaction de sphère dure, après leur transposition directe du cas  $a > 0$  au cas  $a < 0$ . Ceci sans trop de surprise, puisqu'il est bien connu que la portée non nulle (d'ordre  $a$ ) de l'interaction de sphère dure n'intervient qu'à l'ordre suivant : l'amplitude de diffusion à deux corps  $f_k = -1/[a^{-1} + ik - k^2 r_e/2 + O(k^3 a^2)]$  pour le potentiel de sphère dure, de portée effective  $r_e = 2a/3$ , diffère de celle  $f_k = -1/(a^{-1} + ik)$  de l'interaction de portée nulle par des termes d'ordre au moins trois, en  $O(a^3 k^2)$ , lorsque  $a \rightarrow 0$  à nombre d'onde relatif  $k$  fixé entre un fermion et l'impureté.

À  $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ , en revanche, nos expressions de  $\Delta E^{(2)}(\mathbf{K})$  sont originales. Elles ont déjà été présentées brièvement dans la référence [35], qui en démontre l'observabilité par spectroscopie de radio-fréquence des atomes froids [8] mais n'en donne aucun détail de dérivation, au contraire du présent travail dont c'est une des motivations. Mais la connaissance de  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$  en fonction de  $\omega$  nous permet aussi d'aller au-delà et, grâce à une équation heuristique auto-cohérente sur l'énergie complexe  $\Delta E(\mathbf{K})$ , de régulariser la divergence logarithmique de la dérivée seconde par rapport à  $K$  de  $\Delta E(\mathbf{K})$ , prédite par la théorie perturbative pour des masses égales ( $M = m$ ) à la surface de Fermi ( $K = k_F$ ) [35].

Cet article fleuve est divisé comme suit. Après une écriture formelle et peut-être inhabituelle de la fonction énergie propre  $\Sigma(\mathbf{K}, \omega)$  en termes de la résolvante du Hamiltonien, en section 2, nous la développons jusqu'au second ordre inclus en la constante de couplage  $g$  et exprimons aisément le résultat sous forme d'une intégrale simple, voir la section 3, que nous parvenons ensuite à calculer explicitement à l'issue d'une section 4 assez technique. Nous en récoltons des fruits assez formels en section 5, en identifiant les singularités des dérivées troisièmes dans le plan  $(K, \omega)$  de l'autoénergie (limitée au second ordre en  $g$ ), qui sont le pendant à  $\omega \neq 0$  des singularités des dérivées par rapport à  $K$  de l'énergie complexe (limitée au second ordre en  $g$ ) de la référence [35]. Nous avons gardé le meilleur, c'est-à-dire les applications physiques, pour la section 6 : après avoir retrouvé les résultats perturbatifs de la référence [35], nous y mettons explicitement en œuvre l'approche auto-cohérence susmentionnée, et nous prédisons une loi d'échelle non perturbative pour le comportement de  $\frac{d^2}{dK^2} \Delta E(\mathbf{K})$  au voisinage de la surface de Fermi pour des masses égales et lorsque  $g \rightarrow 0^-$  ; dans un autre registre, nous montrons comment nos techniques de calcul intégral permettent d'accéder à tous les moments de l'impulsion de paire particule-trou rayonnée par l'impureté dans la mer de Fermi dans l'approximation de la règle d'or de Fermi, ce qui nous fournit non seulement le taux d'amortissement de l'impulsion de l'impureté, dans l'esprit de [34], mais aussi son coefficient de diffusion, dans l'esprit de [50], certes au second ordre en  $g$  mais, contrairement aux références [34, 50], pour une impulsion quelconque. Nous concluons en section 7.



## 2. Définition de $\Sigma(\mathbf{K}, \omega)$ et lien avec la résolvante du Hamiltonien

Nous effectuons ici quelques rappels généraux sur l'approche bien connue des fonctions de Green à  $N$  corps [2], pour un système spatialement homogène avec des conditions aux limites périodiques mais indépendamment du modèle d'interaction considéré, puis nous établissons les liens, peut-être moins bien connus, de ce formalisme avec la résolvante et les notions de Hamiltonien effectif et d'opérateur déplacement, plus habituelles en physique atomique [37]. Les variables et opérateurs de l'impureté seront distingués de ceux des fermions par l'usage de lettres majuscules pour ces premiers, et de lettres minuscules pour ces derniers.

Le cas exploré ici est celui de la température nulle. La fonction de Green à une impureté est alors définie dans le point de vue de Feynman [2] par

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}, t; \mathbf{R}', t') \equiv (i\hbar)^{-1} \langle \phi_0 | \hat{T} [\hat{\Psi}(\mathbf{R}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{R}', t')] | \phi_0 \rangle \quad (1)$$

où le vecteur d'état  $|\phi_0\rangle$  est l'état fondamental des  $N$  fermions en l'absence d'impureté (une simple mer de Fermi),  $\hat{\Psi}(\mathbf{R}, t)$  est l'opérateur champ de l'impureté au point  $\mathbf{R}$  à l'instant  $t$  en représentation de Heisenberg, et l'opérateur  $\hat{T}$ , dit du T-produit, ordonne les facteurs dans l'ordre chronologique de droite à gauche, avec multiplication par la signature de la permutation correspondante si le champ  $\hat{\Psi}$  est fermionique. Comme il n'y a qu'une seule impureté, on voit bien que sa statistique quantique n'importe pas et que la fonction de Green est nulle pour  $t < t'$ , si bien qu'elle est à la fois de Feynman et retardée :

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}, t; \mathbf{R}', t') = (i\hbar)^{-1} Y(t - t') \langle \phi_0 | \hat{\Psi}(\mathbf{R}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{R}', t') | \phi_0 \rangle \quad (2)$$

avec  $Y$  l'habituelle fonction de Heaviside. Comme le second membre ne dépend que de  $\mathbf{R} - \mathbf{R}'$  et que de  $t - t'$ , par homogénéité spatiale et stationarité de la mer de Fermi sous évolution libre, nous en prenons la transformée de Fourier spatio-temporelle par rapport à  $\mathbf{R} - \mathbf{R}'$  et  $t - t'$  §, avec l'habituel régularisateur  $\exp[-\epsilon(t - t')/\hbar]$ ,  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , pour obtenir le propagateur  $\mathcal{G}(\mathbf{K}, \omega)$ . Par définition de l'autoénergie  $\Sigma$ , dite propre dans [2], on a d'une part l'équation de Dyson

$$\mathcal{G}(\mathbf{K}, \omega) = [\hbar\omega + i\epsilon - E_{\mathbf{K}} - \Sigma(\mathbf{K}, \omega)]^{-1} \quad (3)$$

avec la fonction énergie cinétique de l'impureté,

$$E_{\mathbf{K}} = \frac{\hbar^2 K^2}{2M} \quad (4)$$

Par un calcul explicite, et parce que l'opérateur d'évolution pendant  $t$  du système complet de Hamiltonien  $\hat{H}$  vaut  $\exp(-i\hat{H}t/\hbar)$ , on obtient d'autre part

$$\mathcal{G}(\mathbf{K}, \omega) = \langle \psi_{\mathbf{K}}^0 | \hat{G}(\hbar\omega + i\epsilon + e_0(N)) | \psi_{\mathbf{K}}^0 \rangle \quad \text{où} \quad | \psi_{\mathbf{K}}^0 \rangle = \hat{C}_{\mathbf{K}}^\dagger | \phi_0 \rangle \quad (5)$$

avec  $e_0(N)$  l'énergie de l'état fondamental des  $N$  fermions non perturbés,  $\hat{C}_{\mathbf{K}}^\dagger$  l'opérateur de création d'une impureté de vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  et  $\hat{G}(z) \equiv (z\hat{1} - \hat{H})^{-1}$  l'opérateur résolvante du Hamiltonien complet  $\hat{H}$ .

3. Notre convention est que la transformée de Fourier spatio-temporelle de  $f(x, t)$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  est  $\tilde{f}(k, \omega) = \int dt \int dx f(x, t) \exp[-i(kx - \omega t)]$ .

Le lien établi par les équations (3,5) entre l'autoénergie et la résolvante est un pont entre deux mondes, le problème à  $N$  corps en physique de la matière condensée et celui de la physique atomique, où l'on parle plus volontiers de Hamiltoniens effectifs et de déplacements d'énergie complexes. Ce lien est rendu explicite par la méthode des projecteurs [37]. Prenons pour  $\hat{P}$  le projecteur orthogonal sur  $|\psi_{\mathbf{K}}^0\rangle$ , c'est-à-dire sur l'état non perturbé de l'impureté de vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  et de la mer de Fermi. Dans le sous-espace correspondant de dimension un, on définit le Hamiltonien effectif, non hermitien et dépendant comme la résolvante paramétriquement d'une énergie complexe  $z$ , par les relations exactes et générales

$$\hat{P}\hat{G}(z)\hat{P} = \frac{\hat{P}}{z\hat{P} - \hat{H}_{\text{eff}}(z)} \text{ et } \hat{H}_{\text{eff}}(z) \equiv \hat{P}\hat{H}\hat{P} + \hat{P}\hat{H}\hat{Q} \frac{\hat{Q}}{z\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H}\hat{Q}} \hat{Q}\hat{H}\hat{P} \quad (6)$$

où  $\hat{Q} = \hat{1} - \hat{P}$  est le projecteur supplémentaire orthogonal de  $\hat{P}$ . Dans notre cas,  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ , où  $\hat{H}_0$ , le Hamiltonien cinétique des particules, commute avec  $\hat{P}$ , et  $\hat{V}$  est le Hamiltonien d'interaction impureté-fermion. Nous aboutissons à une expression opératorielle explicite de la fonction énergie propre, en termes de l'opérateur déplacement  $\hat{R}$  de la référence [37] directement remplacé ici par sa définition :

$$\Sigma(\mathbf{K}, \omega) = \langle \psi_{\mathbf{K}}^0 | \hat{V} | \psi_{\mathbf{K}}^0 \rangle + \langle \psi_{\mathbf{K}}^0 | \hat{V} \hat{Q} \frac{\hat{Q}}{\hbar\omega + i\epsilon + e_0(N) - \hat{Q}\hat{H}\hat{Q}} \hat{Q} \hat{V} | \psi_{\mathbf{K}}^0 \rangle \quad (7)$$

ce qui permet le développement de  $\Sigma(\mathbf{K}, \omega)$  en puissances de  $\hat{V}$  sans avoir recours à une représentation diagrammatique.

### 3. Expression de $\Sigma(\mathbf{K}, \omega)$ jusqu'au second ordre en $g$ sous forme d'une intégrale simple

#### 3.1. Le modèle sur réseau et résultat sous forme d'une intégrale multiple

Pour décrire une interaction de portée nulle et de longueur de diffusion fixée  $a$  entre l'impureté et un fermion, il n'est pas possible en dimension trois de prendre directement l'habituel modèle en delta de Dirac,  $V_{\delta} = g\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r})$ , de constante de couplage effective

$$g = \frac{2\pi\hbar^2 a}{\mu}, \quad (8)$$

$\mu = mM/(m + M)$  étant la masse réduite, sauf pour un traitement limité à l'approximation de Born. D'habitude, on donne un sens à ce modèle en introduisant une coupure sur les vecteurs d'onde relatifs des deux particules (surtout pas sur les vecteurs d'onde de chaque particule [44]), coupure que l'on fait ensuite tendre vers l'infini [31]. Mais nous adoptons ici une solution plus physique, consistant à remplacer le delta de Dirac par le symbole de Kronecker également noté  $\delta$ , c'est-à-dire à passer à un modèle sur réseau cubique, décrit en détail dans les comptes-rendus d'une école des Houches [45], dans lequel l'espace est discrétisé selon chaque direction cartésienne avec un pas  $b$ , sous-multiple de la période  $L$  des conditions aux limites périodiques. Les vecteurs d'onde des particules ont alors un sens modulo  $2\pi/b$  selon chaque direction, ce qui permet de les



restreindre à la première zone de Brillouin du réseau,  $\text{PZB} = [-\pi/b, \pi/b]^3$ , et fournit une coupure naturelle ; ils décrivent donc l'ensemble  $\mathcal{D} = \text{PZB} \cap (2\pi/L)\mathbb{Z}^3$ . Le Hamiltonien complet  $\hat{H}$  est somme de l'énergie cinétique des particules  $\hat{H}_0$  et de l'énergie d'interaction sur site  $\hat{V}$ . D'une part,

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{D}} E_{\mathbf{K}} \hat{C}_{\mathbf{K}}^\dagger \hat{C}_{\mathbf{K}} \quad (9)$$

où l'énergie cinétique d'un fermion de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ ,

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (10)$$

et l'opérateur d'annihilation  $\hat{c}_{\mathbf{k}}$  d'un tel fermion, sujet aux relations d'anticommutation canoniques du type  $\{\hat{c}_{\mathbf{k}}, \hat{c}_{\mathbf{k}'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ , sont les pendants fermioniques de l'énergie  $E_{\mathbf{K}}$  et de l'opérateur  $\hat{C}_{\mathbf{K}}$  introduits pour l'impureté à la section précédente. D'autre part,

$$\hat{V} = \sum_{\mathbf{r} \in [0, L]^3 \cap b\mathbb{Z}^3} g_0 \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{K}, \mathbf{K}' \in \mathcal{D}} \frac{g_0}{L^3} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{K}, \mathbf{k}'+\mathbf{K}'}^{\text{mod}} \hat{C}_{\mathbf{K}'}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}'}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{C}_{\mathbf{K}} \quad (11)$$

où l'opérateur champ  $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ , tel que  $\{\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}/b^3$ , est le pendant fermionique de celui  $\hat{\Psi}(\mathbf{R})$  de l'impureté,  $\delta^{\text{mod}}$  est un  $\delta$  de Kronecker modulo un vecteur du réseau réciproque  $(2\pi/b)\mathbb{Z}^3$ , et la constante de couplage nue  $g_0$  est ajustée pour que la longueur de diffusion de l'impureté sur un fermion, bien sûr définie pour le réseau infini ( $L = \infty$ ), ait la valeur souhaitée  $a$  arbitraire dans  $\mathbb{R}$  [45] :

$$g_0^{-1} = g^{-1} - \int_{\text{PZB}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{2\mu}{\hbar^2 k^2} \quad (12)$$

Déterminons l'autoénergie  $\Sigma(\mathbf{K}, \omega)$  perturbativement jusqu'au second ordre inclus en  $g$ , pour  $g < 0$ , comme il est abondamment expliqué dans l'introduction. À pas du réseau  $b$  fixé, faisons tendre  $g$  vers zéro par valeurs négatives. Alors  $g_0$  tend vers zéro,

$$g_0 \stackrel{a/b \rightarrow 0}{=} g + g^2 \int_{\text{PZB}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{2\mu}{\hbar^2 k^2} + O(g^3) \quad (13)$$

Dans la relation (7), nous pouvons à cet ordre négliger  $\hat{V}$  au dénominateur. L'action de  $\hat{V}$  sur l'état non perturbé  $|\psi_{\mathbf{K}}^0\rangle$  crée un trou de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$  dans la mer de Fermi par excitation d'un fermion dans l'état de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  ; l'impureté encaisse le changement d'impulsion et se retrouve avec le vecteur d'onde  $\mathbf{K} - \mathbf{k} + \mathbf{q}$  (modulo un vecteur du réseau réciproque). Dans l'expression de  $\Sigma(\mathbf{K}, \omega)$  obtenue, nous remplaçons  $g_0$  par son expression développée (13) puis nous passons à la limite continue  $b \rightarrow 0$  à  $g$  fixé. Il reste à prendre la limite thermodynamique pour obtenir le développement perturbatif exact :

$$\Sigma(\mathbf{K}, \omega) = \Sigma^{(1)}(\mathbf{K}, \omega) + \Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega) + O(g^3) \quad (14)$$

avec, jusqu'à l'ordre deux :

$$\Sigma^{(1)}(\mathbf{K}, \omega) = \rho g \quad (15)$$

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega) = g^2 \int_{q < k_F} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2 k^2} - \frac{Y(k - k_F)}{F_{\mathbf{k}, \mathbf{q}}(\mathbf{K}, \omega)} \right] \quad (16)$$

où l'on a rendu l'écriture plus compacte comme dans [35] grâce à la notation

$$F_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{K}, \omega) \equiv E_{\mathbf{K}-\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{q}} - \hbar\omega - i\epsilon \quad (17)$$

Sans surprise, la contribution d'ordre un se réduit au déplacement d'énergie de champ moyen, qui fait intervenir la densité moyenne  $\rho$  des fermions ou leur nombre d'onde de Fermi  $k_F$  :

$$\rho = \int_{q < k_F} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{k_F^3}{6\pi^2} \quad (18)$$

De façon remarquable, nous allons montrer dans la suite que l'intégrale sextuple dans la contribution d'ordre deux peut être évaluée analytiquement de manière explicite.

Mais avant cela, notons que rien n'empêche *a priori* de poursuivre le développement de  $g_0$  et de  $\Sigma(\mathbf{K}, \omega)$  en puissances de  $g$ , au prix de l'obtention d'intégrales peut-être difficiles à calculer autrement que numériquement. Nous donnons ici à titre d'exemple le résultat à l'ordre trois :

$$\begin{aligned} \Sigma^{(3)}(\mathbf{K}, \omega) = & g^3 \int_{q < k_F} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{2\mu}{\hbar^2 k^2} - \frac{Y(k - k_F)}{F_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{K}, \omega)} \right] \right\}^2 \\ & - g^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \int_{q < k_F} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{Y(k - k_F)}{F_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{K}, \omega)} \right]^2 - \frac{\rho g}{\hbar} \partial_\omega \Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega) \quad (19) \end{aligned}$$

qui découle d'une triple action de  $\hat{V}$  sur l'état non perturbé  $|\psi_{\mathbf{K}}^0\rangle$ , avec retour obligé à  $|\psi_{\mathbf{K}}^0\rangle$ . La première action de  $\hat{V}$  crée une paire particule-trou de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{q}$ . La deuxième action de  $\hat{V}$  ne peut ni faire revenir à l'état initial (à cause du projecteur  $\hat{Q}$  dans l'équation (7)), ni créer une seconde paire particule-trou (car la troisième action de  $\hat{V}$  ne peut détruire deux paires). Elle fait donc (i) diffuser le fermion excité de  $\mathbf{k}$  à  $\mathbf{k}'$  avec une amplitude  $g_0$  ou (ii) diffuser le trou de  $\mathbf{q}$  à  $\mathbf{q}'$  avec une amplitude  $-g_0$ , par collision avec l'impureté, ou alors (iii) elle ne change rien du tout (terme  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$  et  $\mathbf{K}' = \mathbf{K}$  dans l'équation (11)); ceci donne naissance respectivement au premier, au deuxième et au troisième terme de l'équation (19), les intégrales sur  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}'$ , ou sur  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{q}'$ , dont l'intégrande est symétrique sous l'échange des vecteurs d'onde, conduisant au carré d'une intégrale sur  $\mathbf{k}$ , ou sur  $\mathbf{q}$ .

### 3.2. Passage d'une intégrale sextuple à une intégrale simple pour $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$

Nous détaillons ici, étape par étape, la réduction de l'intégrale multidimensionnelle donnant  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$  dans l'équation (16).

Tout d'abord, il est commode d'adimensionner les vecteurs d'onde par le nombre d'onde de Fermi, l'écart de l'énergie  $\hbar\omega$  à l'énergie cinétique  $E_{\mathbf{K}}$  de l'impureté par l'énergie de Fermi  $\epsilon_F \equiv \hbar^2 k_F^2 / (2m)$  des fermions,

$$\bar{\mathbf{K}} \equiv \frac{\mathbf{K}}{k_F}, \quad \bar{\mathbf{q}} \equiv \frac{\mathbf{q}}{k_F}, \quad \bar{\mathbf{k}} \equiv \frac{\mathbf{k}}{k_F}, \quad \varepsilon \equiv \frac{E_{\mathbf{K}} - \hbar\omega}{\epsilon_F} \quad (20)$$

et la composante de l'autoénergie du second ordre en  $g$  par  $(\rho g)^2 / \epsilon_F$  :

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega) \equiv \frac{(\rho g)^2}{\epsilon_F} \bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{\mathbf{K}}, \varepsilon) \quad (21)$$

Quant à la masse de l'impureté, on l'exprime en unités de la masse d'un fermion par le nombre sans dimension

$$r \equiv \frac{M}{m} \quad (22)$$

Ensuite, l'invariance par rotation de  $\mathbf{K} \mapsto \Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$ , déjà prise en compte dans l'écriture (21), autorise à moyenne l'équation (16) sur la direction  $\hat{\mathbf{K}}$  du vecteur d'onde de l'impureté. À  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{q}$  fixés, le développement de  $F_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{K}, \omega)$  en puissances de  $\mathbf{K}$  nous ordonne d'introduire les coordonnées sphériques d'axe polaire la direction de  $\mathbf{k} - \mathbf{q}$ ; l'intégrande dépend alors seulement du cosinus directeur polaire  $w$  de  $\hat{\mathbf{K}}$ , si bien que :

$$\left\langle \frac{\hbar^2 k_F^2 / (2M)}{F_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{K}, \omega)} \right\rangle_{\hat{\mathbf{K}}} = \int_{-1}^1 \frac{dw}{2} \frac{1}{x - yw - i\epsilon} \quad (23)$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2y} \ln \frac{|x+y|}{|x-y|} + \frac{i\pi}{2y} [Y(x+y) - Y(x-y)] \equiv f(x, y) \quad (24)$$

où l'on a posé

$$\lambda \equiv |\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}}|, \quad x \equiv \lambda^2 + r(\bar{k}^2 - \bar{q}^2 + \epsilon) \in \mathbb{R}, \quad y \equiv 2\bar{K}\lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (25)$$

et où l'on a utilisé la primitive  $\frac{1}{2} \ln(v^2 + \epsilon^2) + i \arctan(v/\epsilon)$  de la fonction  $v \mapsto (v - i\epsilon)^{-1}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Dans l'intégration sur  $\mathbf{k}$  à  $\mathbf{q}$  fixé, on choisit de façon similaire l'axe polaire de direction  $\mathbf{q}$ , si bien que l'intégrande ne dépend que de l'angle polaire  $\theta$  entre  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{q}$ , pas de l'angle azimutal. Dans l'intégrale polaire, on utilise astucieusement la variable  $\lambda$  de l'équation (25) plutôt que  $\theta$  lui-même, avec

$$\sin \theta d\theta = \frac{\lambda d\lambda}{k\bar{q}} \quad (26)$$

Enfin, dans l'intégrale sur  $\mathbf{q}$ , qui est la plus extérieure, l'intégrande ne dépend plus de la direction de  $\mathbf{q}$ , ce qui fait sortir l'habituel facteur  $4\pi$  d'angle solide. Nous voilà réduit sans douleur à une intégrale triple :

$$\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \omega) = \frac{9r}{2} \int_0^1 \bar{q} d\bar{q} \int_0^{+\infty} \bar{k} d\bar{k} \int_{|\bar{k}-\bar{q}|}^{\bar{k}+\bar{q}} \lambda d\lambda \left[ \frac{1}{(1+r)\bar{k}^2} - Y(\bar{k}-1)f(x, y) \right] \quad (27)$$

où la fonction  $f$  est celle de l'équation (24). L'intégration sur  $\lambda$ , bien que faisable, est pénible car  $\lambda$  intervient dans  $f(x, y)$  sous une forme trinômiale, et la complexité du résultat compromet la suite; en revanche,  $\bar{k}$  et  $\bar{q}$  n'y interviennent que par leur carré. D'où l'idée d'invertir l'ordre d'intégration, comme dans la référence [38] : on effectue à part l'intégration complète sur le domaine  $\bar{k} < 1$ , et pour le reste on utilise

$$\int_0^1 d\bar{q} \int_1^{+\infty} d\bar{k} \int_{|\bar{k}-\bar{q}|}^{\bar{k}+\bar{q}} d\lambda = \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{\max(1-\lambda, 0)}^1 d\bar{q} \int_{\max(\lambda-\bar{q}, 1)}^{\lambda+\bar{q}} d\bar{k} \quad (28)$$

Tout ceci conduit à

$$\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \epsilon) = \frac{3r}{1+r} - \frac{9r}{2} \int_0^{+\infty} d\lambda \left[ \frac{\psi^+(\lambda) - \psi^-(\lambda)}{4\bar{K}} - \chi(\lambda) \right] \quad (29)$$

en termes des fonctions auxiliaires

$$\psi^\pm(\lambda) \equiv \int_{\max(1-\lambda,0)}^1 \bar{q} d\bar{q} \int_{\max(\lambda-\bar{q},1)}^{\lambda+\bar{q}} \bar{k} d\bar{k} u[\lambda^2 \pm 2\bar{K}\lambda + r(\bar{k}^2 - \bar{q}^2 + \varepsilon)] \quad (30)$$

$$\chi(\lambda) \equiv \int_{\max(1-\lambda,0)}^1 \bar{q} d\bar{q} \int_{\max(\lambda-\bar{q},1)}^{\lambda+\bar{q}} \bar{k} d\bar{k} \frac{\lambda}{(1+r)\bar{k}^2} \quad (31)$$

où  $\psi^-(\lambda)$  se déduit de  $\psi^+(\lambda)$  par simple changement de  $\bar{K}$  en  $-\bar{K}$ , et l'utile fonction

$$u(X) \equiv \ln |X| + i\pi Y(X), \quad (32)$$

dont la présence s'explique par la propriété  $2yf(x, y) = u(x+y) - u(x-y)$ , interviendra aussi *via* ses primitives  $u^{[n]}(X)$  d'ordre  $n$ , qui sont nulles en zéro ainsi que leurs  $n-1$  premières dérivées :

$$u^{[n]}(X) = \frac{X^n}{n!} \left[ u(X) - \sum_{s=1}^n \frac{1}{s} \right] \quad (33)$$

$u(X)$  est en fait la limite de la détermination habituelle de la fonction logarithme complexe  $\ln z$  lorsque  $z$  tend vers  $-X \in \mathbb{R}$  depuis le demi-plan complexe supérieur.

Décrivons le calcul de  $\psi^\pm(\lambda)$  dans ses grandes lignes. L'intégration sur  $\bar{k}$  est élémentaire lorsque l'on prend  $\bar{k}^2$  comme variable d'intégration. Elle fait directement apparaître la primitive  $u^{[1]}$ , évaluée en des points de la forme  $A\bar{q}^2 + B$  ou  $A\bar{q} + B$ , où les coefficients  $A$  et  $B$  ne dépendent pas de  $\bar{q}$ . L'intégration sur  $\bar{q}$  est donc confrontée soit à la forme  $\int d\bar{q} \bar{q} u^{[1]}(A\bar{q}^2 + B)$ , auquel cas on prend  $\bar{q}^2$  comme variable d'intégration et l'on fait apparaître  $u^{[2]}$ , soit à la forme  $\int d\bar{q} \bar{q} u^{[1]}(A\bar{q} + B)$ , auquel cas on utilise l'intégration par parties (en dérivant le facteur  $\bar{q}$ ) ce qui fait apparaître  $u^{[2]}$  puis  $u^{[3]}$ . En pratique, on est conduit à distinguer les cas (i)  $0 < \lambda < 1$ , de bornes inférieures  $1 - \lambda$  et  $1$  dans les intégrales sur  $\bar{q}$  et sur  $\bar{k}$ , (ii)  $1 < \lambda < 2$ , de bornes inférieures  $0$  pour  $\bar{q}$  et  $\lambda - \bar{q}$  (ou  $1$ ) pour  $\bar{k}$  selon que  $\bar{q}$  est inférieur (ou supérieur) à  $\lambda - 1$ , et (iii)  $\lambda > 2$ , de bornes inférieures  $0$  et  $\lambda - \bar{q}$ . Mais on constate finalement que les deux premiers cas conduisent aux mêmes expressions ||, si bien qu'il suffit de retenir l'intervalle  $[0, 2]$ , sur lequel

$$\psi^\pm(\lambda) = \frac{u^{[2]}[P_\gamma^\pm(\lambda)]}{4r^2} + \frac{u^{[2]}[P_\alpha^\pm(\lambda)] - u^{[2]}[P_\beta^\pm(\lambda)]}{4r^2\lambda} - \frac{u^{[3]}[P_\alpha^\pm(\lambda)] - u^{[3]}[P_\beta^\pm(\lambda)]}{8r^3\lambda^2} \quad (34)$$

et l'intervalle  $[2, +\infty[$ , sur lequel

$$\psi^\pm(\lambda) = \frac{u^{[2]}[P_\alpha^\pm(\lambda)] + u^{[2]}[P_\delta^\pm(\lambda)]}{4r^2\lambda} - \frac{u^{[3]}[P_\alpha^\pm(\lambda)] - u^{[3]}[P_\delta^\pm(\lambda)]}{8r^3\lambda^2} \quad (35)$$

Nous avons introduit ici les trinômes apparaissant dans l'expression de  $\psi^\pm(\lambda)$  :

$$P_\alpha^\pm(\lambda) = (1+r)\lambda^2 + 2(r \pm \bar{K})\lambda + r\varepsilon \quad (36)$$

$$P_\beta^\pm(\lambda) = (1-r)\lambda^2 + 2(r \pm \bar{K})\lambda + r\varepsilon \quad (37)$$

4. Lorsque  $\lambda \in [1, 2]$ , on obtient pour  $\psi^\pm(\lambda)$ , après intégration sur  $\bar{k}$ , une expression de la forme  $\int_0^1 d\bar{q}[f(\bar{q}) + f(-\bar{q})] + \int_{\lambda-1}^1 d\bar{q}[f(\bar{q}) - g(\bar{q})]$ , que l'on transforme en faisant le changement de variable  $\bar{q} \rightarrow -\bar{q}$  dans les parties contenant  $f(-\bar{q})$  et  $g(\bar{q})$ . Après regroupement des différents morceaux et utilisation de l'imparité de  $g(\bar{q})$ , qui implique que  $\int_{-1}^{+1} d\bar{q} g(\bar{q}) = 0$ , on aboutit à l'expression  $\int_{1-\lambda}^1 d\bar{q}[f(\bar{q}) - g(\bar{q})]$  qui est exactement celle de  $\psi^\pm(\lambda)$  sur  $[0, 1]$ .

$$P_{\gamma}^{\pm}(\lambda) = \lambda^2 \pm 2\bar{K}\lambda + r\varepsilon \quad (38)$$

$$P_{\delta}^{\pm}(\lambda) = (1+r)\lambda^2 + 2(\pm\bar{K} - r)\lambda + r\varepsilon \quad (39)$$

Les quatre trinômes correspondant à la fonction  $\psi^{-}(\lambda)$  se déduisent bien entendu de ceux associés à  $\psi^{+}(\lambda)$  par changement de  $\bar{K}$  en  $-\bar{K}$ . Ils obéissent à des relations de dualité dont nous tirerons profit :

$$P_{\alpha}^{-}(\lambda) = P_{\delta}^{+}(-\lambda) \quad \text{et} \quad P_{\delta}^{-}(\lambda) = P_{\alpha}^{+}(-\lambda) \quad (40)$$

On notera que  $P_{\beta}^{\pm}(\lambda)$  est en fait de degré un dans le cas particulier ( $r = 1$ ) où l'impureté et les fermions sont de même masse,  $M = m$ .

Quant à l'intégrale (31), un calcul élémentaire conduit à ¶

$$\chi(\lambda) = \frac{\lambda}{2(1+r)} \left[ (1-\lambda^2) \ln(1+\lambda) + \lambda \left( \frac{3}{2}\lambda - 1 \right) \right] \quad \forall \lambda \in [0, 2] \quad (41)$$

$$\chi(\lambda) = \frac{\lambda}{2(1+r)} \left[ (1-\lambda^2) \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} + 2\lambda \right] \quad \forall \lambda \in [2, +\infty[ \quad (42)$$

#### 4. Calcul explicite de $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$ dans le cas général

La section précédente nous avait conduit à exprimer la contribution à l'autoénergie de l'impureté d'ordre deux en l'interaction sous la forme d'une intégrale simple, voir l'intégrale de  $\psi^{+}(\lambda) - \psi^{-}(\lambda)$  sur  $\lambda$  de l'équation (30), dans laquelle il est commode d'introduire provisoirement une borne supérieure finie  $\Lambda > 2$ . Le calcul de cette intégrale peut être effectué explicitement. Donnons-en ici les grandes étapes.

##### 4.1. Expression en termes de deux fonctionnelles $I[P]$ et $J[P]$

La première étape consiste à réduire le nombre de types de termes dans l'intégrande. D'après (34) et (35), il y a a priori trois types distincts, suivant la puissance 0, 1 ou 2 de  $\lambda$  au dénominateur. Mais il suffit d'intégrer les termes du troisième type par parties (en intégrant le facteur  $1/\lambda^2$ ) pour les transformer en termes des deux premiers types, et ceci sur chaque intervalle d'intégration  $[0, 2]$  et  $[2, \Lambda]$ . Les termes tout intégrés en  $\lambda = 2$  se compensent d'ailleurs exactement, car  $P_{\beta}^{\pm}(2) = P_{\delta}^{\pm}(2)$ , et le terme tout intégré en  $\lambda = 0$  est nul, car on a de plus  $\frac{d}{d\lambda} P_{\alpha}^{\pm}(0) = \frac{d}{d\lambda} P_{\beta}^{\pm}(0)$ . En écrivant les intégrales sur  $[2, \Lambda]$  comme la différence des intégrales sur  $[0, \Lambda]$  et sur  $[0, 2]$  avec le même intégrande, on met toutes les bornes inférieures d'intégration à zéro, ce qui permet de tout exprimer en fonction des deux seules fonctionnelles

$$I[P](\lambda) \equiv \int_0^{\lambda} dt u^{[2]}[P(t)] \quad (43)$$

$$J[P](\lambda) \equiv \int_0^{\lambda} dt \frac{u^{[2]}[P(t)] - u^{[2]}[P(0)]}{t} \quad (44)$$

5. Ceci permet de vérifier que l'intégrande de (29) est  $O(1/\lambda^2)$  et que l'intégrale converge à grand  $\lambda$ .

où le polynôme  $P(\lambda)$  est en pratique l'un des huit trinômes  $P_\sigma^\pm(\lambda)$ ,  $\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ . Le terme soustrait au numérateur de l'intégrande dans  $J[P]$  assure la convergence de l'intégrale en sa borne inférieure, sans introduire de reste dans le résultat final puisque tous ces trinômes ont même valeur en zéro. Nous obtenons finalement

$$\int_0^\Lambda d\lambda \psi^\pm(\lambda) = C^\pm(\Lambda) - \frac{(1+r)\{I_\alpha^\pm(\Lambda) - I_\delta^\pm(\Lambda)\} \pm \bar{K}\{J_\alpha^\pm(\Lambda) - J_\delta^\pm(\Lambda)\}}{4r^3} \\ + \frac{I_\gamma^\pm(2) - I_\beta^\pm(2) - I_\delta^\pm(2)}{4r^2} + \frac{I_\beta^\pm(2) - I_\delta^\pm(2) \pm \bar{K}\{J_\beta^\pm(2) - J_\delta^\pm(2)\}}{4r^3} \quad (45)$$

où l'on a utilisé les raccourcis de notation

$$I_\sigma^\pm(\lambda) \equiv I[P_\sigma^\pm](\lambda) \quad \text{et} \quad J_\sigma^\pm(\lambda) \equiv J[P_\sigma^\pm](\lambda) \quad (46)$$

pour la valeurs des fonctionnelles  $I$  et  $J$  en les huit trinômes, et où la contribution du terme tout intégré en  $\Lambda$  résultant de l'intégration par parties vaut

$$C^\pm(\Lambda) = \frac{u^{[3]}[P_\alpha^\pm(\Lambda)] - u^{[3]}[P_\delta^\pm(\Lambda)]}{8r^3\Lambda} \quad (47)$$

#### 4.2. Valeur explicite des fonctionnelles

La deuxième étape consiste en le calcul des fonctionnelles  $I[P]$  et  $J[P]$ , où  $P$  est un polynôme qu'il sera utile d'écrire sous sa forme factorisée,

$$P(\lambda) = A_P \prod_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} (\lambda - \lambda_0) \quad (48)$$

où  $A_P$  est le coefficient du terme dominant et  $\text{Rac } P$  est l'ensemble des racines de  $P(\lambda)$  comptées avec leur multiplicité. D'après les équations (36,37,38,39), il suffit ici de se limiter aux polynômes  $P(\lambda)$  de degré au plus deux à coefficients réels, ce qui inclut le cas particulier  $P_\beta^\pm(\lambda)$  (de degré un) pour un rapport de masse  $r = 1$ . On peut se réduire alors à deux cas distincts, celui où toutes les racines de  $P(\lambda)$  sont réelles, et celui où les deux racines sont complexes conjuguées.

Attachons-nous d'abord à l'évaluation de la fonctionnelle  $I[P]$ . Pour rendre les notations plus compactes et le résultat directement réutilisable dans le calcul de  $J[P]$ , introduisons le polynôme auxiliaire  $Q_I$  de  $P$  pour la fonctionnelle  $I[P]$  :

$$Q_I(\lambda) = \frac{1}{2}[P(\lambda)]^2 \quad (49)$$

Alors, compte tenu de (33) et (43), nous obtenons l'utile réécriture

$$I[P](\lambda) = \int_0^\lambda dt Q_I(t) \left[ \ln |P(t)| + i\pi Y[P(t)] - \frac{3}{2} \right] \quad (50)$$

Dans cette intégrale, la contribution du logarithme s'obtient en proposant simplement une primitive  $\mathcal{F}(t)$  de la fonction  $t \mapsto Q_I(t) \ln |P(t)|$ , dont le lecteur pourra vérifier l'exactitude par calcul de la dérivée  $\mathcal{F}'(t)$ . Dans le cas de  $P$  à racines réelles, nous choisissons

$$\mathcal{F}(t) = Q_I^{[1]}(t) \left[ \ln |A_P| - \frac{3}{2} \right] + \sum_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} \left\{ \left[ Q_I^{[1]}(t) - Q_I^{[1]}(\lambda_0) \right] \ln |t - \lambda_0| \right.$$



$$- \int_0^t d\tau \frac{Q_I^{[1]}(\tau) - Q_I^{[1]}(\lambda_0)}{\tau - \lambda_0} \} \quad (51)$$

où le polynôme  $Q_I^{[1]}(t)$  est la primitive du polynôme  $Q_I(t)$  s'annulant en  $t = 0$ , en accord avec la notation précédemment introduite pour la fonction  $u$ . Les seules singularités potentielles de la fonction  $\mathcal{F}(t)$ , situées en les valeurs des racines  $\lambda_0$ , proviennent de la deuxième contribution, qui reste cependant continue puisque le préfacteur polynômial de  $\ln|t - \lambda_0|$  s'annule en  $t = \lambda_0$ ; les autres contributions sont polynômiales en  $t$ . Dans le cas de  $P$  à racines complexes, nous faisons le choix de primitive

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) = & Q_I^{[1]}(t) \left[ \ln|P(t)| - \frac{3}{2} \right] + \sum_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} \left\{ Q_I^{[1]}(\lambda_0) [\ln(-\lambda_0) - \ln(t - \lambda_0)] \right. \\ & \left. - \int_0^t d\tau \frac{Q_I^{[1]}(\tau) - Q_I^{[1]}(\lambda_0)}{\tau - \lambda_0} \right\} \end{aligned} \quad (52)$$

où la fonction logarithme  $\ln z$  dans le plan complexe est définie avec l'habituelle détermination  $\Im \ln z \in ] -\pi, \pi[$  correspondant à une ligne de coupure sur le demi-axe réel négatif. La fonction  $\mathcal{F}(t)$  est indéfiniment dérivable sur la droite réelle. Comme elle s'annule en  $t = 0$  et que sa dérivée est réelle, puisque  $Q_I$  est à coefficients réels, elle est à valeurs réelles. On constate par ailleurs qu'elle se déduit de (51) à une constante additive près par changement de  $|t - \lambda_0|$  en  $(t - \lambda_0)$  sous la fonction logarithme.

Voyons maintenant la contribution de la fonction de Heaviside à l'intégrale (50). Si  $P$  est à racines complexes, on peut remplacer  $Y[P(t)]$  par  $Y[P(\lambda)]$  dans l'intégrande, puisque  $P(t)$  est alors de signe constant sur la droite réelle, ce qui fait apparaître la contribution  $i\pi Y[P(\lambda)]Q_I^{[1]}(\lambda)$  après intégration. Si  $P$  est à racines réelles, nous intégrons par parties au sens des distributions, en intégrant le facteur polynômial  $Q_I(t)$  et en dérivant le facteur contenant la fonction de Heaviside :

$$\frac{d}{dt} Y[P(t)] = P'(t) \delta[P(t)] = \sum_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} \frac{P'(\lambda_0)}{|P'(\lambda_0)|} \delta(t - \lambda_0) \quad (53)$$

selon des propriétés bien connues de  $Y$  et de la distribution  $\delta$  de Dirac. Le terme tout intégré fait apparaître la contribution déjà évoquée  $i\pi Y[P(\lambda)]Q_I^{[1]}(\lambda)$ , et l'intégrale restante est élémentaire, compte tenu de  $\int_0^\lambda dt \delta(t - \lambda_0) = Y(\lambda - \lambda_0) - Y(-\lambda_0)$ . On notera que le préfacteur de  $\delta$  dans (53) est un pur signe, qui est celui du coefficient dominant  $A_P$  en la plus grande des racines et son opposé en la plus petite<sup>+</sup>.

Il nous reste à donner **l'expression finale** de  $I[P](\lambda)$  sur l'axe réel, valable, soulignons-le, pour  $P$  de degré au plus deux à coefficients réels, mais pour une valeur absolument quelconque du polynôme  $Q_I$ , en rien limitée à (49), comme le montrent les calculs que nous venons de décrire. Si  $P$  est à racines réelles,

$$I[P](\lambda) = Q_I^{[1]}(\lambda) \left\{ u[P(\lambda)] - \frac{3}{2} \right\} + \sum_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} \left\{ - \int_0^\lambda dt \frac{Q_I^{[1]}(t) - Q_I^{[1]}(\lambda_0)}{t - \lambda_0} \right.$$

6. Dans le cas où  $P$  est en fait à racine double, ce que l'on voit comme la convergence des deux racines simples vers une valeur commune  $\lambda_0$ , les contributions des deux racines à l'intégrale restante se compensent et seul le terme tout intégré survit.

$$-Q_I^{[1]}(\lambda_0) \left[ \ln |\lambda - \lambda_0| - \ln |\lambda_0| + i\pi \frac{P'(\lambda_0)}{|P'(\lambda_0)|} [Y(\lambda - \lambda_0) - Y(-\lambda_0)] \right] \} \quad (54)$$

Si  $P$  est à racines complexes,

$$I[P](\lambda) = Q_I^{[1]}(\lambda) \left\{ u[P(\lambda)] - \frac{3}{2} \right\} + \sum_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} \left\{ - \int_0^\lambda dt \frac{Q_I^{[1]}(t) - Q_I^{[1]}(\lambda_0)}{t - \lambda_0} - Q_I^{[1]}(\lambda_0) [\ln(\lambda - \lambda_0) - \ln(-\lambda_0)] \right\} \quad (55)$$

en gardant à l'esprit que, si  $Q_I(\lambda)$  est à coefficients réels, la partie imaginaire de  $I[P](\lambda)$  provient seulement de celle de  $u[P(\lambda)]$ , donc du premier terme.

Attachons-nous maintenant à l'évaluation de la fonctionnelle  $J[P]$ , sous la même hypothèse d'un polynôme  $P(\lambda)$  à coefficients réels de degré au plus deux. Le polynôme auxiliaire doit alors être défini comme suit :

$$Q_J(\lambda) = \frac{Q_I(\lambda) - Q_I(0)}{\lambda} = \frac{[P(\lambda)]^2 - [P(0)]^2}{2\lambda} \quad (56)$$

pour conduire à la décomposition astucieuse en deux sous-fonctionnelles,

$$J[P](\lambda) = J_1[P](\lambda) + \frac{[P(0)]^2}{2} J_2[P](\lambda), \quad (57)$$

avec

$$J_1[P](\lambda) = \int_0^\lambda dt Q_J(t) \left\{ u[P(t)] - \frac{3}{2} \right\} \quad (58)$$

$$J_2[P](\lambda) = \int_0^\lambda dt \frac{u[P(t)] - u[P(0)]}{t} \quad (59)$$

Comme les expressions (54) et (55) sont valables pour un polynôme  $Q_I$  quelconque, la fonctionnelle  $J_1[P](\lambda)$  s'en déduit en remplaçant partout  $Q_I$  par  $Q_J$ , et donc en fait  $Q_I^{[1]}$  par  $Q_J^{[1]}$ . Dans la fonctionnelle  $J_2[P](\lambda)$ , la partie imaginaire de  $u[P(t)] - u[P(0)]$  au numérateur de l'intégrande est nulle si  $P$  est à racines complexes donc à signe constant, sinon sa contribution s'évalue par intégration par parties comme pour  $I[P]$ ; la partie réelle de  $u[P(t)] - u[P(0)]$  fait apparaître, après usage de la décomposition (48) et division par  $t$ , la fonction  $t \mapsto \ln[|t - \lambda_0|/|\lambda_0|]/t$  pour chaque racine réelle  $\lambda_0$  de  $P(\lambda)$ , ou  $t \mapsto \ln[(\lambda_0 - t)/\lambda_0]/t$  pour chaque racine complexe, dont l'intégrale est exprimable en termes du dilogarithme  $\text{Li}_2$ , encore appelé polylogarithme d'ordre deux ou fonction de Jonquière de paramètre égal à deux, et qui obéit à  $\text{Li}_2'(z) = -\ln(1-z)/z$  et  $\text{Li}_2(0) = 0$ . Si  $P$  est à racines réelles, nous trouvons finalement

$$J_2[P](\lambda) = i\pi \{ Y[P(\lambda)] - Y[P(0)] \} \ln |\lambda| + \sum_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} \left\{ -\bar{\text{Li}}_2(\lambda/\lambda_0) - i\pi \ln |\lambda_0| \frac{P'(\lambda_0)}{|P'(\lambda_0)|} [Y(\lambda - \lambda_0) - Y(-\lambda_0)] \right\} \quad (60)$$

où la fonction  $\bar{\text{Li}}_2$ , à valeurs réelles sur la droite réelle,

$$\bar{\text{Li}}_2(\lambda) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\text{Li}_2(\lambda + i\epsilon) + \text{Li}_2(\lambda - i\epsilon)}{2} = - \int_0^\lambda \frac{dt}{t} \ln |t - 1| \quad (61)$$

coïncide avec  $\text{Li}_2$  pour  $\lambda < 1$  mais donne pour  $\lambda > 1$  la moyenne des valeurs prises par  $\text{Li}_2$  juste au-dessus et juste en dessous de sa ligne de coupure  $[1, +\infty[$ . Si  $P$  est à racines complexes, nous obtenons le résultat à valeurs réelles

$$J_2[P](\lambda) = - \sum_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} \text{Li}_2(\lambda/\lambda_0) \quad (62)$$

#### 4.3. Où l'on fait tendre la coupure vers l'infini

La troisième étape consiste à faire tendre la coupure vers l'infini,  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Les différents termes dépendant de  $\Lambda$  dans (45) et l'intégrale de  $\chi(\lambda)$  sur  $[0, \Lambda]$  dans (29) divergent s'ils sont pris individuellement. Cependant, leurs contributions divergentes doivent se compenser exactement dans le résultat final pour  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$ , puisque l'intégrale dans (29) est convergente, et il ne sert à rien de s'astreindre à les évaluer. Pour les éliminer de façon simple mais systématique, tirons parti du fait que chaque terme de (45) peut être mis asymptotiquement sous la forme canonique :

$$\mathcal{I}(\Lambda) \stackrel{\Lambda \rightarrow +\infty}{\equiv} \sum_{(i,j) \in \mathbf{N}^2} a_{i,j} \Lambda^i (\ln \Lambda)^j + o(1) \quad (63)$$

avec un nombre fini de coefficients  $a_{i,j}$  non nuls. L'unicité d'écriture de cette forme permet de définir de façon univoque la *partie finie* de  $\mathcal{I}(\Lambda)$  en  $+\infty$  :

$$\text{Pf } \mathcal{I}(+\infty) \equiv a_{0,0} = \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \left[ \mathcal{I}(\Lambda) - \sum_{(i,j) \in \mathbf{N}^{2*}} a_{i,j} \Lambda^i (\ln \Lambda)^j \right] \quad (64)$$

Un calcul explicite de l'intégrale de  $\chi(\lambda)$  sur  $[0, 2]$  puis sur  $[2, \Lambda]$ , à partir de (41,42) et en utilisant l'intégration par parties pour éliminer la fonction logarithme, conduit à un seul terme divergent, linéaire en  $\Lambda$  donc de la forme (63), puis à

$$\text{Pf} \int_0^{+\infty} d\lambda \chi(\lambda) = -\frac{2}{3(1+r)} \quad (65)$$

ce qui, soit dit en passant, se compense exactement avec le terme constant  $\frac{3r}{1+r}$  dans l'équation (29). De même, on voit bien sur les équations (54) et (55) que la fonctionnelle  $I[P](\Lambda)$  respecte la forme (63),  $u[P(\Lambda)]$  et  $\ln|\Lambda - \lambda_0|$  ou  $\ln(\Lambda - \lambda_0)$  y donnant des contributions en  $\ln \Lambda + O(1)$ , et les autres facteurs ou termes des contributions divergentes purement polynômiales. Le calcul de sa partie finie est alors élémentaire si l'on réalise que, pour tout polynôme  $R(\lambda) = \sum_{n \geq 1} b_n \lambda^n$  nul en zéro donc de partie finie nulle en  $+\infty$ , comme le polynôme  $Q_I(\lambda)$  ou la contribution en  $\int_0^\lambda$  dans (54) et (55), on a

$$\text{Pf} [R(\Lambda) \ln(\Lambda - \lambda_0)]_{\Lambda \rightarrow +\infty} = - \sum_{n \geq 1} b_n \frac{\lambda_0^n}{n} = - \int_0^{\lambda_0} d\lambda \frac{R(\lambda)}{\lambda} \quad (66)$$

compte tenu du développement asymptotique de  $\ln(\lambda - \lambda_0) = \ln \lambda - \sum_{n \geq 1} (\lambda_0/\lambda)^n/n$  en  $+\infty$ . On obtient ainsi pour  $P(\lambda)$  à racines réelles :

$$\text{Pf } I[P](+\infty) = \sum_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} \left\{ Q_I^{[1]}(\lambda_0) \left[ \ln |\lambda_0| - i\pi Y(\lambda_0) \frac{P'(\lambda_0)}{|P'(\lambda_0)|} \right] - \int_0^{\lambda_0} d\lambda \frac{Q_I^{[1]}(\lambda)}{\lambda} \right\} \quad (67)$$

et pour  $P(\lambda)$  à racines complexes :

$$\text{Pf } I[P](+\infty) = \sum_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} \left\{ Q_I^{[1]}(\lambda_0) \ln(-\lambda_0) - \int_0^{\lambda_0} d\lambda \frac{Q_I^{[1]}(\lambda)}{\lambda} \right\} \quad (68)$$

Ces considérations et ces expressions s'étendent directement à la fonctionnelle  $J_1[P](\Lambda)$ , puisqu'il suffit de remplacer le polynôme  $Q_I^{[1]}(\lambda)$  par le polynôme  $Q_J^{[1]}(\lambda)$ . Quant à la fonctionnelle  $J_2[P](\lambda)$ , les propriétés de la fonction dilogarithme, ou simplement un raisonnement direct sur les intégrales qui la font apparaître\*, donnent pour  $P(\lambda)$  à racines réelles le résultat peut-être complexe

$$\begin{aligned} \text{Pf } J_2[P](+\infty) &= \sum_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} \left[ \frac{(\ln |\lambda_0|)^2}{2} - \frac{\pi^2}{3} Y(\lambda_0) + \frac{\pi^2}{6} Y(-\lambda_0) \right. \\ &\quad \left. - i\pi \ln |\lambda_0| Y(\lambda_0) \frac{P'(\lambda_0)}{|P'(\lambda_0)|} \right] \end{aligned} \quad (69)$$

et pour  $P(\lambda)$  à racines complexes le résultat certainement réel

$$\text{Pf } J_2[P](+\infty) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} \frac{1}{2} [\ln(-\lambda_0)]^2 \quad (70)$$

Il reste à traiter le cas de la quantité  $C^\pm(\Lambda)$  dans l'équation (45). Pour notre habituel polynôme générique  $P(\lambda)$  de degré au plus deux à coefficients réels, nous trouvons, indépendamment du fait que ses racines soient réelles ou complexes, l'expression

$$\begin{aligned} \text{Pf} \left[ \frac{u^{[3]}[P(\Lambda)]}{\Lambda} \right]_{\Lambda \rightarrow +\infty} &= Q_C(0) \left[ \ln |A_P| - \frac{11}{6} + i\pi Y(A_P) \right] \\ &\quad - \sum_{\lambda_0 \in \text{Rac } P} \int_0^{\lambda_0} d\lambda \frac{Q_C(\lambda) - Q_C(0)}{\lambda} \end{aligned} \quad (71)$$

en termes du coefficient  $A_P$  de son terme dominant et du polynôme auxiliaire  $Q_C(\lambda) \equiv \{[P(\lambda)]^3 - [P(0)]^3\}/(3!\lambda)$  a priori non nul en zéro, après utilisation de (66) avec  $R(\lambda) = [Q_C(\lambda) - Q_C(0)]/\lambda$ .

Fort heureusement, les résultats obtenus pour la partie finie lorsque la coupure  $\Lambda \rightarrow +\infty$  peuvent être grandement simplifiés grâce aux relations de dualité (40). En effet, seuls les polynômes  $P_\alpha^\pm(\lambda)$  et  $P_\delta^\pm(\lambda)$  interviennent dans les contributions dépendant de  $\Lambda$  dans l'équation (45), et seule la différence  $\psi^+(\lambda) - \psi^-(\lambda)$  importe dans le résultat final (29). Au polynôme générique  $P(\lambda)$  de degré deux nous associons donc son dual

$$\check{P}(\lambda) \equiv P(-\lambda) \quad (72)$$

Bien entendu, les racines de  $\check{P}(\lambda)$  sont les opposés des racines de  $P(\lambda)$ , alors que la valeur en zéro et le coefficient du terme dominant sont communs aux deux polynômes. Au polynôme  $P(\lambda)$  et à ses racines  $\lambda_0$ , à ses polynômes auxiliaires  $Q_I(\lambda)$ ,  $Q_J(\lambda)$  définis par (49) et (56), et à leurs primitives  $Q_I^{[1]}(\lambda)$ ,  $Q_J^{[1]}(\lambda)$ , qui apparaissent dans l'expression

7. On obtient sur l'axe réel  $\bar{\text{Li}}_2(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + \frac{\pi^2}{4} \frac{x}{|x|} - \frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^2})$  pour  $x \rightarrow \pm\infty$ , et en dehors de l'axe réel,  $\text{Li}_2(z) = -\frac{1}{2}[\ln(-z)]^2 - \frac{\pi^2}{6} + O(\frac{1}{z})$ , avec la détermination habituelle du logarithme complexe.

des parties finies des fonctionnelles  $I[P](\Lambda)$  et  $J[P](\Lambda)$  en  $\Lambda = +\infty$ , il suffit simplement de substituer le polynôme dual  $\check{P}(\lambda) \equiv P(-\lambda)$  et ses racines  $\check{\lambda}_0 = -\lambda_0$ , ses polynômes auxiliaires  $\check{Q}_I(\lambda) = Q_I(-\lambda)$ ,  $\check{Q}_J(\lambda) = -Q_J(-\lambda)$  et leurs primitives  $\check{Q}_I^{[1]}(\lambda) = -Q_I^{[1]}(-\lambda)$ ,  $\check{Q}_J^{[1]}(\lambda) = Q_J^{[1]}(-\lambda)$ , pour obtenir l'expression des parties finies de  $I[\check{P}](\Lambda)$  et  $J[\check{P}](\Lambda)$  en  $\Lambda = +\infty$ . De même, dans l'équation (71), le remplacement de  $P(\lambda)$  par  $\check{P}(\lambda)$  conduit au remplacement de  $Q_C(\lambda)$  par  $\check{Q}_C(\lambda) = -Q_C(-\lambda)$ .

Nous obtenons ainsi toute une série de relations simplifiées. D'abord,  $\text{Pf} \{[u^{[3]}[P(\Lambda)] + u^{[3]}[\check{P}(\Lambda)]]/\Lambda\} = 0$  en  $\Lambda = +\infty$  d'où

$$\text{Pf} [C^+ - C^-](+\infty) = 0 \quad (73)$$

si bien que les termes  $C^\pm(\Lambda)$  de l'équation (45) donnent une contribution nulle à  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$ . Ensuite, pour la fonctionnelle  $I$ , dont il faut là aussi additionner les valeurs en  $P$  et  $\check{P}$  : dans le cas réalisé en pratique d'un coefficient  $A_P > 0$  dans  $P(\lambda)$ , il vient

$$\text{Pf} \{I[P] + I[\check{P}]\}(+\infty) \stackrel{A_P > 0}{=} -i\pi [Q_I^{[1]}(\lambda_2) - Q_I^{[1]}(\lambda_1)] = -\frac{i\pi A_P^2}{60} (\lambda_2 - \lambda_1)^5 \quad (74)$$

où les racines  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $P(\lambda)$  doivent être rangées par ordre croissant si elles sont réelles, et par ordre de partie imaginaire croissante si elles sont complexes, si bien que

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\Delta_P^{1/2}}{|A_P|} \text{ (racines réelles) ou } \frac{i(-\Delta_P)^{1/2}}{|A_P|} \text{ (racines complexes),} \quad (75)$$

$\Delta_P$  étant le discriminant du polynôme  $P(\lambda)$  ‡. De même pour la fonctionnelle  $J$ , dont il faut soustraire les valeurs en  $P$  et  $\check{P}$  puisqu'elle est multipliée par  $\bar{K}$  dans l'équation (45). Compte tenu de la décomposition (57), donnons d'abord, là aussi pour  $A_P > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \text{Pf} \{J_1[P] - J_1[\check{P}]\}(+\infty) \stackrel{A_P > 0}{=} -i\pi [Q_J^{[1]}(\lambda_2) - Q_J^{[1]}(\lambda_1)] \\ & = -\frac{i\pi A_P^2}{24} (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2)[(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 10\lambda_1\lambda_2] \end{aligned} \quad (76)$$

où l'on rappelle que la somme  $\lambda_1 + \lambda_2$  et le produit  $\lambda_1\lambda_2$  des racines sont respectivement les coefficients des termes d'ordre un en  $\lambda$  et d'ordre zéro en  $\lambda$  du polynôme dual normalisé  $\check{P}(\lambda)/A_P$ . Puis, pour donner le terme restant, distinguons le cas de  $P(\lambda)$  à racines réelles :

$$\text{Pf} \{J_2[P] - J_2[\check{P}]\}(+\infty) \stackrel{A_P > 0}{=} -\pi^2 Y(\lambda_1\lambda_2) \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_1 + \lambda_2|} - i\pi \ln \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}, \quad (77)$$

où l'on a utilisé  $A_P > 0$ ,  $Y(x) - Y(-x) = \text{signe } x$ ,  $\text{signe } x + \text{signe } y = 2Y(xy) \text{ signe } (x+y)$  pour des réels  $x$  et  $y$  quelconques, et le cas de  $P(\lambda)$  à racines complexes, sans hypothèse sur le signe de  $A_P$  :

$$\text{Pf} \{J_2[P] - J_2[\check{P}]\}(+\infty) = -i\pi \ln \left( \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \right) = -2\pi \arcsin \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2|\lambda_1\lambda_2|^{1/2}} \quad (78)$$

Ceci achève notre calcul de  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$ .

8. Dans le cas à racines complexes, on a utilisé la propriété  $\ln(\lambda_2) - \ln(-\lambda_2) = \ln(-\lambda_1) - \ln(\lambda_1) = i\pi$ .

#### 4.4. Une forme compacte du résultat final

Pour conclure cette section, donnons sous une forme compacte comme dans [35] la contribution d'ordre  $g^2$  à l'autoénergie de l'impureté, adimensionnée selon (21) :

$$\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon) = \frac{9}{32r^2\bar{K}}[\mathcal{S}^+ - \mathcal{S}^-] \quad (79)$$

où les quantités  $\mathcal{S}^\pm$  sont définies par

$$\mathcal{S}^\pm \equiv (1+r)[i_\alpha^\pm + I_\delta^\pm(2)] - (1-r)I_\beta^\pm(2) - rI_\gamma^\pm(2) \pm \bar{K}[j_\alpha^\pm - J_\beta^\pm(2) + J_\delta^\pm(2)] \quad (80)$$

et, faut-il le préciser, se déduisent l'une de l'autre par changement formel de  $\bar{K}$  en  $-\bar{K}$ , ce qui ne pose pas de problème puisque aucun des calculs des deux sous-sections précédentes n'a besoin de la propriété  $\bar{K} > 0$ . Dans l'équation (80), les quantités  $I_\sigma^\pm(\lambda)$  et  $J_\sigma^\pm(\lambda)$ , reliées aux trinômes (36,37,38,39) par l'équation (46), peuvent être évaluées explicitement pour  $\lambda = 2$  grâce aux expressions (54, 55) et (60,62), compte tenu de la décomposition (57) et du lien entre les fonctionnelles  $J_1[P]$  et  $I[P]$  indiqué juste après l'équation (59); les nouvelles quantités introduites dans (80),

$$i_\alpha^\pm \equiv \text{Pf}(I_\alpha^\pm + I_\delta^\mp)(+\infty) \quad \text{et} \quad j_\alpha^\pm \equiv \text{Pf}(J_\alpha^\pm - J_\delta^\mp)(+\infty) \quad (81)$$

se déduisent des résultats (74), (76) et (77,78) en y prenant  $P(\lambda) = P_\alpha^\pm(\lambda)$  puisqu'on a la dualité (40), et en gardant à l'esprit là aussi la décomposition (57).

### 5. Les singularités des dérivées de $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$

La fonction énergie propre de l'impureté au second ordre en l'interaction,  $(\bar{K}, \varepsilon) \mapsto \bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$  après adimensionnement, calculée explicitement dans la section 4, est indéfiniment différentiable sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  sauf sur certaines lignes de singularité que nous allons étudier ici. Pour le voir, il suffit de remarquer que chacun des termes dans la décomposition (79,80) est une fonction des coefficients  $A_P$  du terme dominant et des racines  $\lambda_0$  des polynômes  $P_\sigma^\eta(\lambda)$ , avec  $\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  et  $\eta = \pm$  selon que l'on considère  $\mathcal{S}^\pm$ . Alors que les  $A_P$  sont des constantes, les racines  $\lambda_0$  sont des fonctions non triviales de  $(\bar{K}, \varepsilon)$ . Notre discussion considère ici le cas générique  $r \neq 1$ , mais est aisément adaptable au cas particulier  $r = 1$ .

#### 5.1. Localisation des singularités dans le plan $(\bar{K}, \varepsilon)$

Une première source de singularité pour les dérivées de  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$  est donc la non-différentiabilité des racines par rapport à  $(\bar{K}, \varepsilon)$ , qui se produit lorsque le discriminant  $\Delta_\sigma^\eta$  d'un des polynômes  $P_\sigma^\eta(\lambda)$  s'annule, la quantité  $(\Delta_\sigma^\eta)^{1/2}$  dans l'expression des racines n'étant alors plus dérivable :

$$\Delta_\alpha^\eta = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{(r + \eta\bar{K})^2}{r(1+r)} \quad \Delta_\beta^\eta = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{(r + \eta\bar{K})^2}{r(1-r)} \quad (82)$$

$$\Delta_\gamma^\eta = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\bar{K}^2}{r} \quad \Delta_\delta^\eta = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{(r - \eta\bar{K})^2}{r(1+r)} \quad (83)$$



Bien qu'il y ait huit polynômes distincts en jeu, le lieu des points correspondants dans le demi-plan  $(\bar{K} > 0, \varepsilon)$  est composé des portions de cinq paraboles seulement, voir la figure 1, à cause des relations de dualité (40) et  $P_\gamma^-(\lambda) = P_\gamma^+(-\lambda)$ . On notera que le polynôme  $P_\sigma^\eta(\lambda)$  est à racines réelles lorsque  $(\bar{K}, \varepsilon)$  est sous la parabole  $\Delta_\sigma^\eta = 0$ , à racine double lorsque  $(\bar{K}, \varepsilon)$  est sur la parabole, et à racines complexes lorsque  $(\bar{K}, \varepsilon)$  est au-dessus.

Une seconde source de singularité pour les dérivées de  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$  est la non-différentiabilité de  $\bar{\Sigma}^{(2)}$  par rapport aux racines  $\lambda_0$  des polynômes. Comme il apparaît sur les équations (54,60), prises pour  $\lambda = 2$ , et sur l'équation (77), ceci peut être le fait de singularités logarithmiques dans la partie réelle, provenant de la fonction logarithme elle-même ou du comportement de la fonction  $\bar{\text{Li}}_2(x)$  au voisinage de  $x = 1$  et  $x = \pm\infty$ , et de discontinuités des fonctions de Heaviside dans la partie imaginaire, ce qui peut se produire seulement si l'une des racines  $\lambda_0$  du polynôme considéré tend vers 0 ou 2 ††. On trouve que la condition d'existence d'une racine nulle est la même pour les huit polynômes  $P_\sigma^\eta$ , où  $\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  et  $\eta = \pm$  :

$$\forall \sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \forall \eta = \pm : P_\sigma^\eta(0) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = 0 \quad (84)$$

ce qui correspond à une seule et même droite dans le plan  $(\bar{K}, \varepsilon)$ . Se demander si l'une des racines est égale à deux n'est en fait utile que pour les six polynômes  $P_\sigma^\eta$ , avec  $\sigma \in \{\beta, \gamma, \delta\}$  et  $\eta = \pm$ , puisque l'indice  $\alpha$  dans (80) n'apparaît que dans des parties finies  $i_\alpha^\pm$  et  $j_\alpha^\pm$ ; or les expressions (74,76) sont des fonctions indéfiniment dérivables des racines, et (77) l'est aussi sauf en  $\lambda_{1,2} = 0$ . On trouve alors que la condition d'existence d'une racine  $\lambda_0 = 2$  ne dépend que du signe  $\eta$ , elle est la même pour les trois polynômes  $P_\sigma^+(\lambda)$  d'une part, et pour les trois polynômes  $P_\sigma^-(\lambda)$  d'autre part :

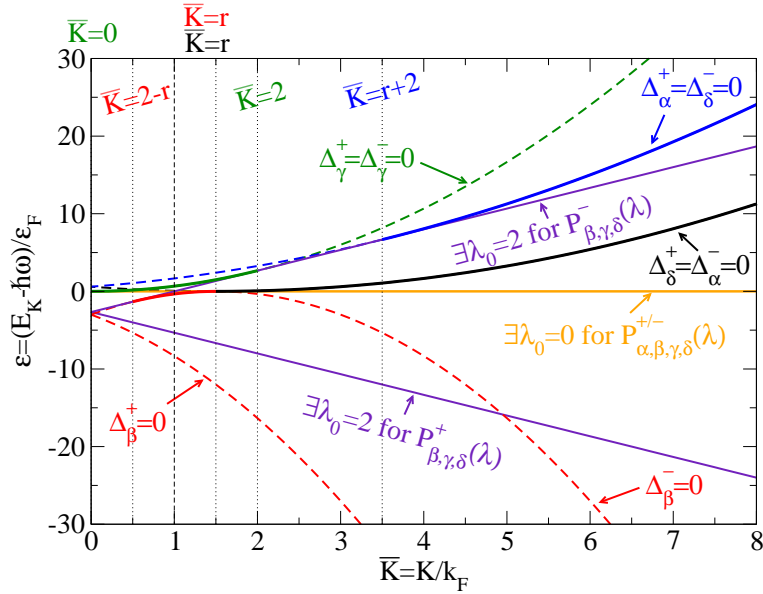
$$\forall \sigma \in \{\beta, \gamma, \delta\}, \forall \eta = \pm : P_\sigma^\eta(2) = 0 \Leftrightarrow r\varepsilon = -4(1 + \eta\bar{K}) \quad (85)$$

ce qui correspond donc à deux droites seulement dans le plan  $(\bar{K}, \varepsilon)$ , images l'une de l'autre par réflexion par rapport à l'axe vertical, sur lequel elles sont concourantes.

Il existe des points du plan  $(\bar{K}, \varepsilon)$  *doublement* singuliers, qui combinent les deux sources de singularité pour un polynôme  $P_\sigma^\eta(\lambda)$  donné : le polynôme y admet une racine double égale à zéro ou deux. Comme on le voit sur la figure 1, ce sont non seulement des points d'intersection de la parabole  $\Delta_\sigma^\eta = 0$  et de la droite  $\varepsilon = 0$  ou  $r\varepsilon = -4(1 + \eta\bar{K})$ , mais également des points de tangence, puisque  $P_\sigma^\eta(\lambda)$ , à coefficients réels, ne peut avoir à la fois une racine réelle et une racine complexe. Dans cette sous-section, au contraire de la sous-section 6.2 pour  $r = 1$ , nous ne discutons pas le cas de ces points doublement singuliers, ni même celui des points d'intersection de lignes de singularité associées à

9. À  $\lambda$  quelconque fixé, les quantités  $Q_I^{[1]}(\lambda)$  et  $Q_J^{[1]}(\lambda)$  sont des polynômes en les coefficients de  $P(\lambda)$ , donc ici des fonctions  $C^\infty$  aussi bien en les racines  $\lambda_{1,2}$  qu'en  $\bar{K}$  et  $\varepsilon$ . La quantité  $Q_I^{[1]}(\lambda_0)$  est un polynôme en  $\lambda_{1,2}$ , donc est  $C^\infty$  en  $\lambda_{1,2}$ , mais pas forcément  $C^\infty$  en  $\bar{K}$  et  $\varepsilon$  là où les racines ne le sont pas. De même, le terme intégral dans (54) et son équivalent dans  $J_1[P](\lambda)$  sont des polynômes en  $\lambda_{1,2}$ ; mais, après sommation sur  $\lambda_0$ , ils deviennent des polynômes *symétriques* en  $\lambda_{1,2}$ , c'est-à-dire, suivant un résultat classique, des polynômes en  $\lambda_1 + \lambda_2$  et  $\lambda_1\lambda_2$ , donc ici des fonctions  $C^\infty$  de  $\bar{K}$  et  $\varepsilon$ .

des polynômes différents, et ce qui va suivre vaudra seulement pour les autres points, c'est-à-dire pour les points génériques, des lignes de singularité.



**Figure 1.** Les lignes de singularité des dérivées par rapport à  $(\bar{K}, \varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  de l'autoénergie d'ordre deux adimensionnée  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$ . (i) Sur les paraboles  $\Delta_\sigma^\eta = 0$ , où  $\Delta_\sigma^\eta$  est le discriminant du polynôme  $P_\sigma^\eta(\lambda)$ ,  $\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  et  $\eta \in \{+, -\}$ , les racines des polynômes ne sont pas des fonctions différentiables de  $(\bar{K}, \varepsilon)$ ; ceci conduit effectivement à une singularité des dérivées de  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$  sur les portions en trait plein, pas sur celles en tireté. (ii) Sur la demi-droite horizontale, où au moins un (mais aussi chaque) polynôme  $P_\sigma^\pm(\lambda)$ ,  $\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ , admet une racine  $\lambda_0 = 0$ , et sur les demi-droites obliques (vers le bas pour  $\eta = +$ , vers le haut pour  $\eta = -$ ), où au moins un (mais aussi chaque) polynôme  $P_\sigma^\eta(\lambda)$ ,  $\sigma \in \{\beta, \gamma, \delta\}$ , admet une racine  $\lambda_0 = 2$ ,  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$  n'est pas une fonction indéfiniment différentiable des racines. Les lignes verticales en pointillé fin marquent les abscisses des points de tangence des paraboles avec les droites de singularité; les valeurs des abscisses sont par ailleurs données explicitement en fonction du rapport de masse  $r = M/m$  entre l'impureté et les fermions, dans un code de couleur et d'obliquité repérant respectivement la parabole et la droite concernées. La ligne verticale en tireté fin marque l'abscisse  $\bar{K} = 1$  du point de croisement des droites de singularité horizontale et oblique vers le haut. Sur la figure,  $r = 3/2$ .

## 5.2. Sur les paraboles : l'effet d'une racine double

Étudions d'abord les singularités sur les paraboles  $\Delta_\sigma^\eta = 0$ ,  $\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  et  $\eta = \pm$ , en un point du plan  $(\bar{K}, \varepsilon)$  donc où le polynôme  $P_\sigma^\eta(\lambda)$  admet une racine double  $\lambda_{0,0}^{(\eta\sigma)}$ , que nous approcherons pour simplifier du côté  $\Delta_\sigma^\eta > 0$  seulement, où  $P_\sigma^\eta(\lambda)$  est à racines réelles,  $\lambda_1^{(\eta\sigma)} < \lambda_2^{(\eta\sigma)}$ , arbitrairement proches de  $\lambda_{0,0}^{(\eta\sigma)}$ . Comme  $\lambda_{0,0}^{(\eta\sigma)}$  est différent de zéro et deux, et compte tenu de la dernière note en bas de page, seule la seconde ligne dans l'équation (54) et son équivalent pour la fonctionnelle  $J$  peuvent conduire à des singularités. Inspirés par la note, nous exprimons les  $Q_I^{[1]}(\lambda_{1,2}^{(\eta\sigma)})$  comme combinaisons

linéaires de leur somme  $S_I$  et de leur différence  $D_I$ ,

$$S_I = Q_I^{[1]}(\lambda_1^{(\eta\sigma)}) + Q_I^{[1]}(\lambda_2^{(\eta\sigma)}) \quad \text{et} \quad D_I = Q_I^{[1]}(\lambda_2^{(\eta\sigma)}) - Q_I^{[1]}(\lambda_1^{(\eta\sigma)}) \quad (86)$$

La contribution de  $S_I$  à la partie réelle de  $I_\sigma^\eta(2)$  contient en facteur le logarithme d'expressions qui, comme  $S_I$ , sont des fonctions symétriques des racines, à savoir leur produit ou le produit de leurs écarts à deux; l'ensemble est une fonction indéfiniment différentiable de  $(\bar{K}, \varepsilon)$ . La contribution de  $D_I$  à la partie réelle de  $I_\sigma^\eta(2)$ , de manière remarquable, est elle aussi une fonction indéfiniment différentiable de  $(\bar{K}, \varepsilon)$  au point de racine double, en vertu de la propriété suivante que l'on applique, compte tenu de la valeur explicite (74) de  $D_I$ , à la fonction  $f(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)^5 \ln\{\lambda_1(2 - \lambda_2)/[\lambda_2(2 - \lambda_1)]\}$  :  
**Propriété 1** : Si  $f(\lambda_1, \lambda_2)$  est une fonction symétrique de  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  indéfiniment différentiable ( $C^\infty$ ) sur un voisinage de  $(\lambda_{0,0}^{\eta\sigma}, \lambda_{0,0}^{\eta\sigma})$ , alors  $f(\lambda_1^{(\eta\sigma)}, \lambda_2^{(\eta\sigma)})$  est une fonction  $C^\infty$  de  $(\bar{K}, \varepsilon)$  au point où  $P_\sigma^\eta(\lambda)$  est à racine double  $\lambda_{0,0}^{\eta\sigma}$ .

Pour établir cette propriété, remarquons que  $\lambda_{1,2}^{(\eta\sigma)} - \lambda_{0,0}^{\eta\sigma} = \mp(\Delta_\sigma^\eta)^{1/2}/(2|A_\sigma^\eta|)$  à une seule et même fonction  $C^\infty$  de  $(\bar{K}, \varepsilon)$  additive près, avec  $A_\sigma^\eta$  le coefficient du terme dominant de  $P_\sigma^\eta(\lambda)$ . Comme  $f(\lambda_1, \lambda_2)$  est une fonction symétrique, le développement de Taylor de  $f(\lambda_1^{(\eta\sigma)}, \lambda_2^{(\eta\sigma)})$  en puissances de  $(\Delta_\sigma^\eta)^{1/2}$  ne fait apparaître que des puissances paires, fonctions  $C^\infty$  de  $(\bar{K}, \varepsilon)$ , d'où le résultat. ■

On trouve de même que la partie réelle de  $J_\sigma^\eta(2)$  est une fonction  $C^\infty$  de  $(\bar{K}, \varepsilon)$  au point considéré. Pour étudier le bout  $J_1$ , dans la décomposition (57), on introduit  $S_J$  et  $D_J$ , en remplaçant dans (86) le polynôme auxiliaire  $Q_I$  par  $Q_J$ . L'expression de  $D_J$  est donnée par (76). Dans le cas du bout  $J_2$ , dont on n'oublie pas qu'il est multiplié par  $[P(0)]^2/2$ , fonction  $C^\infty$  de  $(\bar{K}, \varepsilon)$ , on utilise la propriété 1 avec  $f(\lambda_1, \lambda_2) = \text{Li}_2(2/\lambda_1) + \text{Li}_2(2/\lambda_2)$ , ce qui est légitime puisque  $2/\lambda_{1,2}$  n'est ici ni au voisinage de  $\pm\infty$  ni au voisinage du bord de la ligne de coupure  $\Re z \geq 1$  de la fonction  $\text{Li}_2(z)$  dans le plan complexe.

Considérons maintenant le cas de la partie imaginaire de  $I_\sigma^\eta(2)$  et  $J_\sigma^\eta(2)$ . Les fonctions de Heaviside des racines au voisinage du point considéré ont la même valeur pour  $\lambda_{1,2}$ , c'est leur valeur en la racine double, qui fait apparaître la fonction porte ou indicatrice de l'intervalle  $[0, 2]$ , nulle sauf sur cet intervalle où elle vaut un :

$$\Pi_{[0,2]}(x) \equiv Y(2 - x) - Y(-x) \quad (87)$$

Comme  $P'(\lambda_{1,2})/|P'(\lambda_{1,2})|$  sont de signe opposé, seules les fonctions  $D_I$  et  $D_J$  contribuent. Apparaissent finalement des fonctions antisymétriques des racines, qui ne jouissent pas de la propriété 1 et ne sont pas  $C^\infty$  en  $(\bar{K}, \varepsilon)$  au point considéré. En particulier, en ayant soin de regrouper les bouts  $J_1$  et  $J_2$  pour éviter de faire apparaître des singularités intermédiaires plus fortes, ce qui conduit à considérer la fonction  $(\lambda_2 - \lambda_1)f(\lambda_1, \lambda_2)$  où  $f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{24}[(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 10\lambda_1\lambda_2] + \frac{(\lambda_1\lambda_2)^2}{2} \ln(\lambda_2/\lambda_1)$  est  $C^\infty$ , symétrique, homogène de degré trois et telle que  $f(1 + \delta, 1 - \delta) = \frac{4}{15}\delta^4 + O(\delta^5)$  lors que  $\delta \rightarrow 0$ , nous obtenons à une fonction additive  $C^\infty$  de  $(\bar{K}, \varepsilon)$  près :

$$I_\sigma^\eta(2) \stackrel{\Delta_\sigma^\eta \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{i\pi\Pi_{[0,2]}(\lambda_{0,0}^{\eta\sigma})}{60(A_\sigma^\eta)^3}(\Delta_\sigma^\eta)^{5/2} + C^\infty \quad (88)$$

$$J_\sigma^\eta(2) \stackrel{\Delta_\sigma^\eta \rightarrow 0^+}{=} -\frac{i\pi \Pi_{[0,2]}(\lambda_{0,0}^{(\eta\sigma)})}{60\lambda_{0,0}^{(\eta\sigma)}(A_\sigma^\eta)^3} [(\Delta_\sigma^\eta)^{5/2} + O(\Delta_\sigma^\eta)^3] + C^\infty \quad (89)$$

On en déduit que la dérivée **troisième** de  $\Im I_\sigma^\eta(2)$  et de  $\Im J_\sigma^\eta(2)$  suivant la direction normale à la parabole  $\Delta_\sigma^\eta = 0$  diverge comme l'inverse de la racine carrée de la distance à la parabole, pourvu que la racine double du polynôme  $P_\sigma^\eta(\lambda)$  soit dans l'intervalle  $]0, 2[$ , ce qui se produit sur la portion de la parabole comprise entre ses points de tangence avec les droites  $\exists \lambda_0^{(\eta\sigma)} = 0$  et  $\exists \lambda_0^{(\eta\sigma)} = 2$  des équations (84) et (85).

Dans le cas où  $\sigma = \alpha$ , ce sont les parties finies symétrisées  $i_\alpha^\pm$  et  $j_\alpha^\pm$  qu'il faut considérer. En réalité, leurs singularités vont interférer avec celles de  $I_\delta^\mp(2)$  et  $J_\delta^\mp(2)$ , comme on le voit sur l'expression (79) de  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$ , puisque les paraboles  $\Delta_\alpha^\pm = 0$  et  $\Delta_\delta^\mp = 0$  sont confondues. Il vaut donc mieux les regrouper pour obtenir

$$i_\alpha^\eta - I_\delta^{-\eta}(2) \stackrel{\Delta_\alpha^\eta \rightarrow 0^+}{=} -\frac{i\pi(\Delta_\alpha^\eta)^{5/2}}{60(A_\alpha^\eta)^3} \left\{ 1 - \Pi_{[0,2]}(-\lambda_{0,0}^{(\eta\alpha)}) \right\} + C^\infty \quad (90)$$

$$j_\alpha^\eta + J_\delta^{-\eta}(2) \stackrel{\Delta_\alpha^\eta \rightarrow 0^+}{=} -\frac{i\pi[(\Delta_\alpha^\eta)^{5/2} + O(\Delta_\alpha^\eta)^3]}{60\lambda_{0,0}^{(\eta\alpha)}(A_\alpha^\eta)^3} \left\{ 1 - \Pi_{[0,2]}(-\lambda_{0,0}^{(\eta\alpha)}) \right\} + C^\infty \quad (91)$$

où la dualité (40) implique  $-\lambda_{0,0}^{(\eta\alpha)} = \lambda_{0,0}^{(-\eta\delta)}$ .

Il reste à additionner toutes les contributions à  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$  selon l'écriture compacte (79), pour chacune des cinq paraboles distinctes possibles, ne serait-ce que pour vérifier l'absence de compensation entre les contributions issues des fonctionnelles  $I[P]$  et  $J[P]$  :

$$\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon) \stackrel{\Delta_\beta^\eta \rightarrow 0^+}{=} \frac{3i\pi \Pi_{[0,2]}(\frac{\eta\bar{K}+r}{r-1})}{640r(1-r)^2\bar{K}(\bar{K}+\eta r)} [(\Delta_\beta^\eta)^{5/2} + O(\Delta_\beta^\eta)^3] + C^\infty \quad (92)$$

$$\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon) \stackrel{\Delta_\gamma^+ = \Delta_\gamma^- \rightarrow 0^+}{=} \frac{3i\pi[\Pi_{[0,2]}(-\bar{K}) - \Pi_{[0,2]}(\bar{K})]}{640r(1+r)^3\bar{K}} (\Delta_\gamma^+)^{5/2} + C^\infty \quad (93)$$

$$\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon) \stackrel{\Delta_\alpha^\eta = \Delta_\delta^{-\eta} \rightarrow 0^+}{=} \frac{-3i\pi[1 - \Pi_{[0,2]}(\frac{\eta\bar{K}+r}{1+r})]}{640r(1+r)^2\bar{K}(\bar{K}+\eta r)} [(\Delta_\alpha^\eta)^{5/2} + O(\Delta_\alpha^\eta)^3] + C^\infty \quad (94)$$

avec, à chaque fois, un préfacteur qui diverge au point de tangence de la parabole  $\Delta_\sigma^\eta = 0$  considérée ( $\sigma \in \{\beta, \gamma, \alpha\}$ ) avec l'axe horizontal  $\varepsilon = 0$ , ainsi qu'au point d'intersection, d'abscisse  $\bar{K} = 0$ , des paraboles de même classe  $\sigma \in \{\alpha, \beta\}$  mais d'indices  $\eta$  opposés. Les portions de paraboles où se produit réellement une divergence de la dérivée **troisième** de  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$  dans la direction normale sont représentées en trait plein sur la figure 1 ; les autres portions sont en pointillé.

### 5.3. Sur la droite horizontale : l'effet d'une racine nulle

Étudions maintenant les singularités sur la droite horizontale  $\varepsilon = 0$ , en un point du plan  $(\bar{K}, \varepsilon)$  donc où un (et en pratique chaque) polynôme  $P_\sigma^\eta(\lambda)$ , avec  $\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  et  $\eta = \pm$ , admet une racine nulle, l'autre racine étant différente de zéro et deux. Au voisinage de ce point,  $P_\sigma^\eta(\lambda)$  admet une racine réelle  $\lambda_0^{(\eta\sigma)}$  qui s'annule linéairement en  $\varepsilon$ , donc en changeant de signe, comme

$$\lambda_0^{(\eta\sigma)} \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} -\frac{r\varepsilon}{P_\sigma^{\eta'}(0)} - \frac{A_\sigma^\eta}{[P_\sigma^{\eta'}(0)]^3} (r\varepsilon)^2 + O(\varepsilon^3), \quad (95)$$

l'autre racine  $\lambda_0^{(\eta\sigma)} = r\varepsilon/(A_\sigma^\eta \lambda_0^{(\eta\sigma)})$  ayant bien une limite finie.

Regardons d'abord la contribution des parties finies  $i_\alpha^\eta$  et  $j_\alpha^\eta$  à l'autoénergie d'ordre deux, voir l'équation (80). Comme les racines des polynômes sont des fonctions  $C^\infty$  de  $(\bar{K}, \varepsilon)$  au voisinage du point considéré, la quantité  $i_\alpha^\eta$ , ainsi que la contribution de la fonctionnelle  $J_1$  à  $j_\alpha^\eta$ , sont elles aussi  $C^\infty$ , en vertu des équations (74) et (76). En revanche, après multiplication par  $[P_\alpha^\eta(0)]^2/2$  de la contribution de la fonctionnelle  $J_2$ , voir (77), on trouve que la dérivée seconde de  $j_\alpha^\eta$  par rapport à  $\varepsilon$  a une partie imaginaire logarithmiquement divergente en  $\varepsilon = 0$ , et une partie réelle seulement discontinue.

Les contributions  $I_\sigma^\eta(2)$  et  $J_\sigma^\eta(2)$  peuvent-elles conduire à des singularités plus fortes? Dans l'expression (54) prise pour  $\lambda = 2$ , le seul bout *a priori* non  $C^\infty$  est en  $Q_I^{[1]}(\lambda_0)[\ln |\lambda_0| \pm i\pi Y(-\lambda_0)]$ , en omettant les indices  $\sigma$  et  $\eta$  pour alléger. Or  $Q_I^{[1]}(\lambda_0)$  s'annule ici *cubiquement* en  $\lambda_0$ , comme on le voit par simple changement de variable  $t = x\lambda_0$  dans l'intégrale définissant  $Q_I^{[1]}$  :

$$Q_I^{[1]}(\lambda_0) \equiv \int_0^{\lambda_0} dt \frac{[P(t)]^2}{2} = \frac{A_P^2}{2} \lambda_0^3 \int_0^1 dx (x-1)^2 (\lambda_0 x - \lambda_0')^2 \quad (96)$$

À l'aide de la relation  $sY(-s\varepsilon) = Y(s) - Y(\varepsilon)$ , vraie pour  $s = \pm$  quelconque mais utilisée en pratique avec  $s = P'(0)/|P'(0)|$ , on obtient, en réintroduisant les indices :

$$I_\sigma^\eta(2) \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\equiv} -\frac{(r\varepsilon)^3}{6P_\sigma^{\eta'}(0)} [\ln |\varepsilon| + i\pi Y(\varepsilon) + O(\varepsilon)] + C^\infty \quad (97)$$

Aussi faut-il dériver  $I_\sigma^\eta(2)$  trois fois par rapport à  $\varepsilon$  pour avoir une divergence logarithmique dans sa partie réelle, et une discontinuité dans sa partie imaginaire. Dans le cas de  $J_1[P](2)$ , on reprend le même raisonnement en remplaçant  $Q_I$  par  $Q_J$  :

$$Q_J^{[1]}(\lambda_0) \equiv \int_0^{\lambda_0} dt \frac{[P(t)]^2 - [P(0)]^2}{2t} = \frac{A_P^2}{2} \lambda_0^2 \int_0^1 \frac{dx}{x} [(x-1)^2 (\lambda_0 x - \lambda_0')^2 - \lambda_0'^2] \quad (98)$$

Ceci s'annule *quadratiquement* en  $\lambda_0$ , et il suffit de dériver  $J_1[P](2)$  deux fois par rapport à  $\varepsilon$  pour faire apparaître une divergence logarithmique sur la partie réelle et une discontinuité sur la partie imaginaire. Cependant, la singularité issue de la fonctionnelle  $J_2$  est encore plus sévère, même après multiplication par  $[P(0)]^2/2$ , voir (60) et la note en bas de page sur le comportement asymptotique de la fonction  $\bar{\text{Li}}_2(x)$  : au final, la dérivée seconde de  $J_\sigma^\eta(2)$  par rapport à  $\varepsilon$  diverge comme le carré du logarithme de  $\varepsilon$  pour la partie réelle, et, du côté  $\lambda_0 > 0$ , comme le logarithme de  $\varepsilon$  pour la partie imaginaire.

En regroupant toutes les contributions à  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$ , on trouve cependant que la singularité attendue en  $\varepsilon = 0$  dans la dérivée seconde ne se produit pas, à cause d'une compensation parfaite entre les contributions de  $j_\alpha^\eta$ ,  $J_\delta^{-\eta}(2)$  et  $J_\beta^\eta(2)$ . Comme dans l'équation (91), il y a donc une combinaison astucieuse à considérer,

$$j_\alpha^\eta + J_\delta^{-\eta}(2) - J_\beta^\eta(2) = \mathcal{J}_\alpha^\eta - \mathcal{J}_\beta^\eta + C^\infty \quad (99)$$

pour laquelle on trouve par des calculs un peu longs :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\sigma^\eta &\equiv Q_{J_\sigma^\eta}^{[1]}(\lambda_0^{(\eta\sigma)}) [\ln |\lambda_0^{(\eta\sigma)}| + i\pi Y(\varepsilon)] \\ &+ \frac{(r\varepsilon)^2}{2} \left[ -\bar{\text{Li}}_2(2/\lambda_0^{(\eta\sigma)}) + i\pi Y(\varepsilon) \ln |\lambda_0^{(\eta\sigma)}| \right] \end{aligned} \quad (100)$$

On a utilisé entre autres la relation de dualité (40), qui implique  $\lambda_0^{(-\eta\delta)} = -\lambda_0^{(\eta\alpha)}$ ,  $P_\delta^{-\eta'}(0) = -P_\alpha^{\eta'}(0)$  et  $Q_{J_\delta^{-\eta}}^{[1]}(\lambda_0^{(-\eta\delta)}) = Q_{J_\alpha^\eta}^{[1]}(\lambda_0^{(\eta\alpha)})$ , la relation déjà vue  $sY(-s\varepsilon) = Y(s) - Y(\varepsilon)$ , cette fois avec  $s_\eta = P_\alpha^{\eta'}(0)/|P_\alpha^{\eta'}(0)|$ , la relation  $\ln[|\lambda_2^{(\eta\alpha)}|/|\lambda_1^{(\eta\alpha)}|] = s_\eta \ln|\lambda_0^{(\eta\alpha)}| + C^\infty$ . Et aussi le fait que  $\ln[|\lambda_0^{(\eta\alpha)}|/|\lambda_0^{(\eta\beta)}|]$  est une fonction  $C^\infty$  de  $\varepsilon$  en  $\varepsilon = 0$ , et que l'expression  $\bar{\text{Li}}_2(1/x) - \bar{\text{Li}}_2(-1/x) - (\pi^2/2)\text{signe}(x)$ , parce qu'elle vaut  $\int_0^x (dt/t) \ln[|t-1|/|t+1|]$  d'après (61), est une fonction  $C^\infty$  de  $x$  sur  $] -1, 1[$ . Mais surtout le fait que les polynômes  $P_\alpha^\eta(\lambda)$  et  $P_\beta^\eta(\lambda)$  ont la même dérivée première en  $\lambda = 0$ , ce qui implique que les racines  $\lambda_0^{(\eta\alpha)}$  et  $\lambda_0^{(\eta\beta)}$  diffèrent seulement au **second** ordre en  $\varepsilon$ , voir (95), et ce qui explique pourquoi la combinaison astucieuse (99) est une fonction  $C^2$  de  $\varepsilon$  en  $\varepsilon = 0$ , alors que les termes  $\mathcal{J}_\alpha$  et  $\mathcal{J}_\beta$  ne le sont pas.

Par un développement des termes (100), donc de la combinaison (99), jusqu'à l'ordre trois en  $\varepsilon$ , grâce en particulier à (98), puis en incluant la contribution (97) des  $I_\sigma^\eta(2)$ , nous trouvons finalement que la dérivée **troisième** de  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$  a une partie réelle logarithmiquement divergente et une partie imaginaire discontinue sur l'axe horizontal :

$$\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon) \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\equiv} \frac{3r^4(\bar{K}^2 + r^2)}{64\bar{K}^2(\bar{K}^2 - r^2)^2} [\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)] [\ln|\varepsilon| + i\pi Y(\varepsilon)] + C^\infty, \quad (101)$$

avec un préfacteur qui diverge en les points de tangence des paraboles  $\Delta_\sigma^\eta = 0$  avec l'axe horizontal, pour  $\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  et  $\eta = \pm$ , ce qui était peut-être prévisible.

#### 5.4. Sur les droites obliques : l'effet d'une racine égale à deux

Étudions pour terminer les singularités sur la droite oblique correspondant à  $\eta = +$  ou  $\eta = -$  dans l'équation (85), en un point du plan  $(\bar{K}, \varepsilon)$  donc où un (et en pratique chaque) polynôme  $P_\sigma^\eta(\lambda)$ , avec  $\sigma \in \{\beta, \gamma, \delta\}$  et  $\eta$  fixé, admet une racine égale à deux, l'autre racine étant différente de zéro et deux. Au voisinage de ce point, les deux racines de  $P_\sigma^\eta(\lambda)$  sont bien entendu réelles; nous noterons  $\lambda_0^{(\eta\sigma)}$  celle qui est arbitrairement proche de deux,

$$\lambda_0^{(\eta\sigma)} - 2 \stackrel{d_\eta \rightarrow 0}{\equiv} -\frac{d_\eta}{P_\sigma^{\eta'}(2)} + O(d_\eta^2) \quad (102)$$

où le numérateur, égal à  $P_\sigma^\eta(2)$ , est une distance algébrique à la droite de singularité :

$$d_\eta \equiv r\varepsilon + 4\eta\bar{K} + 4 = P_\sigma^\eta(2), \quad \forall \sigma \in \{\beta, \gamma, \delta\} \quad (103)$$

L'autre racine  $\lambda_0^{(\eta\sigma)}$  reste en dehors d'un voisinage de zéro et de deux.

Comme il a été vu à la sous-section 5.1, les singularités ne peuvent ici provenir que des termes  $I_\sigma^\eta(2)$  et  $J_\sigma^\eta(2)$ . Pour chacun d'eux, nous trouvons au point considéré que la dérivée troisième selon la direction normale à la droite oblique est de partie réelle logarithmiquement divergente et de partie imaginaire discontinue.

Déterminons d'abord la partie à dérivées singulières de la fonctionnelle  $I[P]$ , en omettant les indices  $\sigma \in \{\beta, \gamma, \delta\}$  et  $\eta$  pour alléger. Dans l'équation (54) écrite pour  $\lambda = 2$ , il faut garder le premier terme, ainsi que le troisième pour la racine  $\lambda_0$  proche de deux. Pour isoler la contribution de cette racine dans  $u[P(2)]$ , utilisons la factorisation (48) et la relation  $Y(sx) = Y(-s) + sY(x)$ , où  $s = \pm 1$  et  $x$  est un réel quelconque, ici



l'approximation linéaire (102) de  $\lambda_0 - 2$ . Comme  $P'(\lambda_0)$ ,  $P'(2)$  et  $A_P(2 - \lambda'_0)$  ont même signe quand  $\lambda_0$  est assez proche de deux, et comme  $\ln |\lambda_0/d|$  est localement une fonction  $C^\infty$  de  $d$ , nous obtenons finalement sur un voisinage de  $d = 0$  :

$$I[P](2) = [Q_I^{[1]}(2) - Q_I^{[1]}(\lambda_0)][\ln |d| + i\pi Y(d)] + C^\infty \quad (104)$$

Le préfacteur s'annule bien cubiquement en  $d$ , comme on le voit grâce à (48) et au changement de variable  $x = t - \lambda_0$  dans l'intégrale sur  $t$  définissant  $Q_I$  :

$$Q_I^{[1]}(2) - Q_I^{[1]}(\lambda_0) = \frac{A_P^2}{2} \int_0^{2-\lambda_0} dx x^2 (x + \lambda_0 - \lambda'_0)^2 \stackrel{d \rightarrow 0}{\equiv} \frac{d^3}{6P'(2)} + O(d^4) \quad (105)$$

Effectuons la même analyse pour la fonctionnelle  $J[P]$  qui, rappelons-le, a été partagée en deux contributions selon (57). Le cas de  $J_1[P]$  se déduit directement de (104) par substitution du polynôme  $Q_J$  au polynôme  $Q_I$ . Cette fois, le préfacteur

$$\begin{aligned} Q_J^{[1]}(2) - Q_J^{[1]}(\lambda_0) &= \frac{A_P^2}{2} \int_{\lambda_0}^2 \frac{dt}{t} [(t - \lambda_0)^2 (t - \lambda'_0)^2 - \lambda_0^2 \lambda_0'^2] \\ &= \frac{A_P^2 \lambda_0'^2}{2} \left[ -4u + 6u^2 + \frac{16(1 - \lambda'_0)}{3\lambda_0^2} u^3 - \frac{4u^4}{3\lambda_0^2} \right], \end{aligned} \quad (106)$$

où  $u \equiv 1 - \lambda_0/2$ , s'annule seulement linéairement en  $d$ , ce qui conduit à une singularité dans la dérivée première. Cependant, il y a compensation partielle avec la contribution de  $J_2[P]$  : en transformant dans (60) le premier terme et le troisième terme écrit pour la racine  $\lambda_0$  la plus proche de deux, à l'aide des techniques ayant conduit à (104), et en utilisant le fait que  $\bar{\text{Li}}_2(2/\lambda_0)$  est une fonction indéfiniment dérivable de  $\lambda_0$  sauf en  $2/\lambda_0 = 1$ , où l'on a le développement

$$\bar{\text{Li}}_2(2/\lambda_0) = \bar{\text{Li}}_2(1/(1-u)) \stackrel{u \rightarrow 0}{\equiv} - \left[ u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + O(u^4) \right] \ln |u| + C^\infty, \quad (107)$$

nous trouvons par un calcul longuet, et en n'omettant plus les indices, que

$$J_\sigma^\eta(2) \stackrel{d_\eta \rightarrow 0}{\equiv} \frac{d_\eta^3}{12P_\sigma^{\eta'}(2)} [1 + O(d_\eta)][\ln |d_\eta| + i\pi Y(d_\eta)], \quad \forall \sigma \in \{\beta, \gamma, \delta\} \quad (108)$$

Cet équivalent est précisément la moitié de celui obtenu pour  $I_\sigma^\eta(2)$ , ce dont nous donnons l'interprétation simple suivante : dans l'intégrale (44) définissant  $J[P](\lambda)$ , avec ici  $\lambda = 2$ , seule la contribution d'un voisinage de la borne supérieure  $t = 2$  peut conduire à des singularités, puisque c'est par là que la racine  $\lambda_0$  la plus proche de deux entre (ou sort) de l'intervalle d'intégration lorsque la distance à la droite de singularité varie. Aussi le terme  $[P(0)]^2 u [P(0)]/t$  dans l'intégrande de (44) peut-il être ignoré, et  $t$  approximé par deux au dénominateur de  $[P(t)]^2 u [P(t)]/t$ , ce qui fait apparaître en effet exactement la moitié de l'intégrande de  $I[P](2)$ .

En regroupant toutes les contributions grâce à l'écriture compacte (79), nous ne trouvons pas de compensation particulière entre elles, si bien que la dérivée **troisième** de  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$  selon la normale aux droites de singularité obliques est de partie réelle logarithmiquement divergente et de partie imaginaire discontinue :

$$\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon) \stackrel{d_\eta \rightarrow 0}{\equiv} \frac{3\eta r [d_\eta^3 + O(d_\eta^4)][\ln |d_\eta| + i\pi Y(d_\eta)]}{128\bar{K}(2 + \eta\bar{K})[(2 + \eta\bar{K})^2 - r^2]} + C^\infty \quad (109)$$

où  $d_\eta$ , une distance algébrique à ces droites, est donnée par (103). Nous trouvons que le dénominateur du préfacteur dans (109) s'annule bien aux points où la droite oblique considérée est tangente aux paraboles  $\Delta_\sigma^\eta = 0$  de même indice  $\eta$ , pour  $\sigma = \beta, \gamma$  et  $\delta$ . L'annulation du dénominateur en  $\bar{K} = 0$  correspond, quant à elle, au point de croisement des deux droites obliques, où les distances  $d_\pm$  coïncident et les contributions d'indice  $\eta = \pm$  interfèrent ; les additionner conduit bien à un préfacteur fini.

## 6. Quelques applications physiques

### 6.1. Des résultats sur l'énergie complexe retrouvés

Les propriétés analytiques de la résolvante  $\hat{G}(z)$  du Hamiltonien  $\hat{H}$ , plus précisément de ses éléments de matrice, lui interdisent d'avoir un pôle dans le plan complexe, en dehors de ceux sur l'axe réel associés au spectre discret de  $\hat{H}$ . Cependant, à la limite thermodynamique,  $\hat{G}(z)$  admet une ligne de coupure à l'endroit du spectre continu de  $\hat{H}$ , si bien que le prolongement analytique de  $\hat{G}(z)$  du demi-plan supérieur  $\Im z > 0$  au demi-plan inférieur  $\Im z < 0$ , repéré par l'exposant p.a. dans ce qui suit, peut y admettre des pôles complexes [37].

Cette discussion s'étend à la fonction de Green  $\omega \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{K}, \omega)$ , qui n'est autre qu'un élément de matrice de la résolvante dans l'état  $|\psi_{\mathbf{K}}^0\rangle$  de l'impureté d'impulsion  $\hbar\mathbf{K}$  en présence de la mer de Fermi non perturbée, voir l'équation (5). Si  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ , on s'attend à ce que la fonction de Green admette un (et un seul) pôle sur l'axe réel, en  $\omega_0(\mathbf{0})$ , qui correspond au seul état propre discret de  $\hat{H}$ , son état fondamental, puisqu'on a supposé ici que la branche monomérique est celle d'énergie minimale, voir l'introduction. Si  $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ ,  $\omega \mapsto \mathcal{G}(\mathbf{K}, \omega)$  ne devrait plus y avoir de pôle réel, puisque aucun argument énergétique n'empêche l'émission par l'impureté de paires particule-trou dans le gaz de fermions, voir l'introduction ; en revanche, son prolongement analytique  $\mathcal{G}^{\text{p.a.}}(\mathbf{K}, \omega)$  au demi-plan complexe inférieur  $\Im \omega < 0$  devrait admettre un pôle en  $\omega = \omega_0(\mathbf{K})$  issu continûment du pôle réel  $\omega_0(\mathbf{0})$  et, en vertu de (3), solution de l'équation implicite

$$\Delta E(\mathbf{K}) \equiv \hbar\omega_0(\mathbf{K}) = E_{\mathbf{K}} + \Sigma^{\text{p.a.}}(\mathbf{K}, \omega_0(\mathbf{K})) \quad (110)$$

où  $\Delta E(\mathbf{K})$  est appelée énergie complexe de l'impureté [35] et  $\Sigma^{\text{p.a.}}(\mathbf{K}, \omega)$  est le prolongement analytique de l'autoénergie. Que  $\mathbf{K}$  soit nul ou pas, seule l'existence d'un pôle à la pulsation (réelle ou pas)  $\omega_0(\mathbf{K})$  permet d'affirmer que l'impureté, par couplage à la mer de Fermi, donne naissance à une quasi-particule bien définie, ici un monoméron, ce qui semble d'ailleurs bien être le cas même dans le régime d'interaction forte [20] tant que la masse de l'impureté reste finie [38]. La partie imaginaire du pôle,

$$\Im \omega_0(\mathbf{K}) \equiv -\frac{\Gamma_0(\mathbf{K})}{2} < 0 \text{ si } \mathbf{K} \neq \mathbf{0}, \quad (111)$$

donne alors le taux  $\Gamma_0$  avec lequel le système quitte exponentiellement en temps l'état  $|\psi_{\mathbf{K}}^0\rangle$  dans lequel il a été initialement préparé : c'est donc ici un taux d'émission de paires particule-trou. Rappelons que l'amplitude de probabilité de présence dans  $|\psi_{\mathbf{K}}^0\rangle$

comporte aussi, en général, un terme décroissant en loi de puissance, en pratique de peu d'importance dans le régime de couplage faible  $g \rightarrow 0^-$  [37].

Les résultats des sections précédentes permettent un calcul explicite de l'énergie complexe de l'impureté au second ordre en la constante de couplage  $g$ . Il suffit de remplacer dans (14) l'autoénergie par son approximation d'ordre au plus deux, évaluée en la pulsation non perturbée  $\omega_0^{(0)}(\mathbf{K}) = E_{\mathbf{K}}$  puisque  $\Sigma^{(1)}$  ne dépend pas de la pulsation :

$$\Delta E(\mathbf{K}) = E_{\mathbf{K}} + \rho g + \frac{(\rho g)^2}{\epsilon_{\text{F}}} \bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon = 0) + O(g^3) \quad (112)$$

compte tenu des adimensionnements (20) et (21). On prend donc la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans chaque terme de l'expression (80). Une des racines de chaque polynôme  $P_{\sigma}^{\pm}(\lambda)$  tend vers zéro et apporte alors, voir la sous-section 5.3, une contribution nulle aux fonctionnelles  $I[P]$  et  $J_1[P]$ , au contraire de l'autre racine. De plus, la contribution du bout  $J_2[P]$  est nulle car totalement écrasée par le facteur  $[P(0)]^2 \propto \varepsilon^2$  dans (57). Grâce aux relations  $\text{signe}(y)[Y(2 + \frac{y}{x}) - Y(\frac{y}{x})] = Y(y) - Y(2x + y)$  et  $|y| = y[Y(y) - Y(-y)]$ , vraies pour toute paire de nombres réels non nuls  $x$  et  $y$  mais utilisées ici avec les coefficients des termes quadratique et linéaire du polynôme  $P_{\sigma}^{\eta}(\lambda)$ , on obtient finalement

$$\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, 0) = C(\bar{K}) + \sum_{s=0,1,r} D_s(\bar{K})u(s - \bar{K}) + D_s(-\bar{K})u(s + \bar{K}), \quad (113)$$

ce qui, à cause d'une simplification inattendue avec les contributions des parties finies  $i_{\alpha}^{\pm}$  et  $j_{\alpha}^{\pm}$ , ne fait pas intervenir comme points remarquables les (demi-)coefficients  $-r \pm \bar{K}$  des termes linéaires des polynômes  $P_{\sigma}^{\pm}(\lambda)$ . La fonction  $u(X)$  est ici celle de l'équation (32), et l'on a introduit les fonctions auxiliaires

$$C(\bar{K}) = \frac{3r(11 + \bar{K}^2)}{20(1 - r^2)}, \quad D_0(\bar{K}) = \frac{3\bar{K}^4}{20r}, \quad D_r(\bar{K}) = -\frac{3(\bar{K} - r)^4(\bar{K} + 4r)}{20r\bar{K}(1 - r^2)^2}$$

et  $D_1(\bar{K}) = -\frac{3r(\bar{K} - 1)^3}{20\bar{K}(1 - r^2)^2}[(r^2 - 2)\bar{K}(\bar{K} + 3) + 6r^2 - 2]$  (114)

Le tout reproduit, sous une forme synthétique, les résultats de la référence [35], et est en accord avec ceux de [5] qui étaient limités (pour  $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ ) à la partie imaginaire de l'énergie et à  $r = 1$ . En particulier,  $\Re \bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, 0)$  s'annule bien aux grands  $\bar{K}$  comme dans [35], d'où la règle de somme implicitement utilisée dans la référence [35],

$$\sum_{s=0,r,1} D_s(\bar{K}) + D_s(-\bar{K}) = 0 \quad \forall \bar{K} \quad (115)$$

qui implique que, pour  $0 < \bar{K} < \min(1, r)$ , la partie imaginaire de la somme sur  $s$  dans l'équation (113) se réduit à  $-\pi D_0(\mathbf{K})$  et le taux d'émission de paires particule-trou à

$$\Gamma_0^{(2)}(\mathbf{K}) = \frac{(\rho g)^2}{\hbar \epsilon_{\text{F}}} \frac{3\pi \bar{K}^4}{10r} \quad (116)$$

à l'ordre  $g^2$ . D'après la figure 1, et à juste titre,  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, 0)$  est une fonction  $C^{\infty}$  de  $\bar{K}$  sur  $\mathbb{R}^+$  sauf en  $\bar{K} = 1$ , en  $\bar{K} = r$  et, oubli regrettable de la référence [35], en  $\bar{K} = 0$ .

## 6.2. Une régularisation non perturbative de la divergence de la dérivée seconde de $\Delta E^{(2)}(\mathbf{K})$ à la surface de Fermi dans le cas $M = m$ (ou $r = 1$ )

Somme toute, le fait de pouvoir calculer analytiquement l'autoénergie au second ordre en  $g$  a comme conséquence la plus marquante la prédiction de singularités dans les dérivées troisièmes de  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$ . Afin d'en rendre plus accessible une signature expérimentale, il convient de chercher à réduire l'ordre des dérivées dans lesquelles ces singularités apparaissent, en identifiant le point le plus multiplement singulier dans le plan  $(\bar{K}, \varepsilon)$ . La discussion de la section 5 a fait apparaître dans ce plan des droites de singularité (84) et (85), sur lesquelles les polynômes  $P_g^\eta(\lambda)$  ont des racines égales à zéro ou deux, et des paraboles de singularité (82,83) sur lesquelles ces polynômes ont des racines doubles. Dans le demi-plan  $\bar{K} > 0$ , les droites de singularité se coupent en  $(\bar{K}, \varepsilon) = (1, 0)$ . Ce point se trouve sur l'une des paraboles seulement quand l'impureté a la même masse qu'un fermion, d'où le point magique considéré dans cette sous-section :

$$(\bar{K}, \varepsilon) \rightarrow (1, 0) \quad \text{pour } r = 1 \quad (117)$$

En particulier, les singularités associées se trouvent exactement à la surface de Fermi et, comme le suggère la référence [35] et comme nous allons le voir, apparaissent dans les dérivées d'ordre **deux** seulement.

L'observable ici la plus accessible dans une expérience d'atomes froids semble être l'énergie complexe  $\Delta E(\mathbf{K})$  de la quasi-particule, par simple spectroscopie de radio-fréquence entre un état interne de l'impureté non couplé aux fermions, et un état interne couplé. Le déplacement et l'élargissement de la raie dus à la présence des fermions donne accès aux parties réelle et imaginaire de  $\Delta E(\mathbf{K})$ , avec une incertitude qui a déjà atteint respectivement  $5 \cdot 10^{-3} \epsilon_F$  et  $10^{-4} \epsilon_F$  [8]. Nous admettrons que  $\Delta E(\mathbf{K})$  a été mesuré avec suffisamment bonne précision au voisinage de  $K = k_F$ , pour que l'on puisse en prendre numériquement la dérivée seconde par rapport à  $K$ . La théorie perturbative, dont les résultats, déjà publiés dans [35], ont été retrouvés ici en sous-section 6.1, conduit, pour une limite d'interaction faible prise à  $\bar{K}$  fixé différent de un, à

$$\begin{aligned} \lim_{g \rightarrow 0^-} \frac{d^2}{d\bar{K}^2} \frac{\Delta E(\mathbf{K}) - E_{\mathbf{K}}}{(\rho g)^2 / \epsilon_F} \Big|_{\bar{K} \rightarrow 1} &= -\frac{9}{4} \ln |\bar{K} - 1| - \frac{27}{20} (2 + \ln 2) \\ &+ \frac{9i\pi}{4} \left[ Y(\bar{K} - 1) - \frac{4}{5} \right] + o(1) \end{aligned} \quad (118)$$

de partie réelle logarithmiquement divergente et de partie imaginaire discontinue. Elle est cependant beaucoup plus floue lorsqu'on prend la limite à  $\bar{K} = 1$ ,

$$\lim_{g \rightarrow 0^-} \left[ \frac{d^2}{d\bar{K}^2} \frac{\Delta E(\mathbf{K}) - E_{\mathbf{K}}}{(\rho g)^2 / \epsilon_F} \right]_{\bar{K}=1} = +\infty \quad (119)$$

puisqu'elle ne précise pas comment la divergence se produit.

*6.2.1. Une approche heuristique auto-cohérente* Comment aller au-delà du résultat (119) en utilisant les ingrédients déjà disponibles dans le présent travail ? Il faut effectuer un traitement non perturbatif, par exemple une approximation auto-cohérente. Le plus

simple consiste à remplacer l'autoénergie  $\Sigma(\mathbf{K}, \omega)$ , qui apparaît dans l'équation implicite (110) sur l'énergie complexe, par son développement jusqu'à l'ordre deux inclus en  $g$ ,  $\rho g + \Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$ . Une amélioration simple de cette prescription minimaliste est d'y inclure la dernière contribution à  $\Sigma^{(3)}(\mathbf{K}, \omega)$  dans l'équation (19) par un décalage de champ moyen sur  $\omega$ , compte tenu du fait qu'à vecteur d'onde et pulsation fixés,

$$\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega - \rho g / \hbar) \stackrel{g \rightarrow 0^-}{\approx} \Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega) - \frac{\rho g}{\hbar} \partial_\omega \Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega) + O(g^2) \quad (120)$$

Physiquement, ce décalage prend en compte le fait que le déplacement de champ moyen  $\rho g$  subi par l'impureté est exactement le même dans tous les sous-espaces à zéro, une, deux, . . . paires particule-trou, une fois qu'a été prise la limite d'une interaction de portée nulle. Nous gardons donc l'approximation heuristique auto-cohérente (non perturbative)

$$\Delta E(\mathbf{K}) \stackrel{\text{heuris.}}{=} E_{\mathbf{K}} + \rho g + \Sigma^{(2)\text{p.a.}}(\mathbf{K}, \frac{\Delta E(\mathbf{K}) - \rho g}{\hbar}) \quad (121)$$

qui s'écrit, en termes d'une inconnue réduite  $\varepsilon_e$ , valeur effective complexe de la variable  $\varepsilon$  (d'où l'indice  $e$ ), sous la forme adimensionnée et compacte

$$-\varepsilon_e(\bar{K}) \stackrel{\text{heuris.}}{=} \left( \frac{\rho g}{\epsilon_F} \right)^2 \bar{\Sigma}^{(2)\text{p.a.}}(\bar{K}, \varepsilon_e(\bar{K})) \quad \text{où} \quad \varepsilon_e(\bar{K}) \equiv \frac{E_{\mathbf{K}} + \rho g - \Delta E(\mathbf{K})}{\epsilon_F} \quad (122)$$

que nous dérivons deux fois par rapport à  $\bar{K}$  pour identifier les dérivées utiles de  $\bar{\Sigma}^{(2)}$  :

$$-\frac{d^2 \varepsilon_e}{d\bar{K}^2} \stackrel{\text{heuris.}}{=} \left( \frac{\rho g}{\epsilon_F} \right)^2 \left[ \partial_{\bar{K}}^2 + 2 \frac{d\varepsilon_e}{d\bar{K}} \partial_{\bar{K}} \partial_\varepsilon + \left( \frac{d\varepsilon_e}{d\bar{K}} \right)^2 \partial_\varepsilon^2 + \frac{d^2 \varepsilon_e}{d\bar{K}^2} \partial_\varepsilon \right] \bar{\Sigma}^{(2)\text{p.a.}} \quad (123)$$

prises ici au point  $(\bar{K}, \varepsilon = \varepsilon_e(\bar{K}))$ . Rappelons que l'exposant p.a. signifie *prolongement analytique* aux valeurs complexes de  $\omega$  du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur.

*6.2.2. Singularité des dérivées secondes de  $\bar{\Sigma}^{(2)}$  et prédiction d'une loi d'échelle* Afin de voir comment la dérivée seconde de  $\varepsilon_e(\bar{K})$  se comporte au voisinage de  $\bar{K} = 1$  dans la limite  $g \rightarrow 0^-$ , il suffit dans un premier temps de déterminer les singularités des dérivées secondes de  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\mathbf{K}, \varepsilon)$  pour  $\varepsilon$  réel. En transposant au cas  $(\bar{K}, \varepsilon) \rightarrow (1, 0)$  les techniques développées dans la section 5, on constate que certaines compensations magiques, comme la quasi-identité de certaines racines  $\lambda_0^{(\eta\alpha)}$  et  $\lambda_0^{(\eta\beta)}$  des polynômes  $P_\alpha^\eta$  et  $P_\beta^\eta$ , qui rendaient les dérivées d'ordre deux régulières, ne se produisent plus, et l'on aboutit laborieusement aux résultats suivants :

$$\partial_{\bar{K}}^2 \bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K} = 1, \varepsilon) \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} -\frac{9}{4} \ln |\varepsilon| + O(1) \quad (124)$$

$$\partial_\varepsilon^2 \bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K} = 1, \varepsilon) \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} \frac{9}{128} (\ln |\varepsilon|)^2 + O(\ln |\varepsilon|) \quad (125)$$

$$\partial_\varepsilon \partial_{\bar{K}} \bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K} = 1, \varepsilon) \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} \frac{9}{8} \ln |\varepsilon| + O(1) \quad (126)$$

Or l'inconnue  $\varepsilon_e(\bar{K})$  est du second ordre en  $g$ , ainsi que sa dérivée première, donc les dérivées (125) et (126), qui divergent seulement logarithmiquement en  $g$ , sont écrasées dans l'équation (123) par les facteurs  $d\varepsilon_e/d\bar{K} = O(g^2)$  et  $(d\varepsilon_e/d\bar{K})^2 = O(g^4)$ . Quant à la dérivée première par rapport à  $\varepsilon$  dans (123), qui ne diverge pas, elle est écrasée par le

facteur  $(\rho g/\epsilon_F)^2$ , comme on le voit après regroupement avec le terme du premier membre dans cette même équation. D'où la simplification drastique dans la limite  $g \rightarrow 0^-$ , même sur un voisinage de  $\bar{K} = 1$  :

$$-\partial_{\bar{K}}^2 \varepsilon_e(\bar{K}) \stackrel{\text{approx.}}{=} \left(\frac{\rho g}{\epsilon_F}\right)^2 \partial_{\bar{K}}^2 \bar{\Sigma}^{(2)\text{p.a.}}(\bar{K}, \varepsilon_e(\bar{K})) + O\left[\left(\frac{\rho g}{\epsilon_F}\right)^4 \ln\left|\frac{\rho g}{\epsilon_F}\right|\right] \quad (127)$$

Notre approche auto-cohérente heuristique prédit donc que le premier membre de l'équation (119), évalué en  $\bar{K} = 1$ , diverge logarithmiquement lorsque  $g \rightarrow 0^-$  :

$$\left[ \frac{d^2}{d\bar{K}^2} \frac{\Delta E(\mathbf{K}) - E_{\mathbf{K}}}{(\rho g)^2/\epsilon_F} \right]_{\bar{K}=1} \stackrel{\text{heuris.}}{=} -\frac{9}{4} \ln \left[ \left(\frac{\rho g}{\epsilon_F}\right)^2 \right] + O(1) \quad (128)$$

Il est en fait possible de retrouver ce résultat, de le rendre plus précis et de l'étendre à  $\bar{K} \neq 1$ , en effectuant un calcul astucieux de la dérivée seconde de  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$  par rapport à  $\bar{K}$ . Repartons des identités (29) et (45), et obtenons les dérivées secondes des quantités intégrales  $I_\sigma^\eta(\lambda)$ , avec  $\lambda = 2$  ou  $\Lambda$ ,  $\eta = \pm$  et  $\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ , en dérivant leurs expressions définitives (43) et (44) par rapport à  $\bar{K}$  sous le signe somme [la même astuce vaut pour la dérivée par rapport à  $\varepsilon$  et conduit fort directement à (125) et (126)]. Comme on peut le vérifier sur les équations (36,37,38,39),  $\partial_{\bar{K}} P_\sigma^\eta(t) = 2\eta t$  à  $\varepsilon$  et  $t$  fixés donc

$$\partial_{\bar{K}}^2 I_\sigma^\eta(\lambda) = \int_0^\lambda dt 4t^2 u[P_\sigma^\eta(t)] \quad \text{et} \quad \partial_{\bar{K}}^2 J_\sigma^\eta(\lambda) = \int_0^\lambda dt 4t u[P_\sigma^\eta(t)] \quad (129)$$

où la fonction  $u$  est celle de l'équation (32) et  $u^{[2]}$  dans (43,44) une de ses primitives d'ordre deux. Pour voir lesquels de ces termes ont une limite finie lorsque  $(\bar{K}, \varepsilon) \rightarrow (1, 0)$ , et ne peuvent contribuer à  $\partial_{\bar{K}}^2 \bar{\Sigma}^{(2)}$  que sous la forme d'un fond lentement variable, il suffit d'y remplacer les trinômes  $P_\sigma^\eta$  par leur valeur pour  $\bar{K} = 1$  et  $\varepsilon = 0$ , voir le tableau 1.

$\sigma$	$\eta = +$	$\eta = -$
$\alpha$	$2t^2 + 4t$	$2t^2$
$\beta$	$4t$	$0$
$\gamma$	$t^2 + 2t$	$t^2 - 2t$
$\delta$	$2t^2$	$2t^2 - 4t$

**Table 1.** Les trinômes  $P_\sigma^\eta(t)$  pour le point multiplement critique  $(\bar{K}, \varepsilon) = (1, 0)$ .

On voit donc que seul le polynôme  $P_\beta^-(t)$  conduit à une divergence. Comme  $r = 1$ , il se manifeste seulement via la fonctionnelle  $J[P]$ , ce qui est particulièrement net sur l'équation (80), si bien que

$$\partial_{\bar{K}}^2 \bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon) \stackrel{(\bar{K}, \varepsilon) \rightarrow (1, 0)}{=} -\frac{9}{32} \partial_{\bar{K}}^2 J_\beta^-(2) + \frac{9}{40} (-17 + 14 \ln 2 + 2i\pi) + o(1) \quad (130)$$

où la constante additive a été obtenue en spécialisant à  $\varepsilon = 0$  et en comparant à (118). Pour calculer l'intégrale donnant  $\partial_{\bar{K}}^2 J_\beta^-(2)$  dans (129), il reste à utiliser l'équation



(54) avec  $Q_I(t) = 4t$  et à en simplifier la partie imaginaire à l'aide de la relation  $-\text{signe}(x)[Y(2 + \frac{y}{x}) - Y(\frac{y}{x})] = Y(y) - Y(2x + y)$  vraie pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  :

$$\frac{1}{8} \partial_{\bar{K}}^2 J_{\beta}^{-}(2) = u(\varepsilon) + [1 - (\frac{\varepsilon/4}{\bar{K} - 1})^2] \{u[\varepsilon - 4(\bar{K} - 1)] - u(\varepsilon)\} - \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon/4}{\bar{K} - 1} \quad (131)$$

Pour poursuivre et en tirer pleinement les conséquences dans l'équation (127), il faut étendre ce résultat au cas  $\Im(-\varepsilon) > 0$  puis le prolonger analytiquement au cas  $\Im(-\varepsilon) < 0$ , ce à quoi nous allons nous employer. Mais remarquons-en d'abord une propriété remarquable : les termes du second membre de (131) sont des fonctions de  $(\bar{K} - 1, \tau)$  positivement homogènes de degré zéro [c'est-à-dire invariantes par multiplication globale de  $\bar{K} - 1$  et  $\varepsilon$  par tout nombre réel  $\tau > 0$ ], à l'exception du premier terme. Ce premier terme fixe donc la valeur globale de (131); comme  $\varepsilon$  doit être pris ici d'ordre  $|\varepsilon_e(\bar{K} = 1)| \approx (\rho g / \epsilon_F)^2$ , il conduit immédiatement au comportement logarithmique (128). Les autres termes de (131) donnent la dépendance en  $\bar{K} - 1$ , non décrite par (128), et qui se produit sur une échelle caractéristique  $|\varepsilon| \approx (\rho g / \epsilon_F)^2$ . Nous obtenons donc, dans notre approche heuristique auto-cohérente (121), la loi d'échelle suivante pour la dérivée seconde de l'énergie complexe de l'impureté au voisinage de la surface de Fermi ( $\bar{K} \rightarrow 1$ ) dans la limite d'interaction faible ( $g \rightarrow 0^-$ ) :

$$\frac{d^2}{d\bar{K}^2} \frac{\Delta E(\mathbf{K}) - E_{\mathbf{K}}}{(\rho g)^2 / \epsilon_F} \stackrel{\text{heuris.}}{=} -\frac{9}{4} \ln \left[ \left( \frac{\rho g}{\epsilon_F} \right)^2 \right] + F \left( \frac{4(\bar{K} - 1)}{(\rho g / \epsilon_F)^2} \right) + o(1) \quad (132)$$

où la fonction d'échelle  $F(x)$  reste à préciser. Une conséquence simple, mais remarquable, de cette loi d'échelle est que la dérivée **troisième** de l'énergie complexe de l'impureté ne tend pas uniformément vers zéro dans la limite d'interaction faible :

$$\frac{d^3}{d\bar{K}^3} \frac{\Delta E(\mathbf{K})}{\epsilon_F} \xrightarrow{g \rightarrow 0^-} \not\rightarrow 0 \quad \text{sur un voisinage de } \bar{K} = 1 \quad (133)$$

*6.2.3. Prolongement analytique à une variable énergie complexe et émergence numérique de la loi d'échelle* Afin de voir émerger la loi d'échelle (132) lorsqu'on réduit la force des interactions, nous avons mis en œuvre numériquement le programme heuristique auto-cohérent proposé par l'équation (122). Ceci nous a conduit à surmonter un obstacle d'ordre pratique, à savoir la détermination du prolongement analytique de  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \varepsilon)$  aux valeurs complexes de  $\varepsilon$ . Donnons les pistes que nous avons suivies pour sa réalisation. (i) Les résultats de la section 4 doivent se généraliser directement au cas  $\Im(-\varepsilon) > 0$  : puisque l'équation (16) comporte au dénominateur l'énergie  $\hbar\omega + i0^+$ , ils correspondent au demi-plan complexe supérieur pour la variable énergie  $z$  de la résolvante du Hamiltonien  $\hat{G}(z)$ , ce qui permet de passer à des  $\hbar\omega$  de partie imaginaire positive dans l'équation (20), donc à des  $\varepsilon$  de partie imaginaire négative, sans rencontrer la ligne de coupure de la résolvante, donc sans avoir encore à effectuer de prolongement analytique. (ii) Dans ce cas favorable  $\Im(-\varepsilon) > 0$ , les racines des polynômes  $P_{\sigma}^{\eta}(\lambda)$  sont toutes complexes, si bien qu'il faut utiliser la forme (62) de la fonctionnelle  $J_2[P_{\sigma}^{\eta}]$ , et la forme (55) de la fonctionnelle  $I[P_{\sigma}^{\eta}](\lambda)$ , dans laquelle on aura pris soin de remplacer  $u[P_{\sigma}^{\eta}(\lambda)]$  par  $\ln[-P_{\sigma}^{\eta}(\lambda)]$ , compte tenu de la remarque qui suit l'équation (33) et du fait que  $-P_{\sigma}^{\eta}(\lambda)$  tend vers l'axe

réel depuis le demi-plan complexe supérieur lorsque  $\Im(-\varepsilon) \rightarrow 0^+$ , ou compte tenu du résultat de l'intégration de (23) pour  $\varepsilon$  positif non infinitésimal, qui conduit formellement à  $u(x \pm y - i\varepsilon) = \ln(-x \mp y + i\varepsilon)$  donc à  $u(z) = \ln(-z)$ . Dans les expressions que nous venons de citer, rappelons-le,  $\ln$  et  $\text{Li}_2$  sont les déterminations habituelles des fonctions logarithme et dilogarithme complexes, de lignes de coupure  $\mathbb{R}^-$  et  $[1, +\infty[$ . (iii) Pour vérifier les deux assertions (i) et (ii) précédentes, on peut prendre la limite  $\Im(-\varepsilon) \rightarrow 0^+$  dans ces généralisations de (55) et (62), dans le cas où les racines  $\lambda_0^c$  du polynôme  $P_\sigma^\eta(\lambda)$  ont des limites réelles  $\lambda_0^r$ . On doit alors retrouver exactement les expressions (54) et (60). Nous avons vérifié scrupuleusement que c'est bien le cas, en utilisant la relation  $\Pi_{[0,\lambda]}(y) - \Pi_{[0,\lambda]}(x) = Y[(\lambda - x)(\lambda - y)] - Y[xy]$  satisfaite par la fonction porte  $\Pi_{[0,\lambda]}$  pour tous les réels  $x < y$ , ainsi que la propriété

$$\frac{d}{d\Im(-\varepsilon)}[P_\sigma^\eta(\lambda_0^c)] = 0 \implies \frac{d\lambda_0^c}{d\Im(-\varepsilon)} \xrightarrow{\Im(-\varepsilon) \rightarrow 0^+} \frac{1}{P'(\lambda_0^r)} \quad (134)$$

qui permet de savoir si les racines  $\lambda_0^c$ , donc les arguments de  $\ln$  et de  $\text{Li}_2$ , atteignent l'axe réel depuis le demi-plan complexe inférieur ou supérieur, et conduit à :

$$\ln(\lambda - \lambda_0^c) \xrightarrow{\Im(-\varepsilon) \rightarrow 0^+} \ln|\lambda - \lambda_0^r| - i\pi \frac{P'(\lambda_0^r)}{|P'(\lambda_0^r)|} Y(\lambda_0 - \lambda) \quad (135)$$

$$\text{Li}_2\left(\frac{\lambda}{\lambda_0^c}\right) \xrightarrow{\Im(-\varepsilon) \rightarrow 0^+} \text{Li}_2\left(\frac{\lambda}{\lambda_0^r}\right) + i\pi \frac{P'(\lambda_0^r)}{|P'(\lambda_0^r)|} \ln\left|\frac{\lambda_0^r}{\lambda}\right| [Y(\lambda - \lambda_0^r) - Y(-\lambda_0^r)] \quad (136)$$

sachant que  $\text{signe}(\lambda)Y(\lambda/\lambda_0^r - 1) = Y(\lambda - \lambda_0^r) - Y(-\lambda_0^r)$  et  $\text{Li}_2(x \pm i0^+) = \pm i\pi(\ln|x|)Y(x - 1)$  pour tout réel  $x$ . Dans ces expressions,  $\lambda$  est un nombre réel quelconque et le polynôme  $P$  est la limite du polynôme  $P_\sigma^\eta$  pour  $\varepsilon$  réel. (iv) Pour enfin prolonger analytiquement les fonctionnelles  $I[P]$  et  $J[P]$ , donc l'autoénergie  $\bar{\Sigma}^{(2)}(\mathbf{K}, \varepsilon)$  du demi-plan  $\Im(-\varepsilon) > 0$  au demi-plan  $\Im(-\varepsilon) < 0$ , il suffit de savoir si l'argument  $Z$  de chaque fonction  $\ln$  et  $\text{Li}_2$  passe du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur ou inversement. Dans le premier cas, on déplace la ligne de coupure de  $\ln$  du demi-axe réel négatif au demi-axe imaginaire pur négatif, et celle de  $\text{Li}_2$  de  $[1, +\infty[$  à  $1 + i\mathbb{R}^-$ , c'est-à-dire qu'on leur fait subir une rotation d'angle respectivement  $\pi/2$  et  $-\pi/2$  :

$$\ln^{\text{p.a.}\downarrow} Z = \ln_{3\pi/2} Z \text{ et } \text{Li}_2^{\text{p.a.}\downarrow}(Z) = \text{Li}_2(Z) + \ln_\pi Z [\ln_\pi(1 - Z) - \ln_{\pi/2}(1 - Z)] \quad (137)$$

où la flèche  $\downarrow$  rappelle le mouvement de  $Z$  dans le plan complexe, et

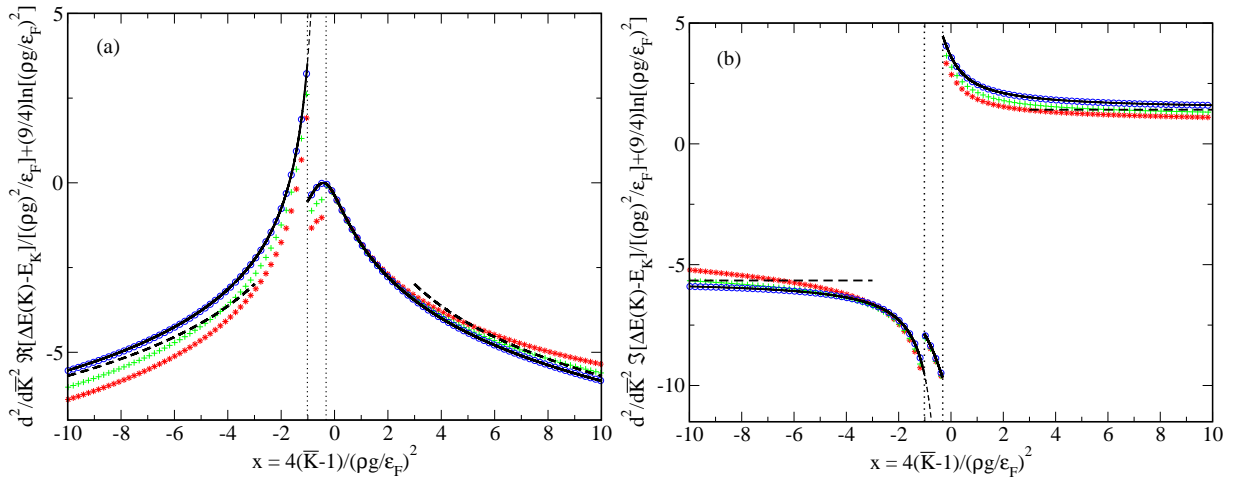
$$\ln_\theta Z \equiv \ln|Z| + i \arg_\theta Z \quad (138)$$

avec la détermination  $\theta - 2\pi < \arg_\theta Z \leq \theta$  de l'argument du nombre complexe  $Z$ . Dans le cas contraire où  $Z$  passe du demi-plan inférieur au demi-plan supérieur, on fait tourner la ligne de coupure de  $\ln$  d'un angle  $-\pi/2$ , pour la faire passer au demi-axe imaginaire pur positif, et on fait tourner celle de  $\text{Li}_2$  d'un angle  $\pi/2$ , pour la faire passer à  $1 + i\mathbb{R}^+$  :

$$\ln^{\text{p.a.}\uparrow} Z = \ln_{\pi/2} Z \text{ et } \text{Li}_2^{\text{p.a.}\uparrow}(Z) = \text{Li}_2(Z) + \ln_\pi Z [\ln_\pi(1 - Z) - \ln_{3\pi/2}(1 - Z)] \quad (139)$$

Nous avons mis en œuvre numériquement cette procédure de prolongement analytique, en résolvant l'équation auto-cohérente (122) par itération et en calculant la dérivée seconde de  $\varepsilon_e(\bar{K})$  par la méthode du point milieu. Nous montrons le résultat sur

la figure 2, pour trois valeurs de  $\rho g/\epsilon_F$  correspondant à des interactions de faibles à très faibles. Le choix des origines et des unités sur les axes présuppose une loi d'échelle de la forme (132), vers laquelle les résultats numériques semblent bien converger. Remarquons cependant que, même dans cette approche auto-cohérente, la dérivée seconde de  $\epsilon_e(\bar{K})$  présente, en fonction de  $\bar{K}$ , des discontinuités, qui affectent aussi bien la partie réelle que la partie imaginaire, et qui ne disparaissent pas toutes lorsque  $\rho g/\epsilon_F \rightarrow 0^-$ . Nous allons voir que la position et le nombre de ces discontinuités, malheureusement, n'ont guère de signification physique puisqu'ils dépendent de la forme sous laquelle on écrit les différentes fonctions avant de les prolonger analytiquement.



**Figure 2.** Dérivée seconde de l'énergie complexe de l'impureté [(a) : partie réelle, (b) : partie imaginaire] obtenue par résolution numérique de l'équation auto-cohérente (122), pour un rapport de masse  $r = M/m = 1$  et des valeurs de  $\rho g/\epsilon_F$  égales à  $-0,15$  (étoiles rouges),  $-0,1$  (signes plus verts) et  $-0,01$  (cercles bleus), la dernière valeur ayant en pratique atteint la limite  $g \rightarrow 0^-$ . Dans le système d'unités choisi, on voit bien émerger une loi d'échelle de la forme (132). Trait plein épais noir : prédiction analytique dans la limite  $g \rightarrow 0^-$  ; les emplacements des discontinuités correspondantes dans la dérivée seconde sont repérés par les pointillés verticaux d'abscisses  $x'_{\text{saut}}$  et  $x_{\text{saut}}$  de gauche à droite, voir l'équation (144). Tiré fin noir : prédiction analytique correspondant à une autre écriture possible de la fonction  $\partial_{\bar{K}}^2 J_{\beta}^{-}(2)$  avant son prolongement analytique ; elle diffère de la précédente seulement dans l'intervalle entre les deux pointillés verticaux. Tiré épais noir : théorie perturbative (118) déduite de la référence [35], limitée à son domaine de validité, c'est-à-dire aux ailes.

Pour terminer, montrons comment obtenir analytiquement la limite des résultats de la figure 2 lorsque  $g \rightarrow 0^-$ , c'est-à-dire comment obtenir une expression explicite de la fonction d'échelle correspondante  $F(x)$ , où  $x = 4(\bar{K} - 1)/(\rho g/\epsilon_F)^2$ . On prend comme point de départ les équations (130) et (131), qu'il est légitime d'étendre directement (sans prolongement analytique) aux valeurs complexes de  $\epsilon$  avec  $\Im(-\epsilon) > 0$ , en considérant formellement que  $u(z) = \ln(-z)$  sur  $\mathbb{C}$ , où  $\ln$  est la branche principale du logarithme complexe, pour obtenir

$$\partial_{\bar{K}}^2 \bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, \epsilon)|_{\Im(-\epsilon) > 0} \stackrel{(\bar{K}, \epsilon) \rightarrow (1, 0)}{=} -\frac{9}{4} \left\{ \ln\left[\left(\frac{\rho g}{\epsilon_F}\right)^2\right] + f_x(-\bar{\epsilon}) \right\} + C_{\text{fond}} + o(1) \quad (140)$$

avec  $\bar{\varepsilon} \equiv \varepsilon/(\rho g/\epsilon_F)^2$ ,  $C_{\text{fond}} = (9/20)(7 \ln 2 - 6 + i\pi)$  et

$$f_x(-\bar{\varepsilon})|_{\Im(-\bar{\varepsilon})>0} = \ln(x - \bar{\varepsilon}) - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{x^2} \ln(1 - x/\bar{\varepsilon}) - \frac{\bar{\varepsilon}}{x} \quad (141)$$

où nous avons utilisé le fait que la fonction  $x \mapsto \ln(x - \bar{\varepsilon}) - \ln(-\bar{\varepsilon}) - \ln(1 - x/\bar{\varepsilon})$ , qui est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  puisque les arguments du logarithme complexe ne peuvent y croiser sa ligne de coupure  $\mathbb{R}^-$ , est nulle en  $x = 0$  et de dérivée partout nulle, donc est identiquement nulle. Ensuite, il faut prolonger analytiquement la fonction  $f_x(-\bar{\varepsilon})$  de  $\Im(-\bar{\varepsilon}) > 0$  à  $\Im(-\bar{\varepsilon}) < 0$ , à  $\bar{K} - 1$  donc  $x$  fixé, en suivant la procédure exposée autour des équations (137) et (139). L'argument  $x - \bar{\varepsilon}$  du premier logarithme franchit l'axe réel de haut en bas ; l'argument  $1 - x/\bar{\varepsilon}$  du second logarithme franchit l'axe réel de bas en haut si  $x > 0$ , et de haut en bas si  $x < 0$ . On obtient finalement

$$f_x^{\text{p.a.}\downarrow}(-\bar{\varepsilon}) = \ln_{3\pi/2}(x - \bar{\varepsilon}) - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{x^2} \ln_{\pi Y(-x)+\pi/2}(1 - x/\bar{\varepsilon}) - \frac{\bar{\varepsilon}}{x} \quad (142)$$

La fonction d'échelle vaut alors

$$F(x) = -\frac{9}{4} f_x^{\text{p.a.}\downarrow}(-\bar{\varepsilon}_e^{(2)}(\bar{K} = 1)) + C_{\text{fond}} \quad (143)$$

où  $-\bar{\varepsilon}_e^{(2)}(\bar{K}) = (\Delta E^{(2)}(\bar{K}) - E_{\mathbf{K}} - \rho g)/[(\rho g)^2/\epsilon_F] = \bar{\Sigma}^{(2)}(\bar{K}, 0)$  est la valeur de  $-\bar{\varepsilon}_e(\bar{K})$  au second ordre de la théorie des perturbations, que l'on peut déduire de l'équation (113) ou de la référence [35].

On constate sur la figure 2 que les résultats numériques auto-cohérents convergent bien vers cette fonction d'échelle  $F(x)$  lorsque  $\rho g/\epsilon_F \rightarrow 0^-$ . Les discontinuités observées en fonction de  $x$  se produisent lorsque les arguments des logarithmes dans l'équation (142) deviennent imaginaires purs donc franchissent leur ligne de coupure :

$$x_{\text{saut}} = \Re[\bar{\varepsilon}_e^{(2)}(\bar{K} = 1)] \quad \text{et} \quad x'_{\text{saut}} = \frac{1}{\Re[1/\bar{\varepsilon}_e^{(2)}(\bar{K} = 1)]} \quad (144)$$

ce qui entraîne dans  $F(x)$  un saut imaginaire pur en  $x = x_{\text{saut}}$  (le premier logarithme est de préfacteur réel) et un saut complexe en  $x = x'_{\text{saut}}$  (le deuxième logarithme est de préfacteur complexe). Les valeurs des abscisses (144) sont en fait dans l'ordre décroissant, et sont repérées par des pointillés verticaux sur la figure 2.

Les positions et le nombre de ces discontinuités prédites, ainsi donc que les valeurs de la fonction d'échelle  $F(x)$  entre elles, sont en fait arbitraires. Pour le voir, il suffit de choisir pour la fonction  $f_x(-\bar{\varepsilon})$  une forme différente mais équivalente *avant* prolongement analytique. La propriété énoncée après l'équation (141) permet d'écrire

$$f_x(-\bar{\varepsilon})|_{\Im(-\bar{\varepsilon})>0} = \left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{x^2}\right) [\ln(x - \bar{\varepsilon}) - \ln(-\bar{\varepsilon})] + \ln(-\bar{\varepsilon}) - \frac{\bar{\varepsilon}}{x} \quad (145)$$

dont le prolongement analytique aux valeurs négatives de  $\Im(-\bar{\varepsilon})$  suivant les *mêmes* prescriptions (137) et (139) conduit à

$$f_x^{\text{p.a.}\downarrow}(-\bar{\varepsilon}) \stackrel{\text{bis}}{=} \left(1 - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{x^2}\right) [\ln_{3\pi/2}(x - \bar{\varepsilon}) - \ln_{3\pi/2}(-\bar{\varepsilon})] + \ln_{3\pi/2}(-\bar{\varepsilon}) - \frac{\bar{\varepsilon}}{x} \quad (146)$$

La fonction d'échelle correspondante  $F_{\text{bis}}(x)$ , représentée en tireté sur la figure 2, diffère de celle déduite de (142) entre les deux pointillés verticaux ( $x'_{\text{saut}} < x < x_{\text{saut}}$ ) ; elle

présente une discontinuité complexe (au lieu d'imaginaire pure) en  $x = x_{\text{saut}}$ , et ne présente plus de discontinuité en  $x = x'_{\text{saut}}$ .

Peut-on faire disparaître la discontinuité restante, du moins sur la partie réelle de  $F(x)$ ? En venant de  $x = -\infty$ , on démarre dans un feuillet gauche de la fonction (146), que l'on peut suivre continûment jusqu'à  $x = +\infty$  en faisant passer l'angle de la ligne de coupure de  $3\pi/2$  à  $2\pi$ . De même, en commençant en  $x = +\infty$ , on peut suivre un feuillet droit de la même fonction (146) jusqu'à  $x = -\infty$ , en faisant pivoter la ligne de coupure de  $3\pi/2$  à  $\pi$ . Comme  $\ln_{2\pi}(x - \bar{\varepsilon}) = 2i\pi + \ln_{\pi}(x - \bar{\varepsilon})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout complexe  $-\bar{\varepsilon}$  de partie imaginaire négative, les déterminations de  $f_x^{\text{p.a.}\downarrow}(-\bar{\varepsilon})$  dans les deux feuillets diffèrent de la quantité  $2i\pi[1 - (\bar{\varepsilon}/x)^2]$  qui, ni nulle ni imaginaire pure, rend une discontinuité inévitable.

En définitive, nous ne savons pas comment déterminer la vraie valeur physique de la fonction d'échelle  $F(x)$ , même dans le cadre apparemment innocent de l'approximation auto-cohérente (121), du moins pour  $|x| \lesssim 1$ , c'est-à-dire  $4|\bar{K} - 1| \lesssim (\rho g/\epsilon_F)^2$ .

### 6.3. Les moments de l'impulsion de la paire particule-trou émise par l'impureté, d'après la règle d'or de Fermi. Application au taux d'amortissement et au coefficient de diffusion de l'impulsion de l'impureté

Nous supposons dans cette partie que l'impureté est préparée à l'instant  $t = 0$  dans l'état de vecteur d'onde  $\mathbf{K}$  bien défini, en présence de la mer de Fermi non perturbée. Cet état initial du système est directement couplé, par le potentiel d'interaction  $\hat{V}$  entre impureté et fermions, aux états excités fermioniques à une paire particule-trou, l'impureté encaissant alors le changement d'impulsion correspondant. Nous souhaitons décrire l'évolution du système qui en résulte aux temps courts, dans le régime d'interaction faible.

À la limite thermodynamique, l'état initial est un état discret  $|i\rangle$ , et les états finals  $|f\rangle$  à une paire particule-trou font partie d'un continuum. La règle d'or de Fermi donne alors le taux d'émission d'une paire particule-trou par l'impureté, au second ordre inclus en la constante de couplage  $g$ . Ici, le taux de transition élémentaire de  $|i\rangle$  vers  $|f\rangle$  s'écrit simplement  $\delta\Gamma_{if} = (2\pi g^2/\hbar)\delta(E_f - E_i)$ , où  $E_{i/f}$  est l'énergie cinétique totale de l'impureté et des fermions, dans l'état initial ou final.

Avec les techniques de calcul développées dans cet article, on a alors facilement accès à tous les moments du vecteur d'onde  $\mathbf{k} - \mathbf{q}$  de la paire particule-trou émise, tels que les prédit la règle d'or de Fermi donc à l'ordre zéro en  $g$  :

$$\langle (\mathbf{k} - \mathbf{q})^n \rangle^{(0)} = \frac{2\pi g^2}{\hbar\Gamma_0^{(2)}(\mathbf{K})} \int_{q < k_F < k} \frac{d^3q d^3k}{(2\pi)^6} (\mathbf{k} - \mathbf{q})^n \delta(E_{\mathbf{K} - \mathbf{k} + \mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{K}}) \quad (147)$$

où la puissance entière  $\mathbf{k}^n$  d'un vecteur  $\mathbf{k}$  est le vecteur  $\mathbf{k}||\mathbf{k}|^{n-1}$  pour  $n$  impair, et le scalaire  $||\mathbf{k}|^n$  pour  $n$  pair :

$$\mathbf{k}^n \equiv \mathbf{k}||\mathbf{k}|^{n-1} \quad (n \text{ impair}), \quad \mathbf{k}^n \equiv ||\mathbf{k}|^n \quad (n \text{ pair}) \quad (148)$$

Le taux total de départ  $\Gamma_0(\mathbf{K})$ , ici écrit à l'ordre deux en  $g$ , est simplement le taux total d'émission d'une paire à cet ordre, et est déjà donné par (112)-(113). Par conservation de

l'impulsion totale, ceci donne également accès aux moments du changement d'impulsion  $\delta\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{fin}} - \mathbf{K}$  subi par l'impureté, à l'ordre zéro en  $g$ , ce que nous exploiterons dans la sous-section 6.3.3 :

$$\langle(\delta\mathbf{K})^n\rangle^{(0)} = (-1)^n \langle(\mathbf{k} - \mathbf{q})^n\rangle^{(0)} \quad (149)$$

Avant de procéder au calcul de ces moments, effectuons une **mise en garde** dans la limite d'une interaction de portée nulle. On a en effet pris une telle limite dans l'équation (147),  $b \rightarrow 0$  dans le modèle sur réseau. Mais la distribution en impulsion de l'impureté en interaction avec les fermions présente alors une queue asymptotique en  $C/\mathcal{K}^4$  aux grands nombres d'onde  $\mathcal{K}$ , si bien que son énergie cinétique moyenne doit diverger [46, 47, 48, 49, 44], ainsi que les moments de  $\delta\mathbf{K}$  et de  $\mathbf{k} - \mathbf{q}$  d'ordre  $n > 1$ , physiquement ici à cause des processus de transition non résonnants négligés par la règle d'or de Fermi mais qu'il est facile de prendre en compte par calcul de l'opérateur d'évolution au premier ordre en  $g$ . Aussi l'expression (147), que l'on peut prendre comme une donnée mathématiquement intéressante en soi et qui apparaît dans les modèles d'équations cinétiques comme celui de la référence [50], n'a-t-elle, pour une interaction de portée nulle, un sens physique clair que pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

Cependant, l'expression (147) est **légitime** dans le cadre de notre traitement perturbatif de l'interaction sur réseau, qui fait tendre la constante de couplage  $g$  vers zéro à portée de l'interaction (au pas du réseau)  $b$  fixée : au contraire du régime expérimental habituel pour les atomes froids, la diffusion impureté-fermion à énergie nulle est supposée être fortement non résonnante, avec une longueur de diffusion  $a$  bien plus petite que  $b$  en valeur absolue, voir les équations (8) et (13). Comme la constante  $C$  est proportionnelle à la dérivée de l'énergie totale par rapport à  $1/a$ , non seulement pour une interaction de portée nulle [46, 47] mais aussi dans le modèle sur réseau [49, 44] ici dès que  $k_F b \ll 1$  et  $Kb \ll 1$ , et comme la correction dominante à l'énergie du gaz parfait est ici celle de champ moyen  $\rho g$ , on trouve que  $C = O(\rho a^2)$  et que la contribution du terme en  $C/\mathcal{K}^4$  aux moments d'ordre  $n \geq 2$  du vecteur d'onde de l'impureté est  $O(\rho a^2/b^{n-1})$ , compte tenu de la restriction des vecteurs d'onde à la première zone de Brillouin. Cette contribution, effectivement divergente si  $b \rightarrow 0$  à  $a$  fixé, est en réalité du second ordre en  $g$ , et bien négligeable dans les expressions (147) et (149) d'ordre zéro en  $g$ .

*6.3.1. Cas des moments d'ordre  $n$  pair* Nous pouvons réutiliser directement les calculs de la sous-section 3.2, avec la simplification notable que  $\hbar\omega = E_{\mathbf{K}}$  dans l'équation (17), donc que  $\varepsilon = 0$  dans l'équation (20). De plus, seule la partie imaginaire du résultat importe,  $\Im[1/F_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{K}, E_{\mathbf{K}})]$  donnant bien  $\pi$  fois le delta de Dirac de conservation de l'énergie cinétique de la règle d'or de Fermi. Ce qui nous conduit rapidement à

$$\langle(\mathbf{k} - \mathbf{q})^n\rangle^{(0)} \stackrel{n \text{ pair}}{=} \frac{k_F^n (\rho g)^2}{\epsilon_F \hbar \Gamma_0^{(2)}(\mathbf{K})} \frac{9r}{4\bar{K}} \int_0^{+\infty} d\lambda \lambda^n \Im[\psi^+(\lambda) - \psi^-(\lambda)] \quad (150)$$

où  $\bar{K}$  est le nombre d'onde initial de l'impureté adimensionné par  $k_F$ , et  $\psi^\pm(\lambda)$  est donné par (34) ou (35) suivant que  $\lambda$  est inférieur ou supérieur à 2. Comme dans la sous-section 4.1, on écrit l'intégrale sur  $[2, +\infty[$  comme la différence des intégrales sur  $[0, +\infty[$  et  $[0, 2]$



du même intégrand. Puisque tous les polynômes  $P_\sigma^\eta(\lambda)$  s'annulent maintenant en zéro, il est avantageux d'introduire les polynômes réduits  $p_\sigma^\eta(\lambda) \equiv P_\sigma^\eta(\lambda)/\lambda$  :

$$p_\alpha^\eta(\lambda) = (1+r)\lambda + 2(r + \eta\bar{K}), \quad p_\beta^\eta(\lambda) = (1-r)\lambda + 2(r + \eta\bar{K}) \quad (151)$$

$$p_\gamma^\eta(\lambda) = \lambda + 2\eta\bar{K}, \quad p_\delta^\eta(\lambda) = (1+r)\lambda + 2(-r + \eta\bar{K}) \quad (152)$$

tous de degré un, à racine réelle  $\lambda_0^{(\eta\sigma)}$ , pour  $\sigma \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  et  $\eta = \pm$ . Les expressions (34) et (35) font apparaître les fonctions  $\mathfrak{S}u^{[s]}(X) = \pi Y(X)X^s/s!$ ,  $s = 2$  ou  $s = 3$ , évaluées en les valeurs des polynômes  $P_\sigma^\eta(\lambda)$ . Puisque  $\lambda > 0$ , on peut y remplacer  $Y[P_\sigma^\eta(\lambda)]$  par  $Y[p_\sigma^\eta(\lambda)]$ ; quant aux puissances des  $P_\sigma^\eta(\lambda)$ , elles font sortir des facteurs  $\lambda^s$ , qui nous amènent directement, sans intégrer par parties, à une fonctionnelle de type  $\int_0^\lambda dt \mathcal{Q}(t)Y[p(t)]$ , où  $\mathcal{Q}(t)$  est un polynôme quelconque et  $p(t)$  est un polynôme de degré un à coefficients réels. En écrivant  $p(t) = at + b$ , de racine  $\lambda_0 = -b/a$ , on peut simplifier la partie imaginaire de la relation (54) en

$$\int_0^\lambda dt \mathcal{Q}(t)Y(at+b) = [\mathcal{Q}^{[1]}(\lambda) - \mathcal{Q}^{[1]}(-\frac{b}{a})]Y(a\lambda+b) + \mathcal{Q}^{[1]}(-\frac{b}{a})Y(b) \quad (153)$$

En pratique,  $p(t)$  vaut l'un des polynômes réduits  $p_\sigma^\eta(\lambda)$ , et  $\mathcal{Q}(t)$  est le polynôme auxiliaire correspondant, donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\sigma^\eta(\lambda) &= \frac{\lambda^{n+1}}{48r^3} [p_\sigma^\eta(\lambda)]^2 [p_\sigma^\eta(\lambda) - 6r] \quad \forall \sigma \in \{\alpha, \beta\}, \\ \mathcal{Q}_\gamma^\eta(\lambda) &= \frac{\lambda^{n+2}}{8r^2} [p_\gamma^\eta(\lambda)]^2, \quad \mathcal{Q}_\delta^\eta(\lambda) = -\mathcal{Q}_\alpha^{-\eta}(-\lambda) \end{aligned} \quad (154)$$

La dernière identité résulte de la propriété de dualité  $p_\delta^\eta(\lambda) = -p_\alpha^{-\eta}(-\lambda)$ ; par simple intégration sur  $\lambda$ , elle conduit à la relation  $\mathcal{Q}_\delta^{\eta[1]}(\lambda) = \mathcal{Q}_\alpha^{-\eta[1]}(-\lambda)$ , qui permet, dans la suite du calcul, d'éliminer les contributions en  $Y(-r \pm \bar{K})$  grâce à la relation  $Y(-r \pm \bar{K}) = 1 - Y(r \mp \bar{K})$  sans qu'il y ait de reste. La structure du résultat final est donc celle de la partie imaginaire de l'équation (113), pure combinaison de fonctions de Heaviside sans reste puisque la quantité  $C(\mathbf{K})$  dans (113) est réelle :

$$\langle (\mathbf{k} - \mathbf{q})^n \rangle^{(0)} \stackrel{n \text{ pair}}{=} \frac{k_F^n (\rho g)^2}{\epsilon_F \hbar \Gamma_0^{(2)}(\mathbf{K})} \frac{9\pi r}{4\bar{K}} \sum_{s=0, r, 1} \sum_{\eta=\pm} Y(s + \eta\bar{K}) \mathcal{D}_s^\eta(\bar{K}) \quad (155)$$

où les préfacteurs  $\mathcal{D}_s^\eta(\bar{K})$  des fonctions de Heaviside sont donnés par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^\eta(\bar{K}) &= \eta \mathcal{Q}_\gamma^{\eta[1]}(\lambda_0^{(\eta\gamma)}), \quad \mathcal{D}_1^\eta(\bar{K}) = \sum_{\sigma=\beta, \gamma, \delta} \eta [\mathcal{Q}_\sigma^{\eta[1]}(2) - \mathcal{Q}_\sigma^{\eta[1]}(\lambda_0^{(\eta\sigma)})], \\ \mathcal{D}_r^\eta(\bar{K}) &= \eta [\mathcal{Q}_\beta^{\eta[1]}(\lambda_0^{(\eta\beta)}) - \mathcal{Q}_\delta^{-\eta[1]}(\lambda_0^{(-\eta\delta)})] \end{aligned} \quad (156)$$

Les primitives nulles en zéro  $\mathcal{Q}_\sigma^{\eta[1]}(\lambda)$  des polynômes  $\mathcal{Q}_\sigma^\eta(\lambda)$  sont bien sûr calculables, mais nous donnerons un résultat explicite seulement pour la contribution de  $s = 0$ , à cause de son extrême simplicité, et parce qu'elle détermine à elle seule le résultat aux faibles valeurs de  $\bar{K}$ , voir plus bas. Pour terminer, signalons la relation

$$\mathcal{D}_s^-(\bar{K}) = -\mathcal{D}_s^+(-\bar{K}) \quad \forall \bar{K}, \quad (157)$$

due au fait que  $\psi^-(\lambda)$  se déduit de  $\psi^+(\lambda)$  dans l'équation (150) par changement de  $\bar{K}$  en  $-\bar{K}$ , et notons l'existence, sur les préfacteurs, d'une règle de somme similaire à l'équation (115), conséquence directe d'une règle de somme sur les polynômes auxiliaires :

$$\sum_{\eta=\pm} \sum_{\sigma=\beta,\gamma,\delta} \eta \mathcal{Q}_\sigma^\eta(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \quad \text{donc} \quad \sum_{s=0,r,1} \sum_{\eta=\pm} \mathcal{D}_s^\eta(\bar{K}) = 0 \quad \forall \bar{K} \quad (158)$$

Ceci fait que la somme sur  $\eta$  et  $s$  dans l'équation (155) vaut simplement  $-\mathcal{D}_s^-(\bar{K})$  lorsque  $0 < \bar{K} < \min(1, r)$ , auquel cas, compte tenu des équations (112), (113), (114) :

$$\langle (\mathbf{k} - \mathbf{q})^n \rangle^{(0)} \stackrel{n \text{ pair}}{=} \frac{60(2K)^n}{(n+3)(n+4)(n+5)} \quad (159)$$

*6.3.2. Cas des moments d'ordre  $n$  impair* Les moments d'ordre impair sont des vecteurs, invariants par rotation d'axe  $\hat{\mathbf{K}} \equiv \mathbf{K}/K$  la direction de  $\mathbf{K}$ , ils sont donc portés par cette même direction. L'astuce de moyennage sur  $\hat{\mathbf{K}}$  doit maintenant être appliquée à la quantité scalaire  $\hat{\mathbf{K}} \cdot \langle (\mathbf{k} - \mathbf{q})^n \rangle^{(0)}$ , ce qui revient à ajouter un facteur  $w$  dans l'intégrande de l'équation (23) et un facteur  $x/y$  dans la partie imaginaire de (24), les variables  $x$  et  $y$  étant celles de (25), et ce qui conduit finalement à l'intégrale simple

$$\langle (\mathbf{k} - \mathbf{q})^n \rangle^{(0)} \stackrel{n \text{ impair}}{=} \hat{\mathbf{K}} \frac{k_F^n (\rho g)^2}{\epsilon_F \hbar \Gamma_0^{(2)}(\mathbf{K})} \frac{9\pi r}{8\bar{K}^2} \int_0^{+\infty} d\lambda \lambda^{n-1} [\tilde{\psi}^+(\lambda) - \tilde{\psi}^-(\lambda)] \quad (160)$$

avec, pour  $\eta = \pm$ ,

$$\tilde{\psi}^\eta(\lambda) \equiv \int_{\max(1-\lambda, 0)}^1 \bar{q} d\bar{q} \int_{\max(\lambda-\bar{q}, 1)}^{\lambda+\bar{q}} \bar{k} d\bar{k} x Y(x + 2\eta \bar{K} \lambda) \quad (161)$$

Cette intégrale double est de la même forme que (30) avec  $\varepsilon = 0$ , si ce n'est que la fonction  $u(X)$  de (32) doit y être remplacée par  $\tilde{u}_\lambda^\eta(X) = (X - 2\eta \bar{K} \lambda) Y(X)$ , qui dépend paramétriquement de  $\lambda$  et de  $\eta$ . Or la procédure de calcul exposée après (33) s'applique à une fonction  $u(X)$  générique. La valeur explicite de  $\tilde{\psi}^\eta(\lambda)$  se déduit donc directement des expressions (34) et (35) par remplacement de  $u$  par  $\tilde{u}$ , et les primitives d'ordre  $s$  qui y apparaissent valent simplement

$$\tilde{u}_\lambda^{\eta[s]}(X) = Y^{[s+1]}(X) - 2\eta \bar{K} \lambda Y^{[s]}(X), \quad \text{avec} \quad Y^{[s]}(X) = \frac{X^s}{s!} Y(X) \quad (162)$$

Le reste suit, comme dans le cas des moments d'ordre pair, avec les mêmes polynômes réduits (151,152), avec d'autres expressions pour leurs polynômes auxiliaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\sigma^\eta(\lambda) &= \frac{\lambda^{n+1}}{192r^3} [p_\sigma^\eta(\lambda)]^2 \{ [p_\sigma^\eta(\lambda)]^2 - 4p_\sigma^\eta(0)p_\sigma^\eta(\lambda) + 48\eta r \bar{K} \} \quad \forall \sigma \in \{\alpha, \beta\}, \\ \mathcal{Q}_\gamma^\eta(\lambda) &= \frac{\lambda^{n+2}}{24r^2} [p_\gamma^\eta(\lambda)]^2 [p_\gamma^\eta(\lambda) - 6\eta \bar{K}], \quad \mathcal{Q}_\delta^\eta(\lambda) = -\mathcal{Q}_\alpha^{-\eta}(-\lambda) \end{aligned} \quad (163)$$

mais avec les mêmes relations de dualité, en particulier  $\mathcal{Q}_\delta^{\eta[1]}(\lambda) = \mathcal{Q}_\alpha^{-\eta[1]}(-\lambda)$ , ce qui conduit à un résultat de même forme que (155) au facteur vectoriel  $\hat{\mathbf{K}}/(2\bar{K})$  près :

$$\langle (\mathbf{k} - \mathbf{q})^n \rangle^{(0)} \stackrel{n \text{ impair}}{=} \hat{\mathbf{K}} \frac{k_F^n (\rho g)^2}{\epsilon_F \hbar \Gamma_0^{(2)}(\mathbf{K})} \frac{9\pi r}{8\bar{K}^2} \sum_{s=0,r,1} \sum_{\eta=\pm} Y(s + \eta \bar{K}) \mathcal{D}_s^\eta(\bar{K}) \quad (164)$$

où les préfacteurs  $\mathcal{D}_s^\eta(\bar{K})$  des fonctions de Heaviside sont toujours donnés par les expressions (156), écrites cette fois pour les polynômes auxiliaires (163). Comme dans le cas  $n$  pair, on a la relation (157), puisque  $\tilde{\psi}^-(\lambda)$  se déduit de  $\tilde{\psi}^+(\lambda)$  dans l'équation (160) par changement de  $\bar{K}$  en  $-\bar{K}$ , et on a aussi la chaîne de règles de somme (158), comme le montre un calcul explicite sur les polynômes auxiliaires (163). Pour  $0 < \bar{K} < \min(1, r)$ , on a donc l'équivalent du résultat (159), avec un facteur différent au dénominateur :

$$\langle (\mathbf{k} - \mathbf{q})^n \rangle^{(0)} \stackrel{n \text{ impair}}{=} \frac{60(2K)^n \hat{\mathbf{K}}}{(n+3)(n+4)(n+6)} \quad (165)$$

*6.3.3. Taux d'amortissement et coefficient de diffusion de l'impulsion de l'impureté* Par conservation de l'impulsion totale, voir l'équation (149), et par application de la règle d'or de Fermi, on peut déduire des moments (147) de l'impulsion de la paire particule-trou rayonné le taux initial de variation des moments de l'impulsion  $\mathbf{P}$  de l'impureté autour de sa valeur initiale  $\hbar\mathbf{K}$  :

$$\frac{d}{dt} \langle (\mathbf{P} - \hbar\mathbf{K})^n \rangle (t=0) \stackrel{g \rightarrow 0^-}{=} (-\hbar)^n \Gamma_0^{(2)}(\mathbf{K}) \langle (\mathbf{k} - \mathbf{q})^n \rangle^{(0)} + O(g^3) \quad (166)$$

où la puissance entière d'un vecteur est prise au sens de (148). Deux valeurs de  $n$  méritent de plus amples développements. Le cas  $n = 1$  correspond au taux d'amortissement initial de l'impulsion moyenne de l'impureté,

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{P} \rangle (t=0) \equiv -\Gamma_P(\mathbf{K}) \langle \mathbf{P} \rangle (t=0) \quad (167)$$

qui a été étudié dans la référence [34] avec la théorie des liquides de Fermi, exacte pour une constante de couplage  $g$  quelconque mais à  $\bar{K}$  arbitrairement faible. Ici, nous obtenons une prédiction complémentaire, exacte à  $\bar{K}$  quelconque mais pour une constante de couplage arbitrairement faible : à l'ordre deux en  $g$ ,

$$\Gamma_P^{(2)}(\mathbf{K}) = \Gamma_0^{(2)}(\mathbf{K}) \hat{\mathbf{K}} \cdot \langle (\mathbf{k} - \mathbf{q}) \rangle^{(0)} / K \quad (168)$$

où l'on rappelle que  $\hat{\mathbf{K}} \equiv \mathbf{K}/K$ . Comme son expression explicite est d'une longueur raisonnable, nous la donnons après l'habituel adimensionnement  $\bar{\Gamma}_P^{(2)}(\bar{K}) \equiv \hbar \Gamma_P^{(2)}(\mathbf{K})_{\epsilon_F} / (\rho g)^2$  et avec la présentation adoptée dans la référence [35], c'est-à-dire en distinguant (i) la région des petits nombres d'onde  $0 < \bar{K} < \min(1, r)$ , sur laquelle

$$\bar{\Gamma}_P^{(2)}(\bar{K}) = \frac{9\pi \bar{K}^4}{35r}, \quad (169)$$

(ii) la région des nombres d'onde intermédiaires pour une impureté plus légère qu'un fermion,  $r < \bar{K} < 1$ , où

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_P^{(2)}(\bar{K}) &= \frac{3\pi r}{35(r^2 - 1)^3} [(3r^4 - 9r^2 + 10)\bar{K}^4 - 14(r^2 + 3)\bar{K}^2 \\ &+ 35r(r^2 + 3)\bar{K} - 35r^2(r^2 + 3) + 14r^3(r^2 + 3)\bar{K}^{-1} - r^5(r^2 + 3)\bar{K}^{-3}], \end{aligned} \quad (170)$$

(iii) la région intermédiaire pour une impureté plus lourde au contraire,  $1 < \bar{K} < r$ , où

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_P^{(2)}(\bar{K}) &= \frac{3\pi r}{35(r^2 - 1)^3} [-(1 + 3r^{-2})\bar{K}^4 + 14(3 + r^2)\bar{K}^2 - 35(1 + 3r^2)\bar{K} \\ &+ 35r^2(3 + r^2) - 14r^2(1 + 3r^2)\bar{K}^{-1} + (3 - 9r^2 + 10r^4)\bar{K}^{-3}] \end{aligned} \quad (171)$$

et (iv) la région des grands nombres d'onde,  $\max(1, r) < \bar{K}$ , sur laquelle

$$\bar{\Gamma}_P^{(2)}(\bar{K}) = \frac{3\pi r}{35(1+r)^3} [35\bar{K} + 14r^2\bar{K}^{-1} - (r^4 + 3r^3 + 9r^2 + 9r + 3)\bar{K}^{-3}] \quad (172)$$

La prédiction de la référence [34] pour  $\Gamma_P(\mathbf{K})$ , issue de la théorie des liquides de Fermi, est bien un équivalent de notre résultat à  $\bar{K} \rightarrow 0$  lorsqu'on la spécialise à la limite d'interaction faible, ce qui revient à y remplacer la masse effective  $m_\downarrow^*$  de l'impureté par sa masse nue  $M$  et la constante de couplage effective du monoméron par sa valeur à l'ordre un en  $g$ ,  $\gamma^{(1)} = mk_F a / (\pi\mu)$ .

Le cas  $n = 2$  correspond au coefficient de diffusion en impulsion initial de l'impureté, c'est-à-dire à la dérivée de la variance de son impulsion :

$$\frac{d}{dt} [\langle \mathbf{P}^2 \rangle - \langle \mathbf{P} \rangle^2] (t=0) \equiv 2D_P(\mathbf{K}) \quad (173)$$

dont nous obtenons ici la valeur à l'ordre dominant, c'est-à-dire au second ordre en  $g$  :

$$2D_P^{(2)}(\mathbf{K}) = \hbar^2 \Gamma_0^{(2)}(\mathbf{K}) \langle (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \rangle^{(0)} \quad (174)$$

Pour abrégier, nous en donnons la valeur explicite seulement pour  $0 < \bar{K} < \min(1, r)$ , déduite des équations (116) et (159) :

$$2D_P^{(2)}(\mathbf{K}) = \frac{(\rho g)^2}{\hbar \epsilon_F} (\hbar k_F)^2 \frac{12\pi \bar{K}^6}{35r} \quad (175)$$

Ce coefficient de diffusion est en fait la trace du tenseur de diffusion en impulsion, anisotrope à  $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$  et que l'on pourrait calculer à l'ordre  $g^2$  avec les techniques de cet article. De  $\Gamma_P$  et  $D_P$  on peut déduire le taux d'amortissement de l'énergie cinétique de l'impureté. Il est bon de rappeler la mise en garde qui suit l'équation (147) : au contraire de  $\Gamma_P(\mathbf{K})$ , le sens du coefficient  $D_P(\mathbf{K})$  reste à préciser pour une interaction de portée nulle, si l'on va au-delà des modèles d'équations cinétiques du type [50] pour décrire l'évolution de l'impureté couplée aux fermions.

## 7. Conclusion

Le problème considéré ici d'une impureté interagissant avec un gaz parfait de fermions polarisés (à température nulle) appartient à la classe générale des problèmes polaroniques. Il illustre avec beauté et simplicité le fait très général qu'une particule, sous l'effet d'un couplage à un système de spectre continu (à la limite thermodynamique), donne naissance à une quasi-particule, avec une énergie au repos, une masse, une relation de dispersion, etc, différentes de celles de la particule nue. Il bénéficie d'un regain d'intérêt grâce aux expériences sur les atomes froids, qui mettent en jeu un mélange de deux espèces ou deux états de spin d'une même espèce fermionique.

Ce problème avait été étudié surtout à impulsion totale nulle, c'est-à-dire pour une impureté immobile avant couplage à la mer de Fermi. La motivation physique principale était en effet de déterminer l'énergie au repos et la masse effective de la quasi-particule, ce qui permet d'estimer l'équation d'état du "liquide" de Fermi constitué d'une densité non nulle d'impuretés, et donc le rapport critique de potentiel chimique entre impuretés et

fermions en dessous duquel ce liquide de Fermi est plus favorable que la phase superfluide appariée [9, 10]. Dans ce cas, l'approche variationnelle des références [9, 30, 32] reste quantitativement correcte dans le régime d'interaction forte, ce qui permet d'aller au-delà de l'étude perturbative de la référence [5].

Le cas d'une impureté en mouvement est plus subtil. La quasi-particule acquiert une durée de vie finie dans son sous-espace d'impulsion considéré puisqu'elle peut se freiner en rayonnant des paires particule-trou dans la mer de Fermi [4, 34], ce dont l'approche variationnelle ne rend pas compte sur un voisinage de l'impulsion nulle [35]. Aussi nous sommes-nous rabattus sur le régime d'interaction faible, en un calcul des perturbations au second ordre inclus en la constante de couplage  $g$ . À contre-courant de certaines idées reçues, nous pensons d'ailleurs que ce régime est fort intéressant : des prédictions non systématiques peuvent y conduire à des lois d'échelle fort différentes, voir par exemple [51], alors que le régime d'interaction forte (la limite unitaire) est souvent l'objet de débats plus arides sur les purs nombres que sont les valeurs des observables, et dont l'arbitrage nécessite alors l'artillerie lourde des simulations de Monte-Carlo quantique.

Passons maintenant en revue quelques résultats saillants de ce long article.

De manière peut-être inattendue, la fonction énergie propre  $\Sigma(\mathbf{K}, \omega)$  de l'impureté, lorsqu'on se limite au second ordre inclus en  $g$ , peut être exprimée de manière totalement explicite, c'est-à-dire que l'intégrale sextuple sur les impulsions de la paire particule-trou virtuellement créée définissant la contribution d'ordre deux  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$  est calculable exactement, voir les équations (79) et (80). Ceci permet alors de démontrer que  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$  n'est pas une fonction indéfiniment différentiable de  $\mathbf{K}$  et de  $\omega$ , ce qui est un souvenir de la discontinuité de la distribution en vecteur d'onde des fermions  $n(\mathbf{k})$  à la surface de Fermi  $k = k_F$ . Nous trouvons en général que les premières singularités apparaissent dans la différentielle troisième de  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$ , et que le lieu de ces singularités dans le plan  $(K, \omega)$  a une origine mathématiquement bien identifiée, voir la figure 1 : soit les polynômes apparaissant dans l'expression explicite (79,80) y ont une racine double, auquel cas les singularités sont portées par des paraboles et sont données par les équations (92), (93), (94) ; soit ces polynômes y ont une racine égale à zéro ou à deux, auquel cas les singularités sont portées par des droites et sont données par l'équation (101) ou par l'équation (109). Il est possible cependant de faire apparaître des singularités déjà dans la différentielle seconde de  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$ , en particulier en  $K = k_F$  pour une impureté et des fermions de même masse  $m$ , voir les équations (124), (125), (126).

Nous nous sommes ensuite concentrés sur une quantité physique directement accessible par spectroscopie de radio-fréquence dans une expérience d'atomes froids, à savoir l'énergie complexe  $\Delta E(\mathbf{K})$  de l'impureté de vecteur d'onde  $\mathbf{K}$ , en principe déductible de la fonction énergie propre  $\Sigma(\mathbf{K}, \omega)$  par prolongement analytique en  $\omega$  au demi-plan complexe inférieur puis résolution de l'équation implicite (110). À l'ordre deux en  $g$ , les singularités des dérivées de la fonction énergie propre se retrouvent immédiatement dans celles de l'énergie complexe par rapport à  $K$ , qui apparaissent déjà dans la référence [35] ; à cet ordre, on trouve pour des masses égales que  $\partial_K^2 \Delta E^{(2)}(\mathbf{K})$

tend logarithmiquement vers  $+\infty$  en  $K = k_F$ , ce qui révèle une insuffisance de l'approche perturbative. Afin de déterminer le comportement réel de  $\partial_K^2 \Delta E(\mathbf{K})$  au voisinage de  $K = k_F$ , pour  $g$  proche de zéro mais non nul, en tirant parti de notre expression analytique de  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$ , nous avons effectué une approximation auto-cohérente de l'équation implicite sur  $\Delta E(\mathbf{K})$ , en traitant le déplacement de champ moyen à tous les ordres en  $g$  mais en remplaçant la fonction énergie propre par son développement jusqu'à l'ordre  $g^2$  seulement, voir les équations (121) et (122), écrites pour des masses égales. La loi d'échelle (132) qui en résulte dans la limite  $g \rightarrow 0^-$  conduit à  $\partial_K^2 [\Delta E(\mathbf{K}) - \hbar^2 K^2 / (2m)] \propto -g^2 \ln g^2$  en  $K = k_F$ , parce que la divergence en  $-\ln |K - k_F|$  constatée sur  $\partial_K^2 \Delta E^{(2)}(\mathbf{K})$  dans la théorie perturbative, est interrompue dans la théorie auto-cohérente à une distance de  $K = k_F$  proportionnelle à  $g^2$ . Une autre prédiction intéressante (133) de la loi d'échelle (132), est que la dérivée troisième  $\partial_K^3 \Delta E(\mathbf{K})$  autour de  $k_F$  ne tend pas vers zéro uniformément en  $K$ , lorsque  $g \rightarrow 0^-$ . Enfin, bien que nous la représentons sur la figure 2, la fonction  $F(x)$  apparaissant dans la loi d'échelle (132) n'est pas déterminée de façon totalement prédictive par notre approximation auto-cohérente, car le prolongement analytique de  $\Sigma^{(2)}(\mathbf{K}, \omega)$  aux valeurs de  $\omega$  de partie imaginaire négative est entaché d'un certain arbitraire, voir la fin de la sous-section 6.2.3 ; notre étude est donc pionnière mais pas définitive.

Nous avons terminé par une application physiquement assez éloignée de la ligne directrice précédente, mais directement issue des techniques de calcul d'intégrales ayant conduit à (80) : le calcul de tous les moments (159) et (165) de l'impulsion de la paire particule-trou émise par l'impureté en mouvement dans la mer de Fermi, d'après la règle d'or de Fermi donc à l'ordre zéro en  $g$ . Ceci donne accès au taux d'amortissement de l'impulsion moyenne de l'impureté, pour une impulsion initiale quelconque mais au second ordre en  $g$ , voir les équations (169,170,171,172), ce qui est complémentaire de la théorie des liquides de Fermi, non perturbative en  $g$  mais limitée aux impulsions infinitésimales [34]. Ceci donne également accès au coefficient de diffusion en impulsion de l'impureté, au second ordre en  $g$ , que nous écrivons de manière totalement explicite seulement à basse impulsion pour abrégé, voir l'équation (175). Ces moments sont bien entendu mesurables dans une expérience d'atomes froids, pour peu que l'on sache préparer l'impureté dans un paquet d'ondes quasi-monochromatique, par exemple par accélération d'un condensat de Bose-Einstein ; il reste alors à mettre ce paquet d'ondes en contact avec un gaz de fermions polarisé puis à en mesurer la distribution en impulsion par temps de vol [52, 53]. Notons pour terminer que parler de second moment, ou de ceux d'ordre supérieur, soulève le paradoxe suivant, que nous résolvons au début de la sous-section 6.3 dans le régime d'interaction faible mais pas dans le régime d'interaction quelconque de la référence [50] : comme l'impureté interagit avec les fermions, sa distribution en vecteur d'onde devrait comporter une queue asymptotique en  $1/K^4$  [46, 47, 48, 49, 44], qui devrait faire diverger la variance de  $\mathbf{K}$  et enlever tout sens à la notion de diffusion en impulsion.



## Remerciements

Pendant l'accomplissement de ce travail, Christian Trefzger a bénéficié d'une bourse post-doctorale Marie Curie de l'Union européenne, ainsi que d'un financement sous le contrat "Consolidating Grant Thermodynamix" du Conseil européen de la recherche. Nous remercions Carlos Lobo pour d'utiles discussions sur la bande d'énergie non physique apparaissant dans les ansatz variationnels à nombre fini de paires particule-trou, et Meera Parish pour ses bons conseils sur la terminologie des polarons.

## Références

- [1] E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii, *Statistical Physics Part 2* (Pergamon Press, 1980).
- [2] A.L. Fetter, J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (Dover, Mineola, 2003).
- [3] J.D. Walecka, *Nuovo Cimento* **16**, 342 (1960).
- [4] R.F. Bishop, *Nucl. Phys. B* **17**, 573 (1970).
- [5] R.F. Bishop, *Ann. Phys.* **78**, 391 (1973).
- [6] G.B. Partridge, W. Li, R.I. Kamar, Y. Liao, R.G. Hulet, *Science* **311**, 503 (2006).
- [7] M.W. Zwierlein, C.H. Schunck, A. Schirotzek, W. Ketterle, *Nature (London)* **442**, 54 (2006); Y. Shin, M.W. Zwierlein, C.H. Schunck, A. Schirotzek, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 030401 (2006).
- [8] C. Kohstall, M. Zaccanti, M. Jag, A. Trenkwalder, P. Massignan, G. M. Bruun, F. Schreck, R. Grimm, *Nature* **485**, 615 (2012).
- [9] F. Chevy, *Phys. Rev. A* **74**, 063628 (2006).
- [10] C. Lobo, A. Recati, S. Giorgini, S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 200403 (2006).
- [11] S. Nascimbène, N. Navon, K. Jiang, F. Chevy, C. Salomon, *Nature (London)* **463**, 1057 (2010).
- [12] N. Navon, S. Nascimbène, F. Chevy, C. Salomon, *Science* **328**, 729 (2010).
- [13] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, E. Tiesinga, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
- [14] V. Efimov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **12**, 589 (1971); V. Efimov, *Nucl. Phys. A* **210**, 157 (1973); A. Bulgac, V. Efimov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **22**, 296 (1975).
- [15] D.S. Petrov, *Phys. Rev. A* **67**, 010703 (2003).
- [16] E. Braaten, H.-W. Hammer, *Phys. Rep.* **428**, 259 (2006).
- [17] Y. Castin, C. Mora, L. Pricoupenko, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 223201 (2010).
- [18] L.H. Thomas, *Phys. Rev.* **47**, 903 (1935)
- [19] M. Correggi, G. Dell'Antonio, D. Finco, A. Michelangeli, A. Teta, *Rev. Math. Phys.* **24**, 1250017 (2012).
- [20] N. Prokof'ev, B. Svistunov, *Phys. Rev. B* **77**, 020408(R) (2008); *ibid.*, *Phys. Rev. B* **77**, 125101 (2008).
- [21] M. Punk, P.T. Dumitrescu, W. Zwerger, *Phys. Rev. A* **80**, 053605 (2009).
- [22] C. Mora, F. Chevy, *Phys. Rev. A* **80**, 033607 (2009).
- [23] R. Combescot, S. Giraud, X. Leyronas, *Europhys. Lett.* **88**, 60007 (2009).
- [24] C.J.M. Mathy, Meera M. Parish, D.A. Huse, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 166404 (2011).
- [25] C. Trefzger, Y. Castin, *Phys. Rev. A* **85**, 053612 (2012).
- [26] P. Massignan, M. Zaccanti, G.M. Bruun, *Rep. Prog. Phys.* **77**, 034401 (2014).
- [27] P. Massignan, *Europhys. Lett.* **98**, 10012 (2012).
- [28] Ran Qi, Hui Zhai, *Phys. Rev. A* **85**, 041603(R) (2012).
- [29] G.M. Bruun, P. Massignan, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 020403 (2010).
- [30] R. Combescot, A. Recati, C. Lobo, F. Chevy, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 180402 (2007).
- [31] S. Giraud, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (2010), "Contribution à la théorie des gaz de fermions ultrafroids fortement polarisés", [tel.archives-ouvertes.fr/tel-00492339](http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00492339)
- [32] R. Combescot, S. Giraud, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 050404 (2008).

- [33] Y. Nishida, Phys. Rev. A **85**, 053643 (2012).
- [34] G.M. Bruun, A. Recati, C.J. Pethick, H. Smith, S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **100**, 240406 (2008).
- [35] C. Trefzger, Y. Castin, Europhys. Lett. **104**, 50005 (2013).
- [36] Meera M. Parish, J. Levinsen, Phys. Rev. A **87**, 033616 (2013).
- [37] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes* (InterEditions et Editions du CNRS, 1988).
- [38] C. Trefzger, Y. Castin, Europhys. Lett. **101**, 30006 (2012).
- [39] A. Sinatra, C. Lobo, Y. Castin, J. Phys. B **35**, 3599 (2002).
- [40] C. Mora, Y. Castin, Phys. Rev. A **67**, 053615 (2003).
- [41] L. Pricoupenko, Y. Castin, J. Phys. A **40**, 12863 (2007).
- [42] E. Burovski, N. Prokof'ev, B. Svistunov, M. Troyer, New J. Phys. **8**, 153 (2006).
- [43] O. Juillet, New J. Phys. **9**, 163 (2007).
- [44] F. Werner, Y. Castin, Phys. Rev. A **86**, 013626 (2012).
- [45] Y. Castin, J. Phys. IV (France) **116**, 89 (2004).
- [46] S. Tan, Ann. Phys. **323**, 2952 (2008); S. Tan, Ann. Phys. **323**, 2971 (2008).
- [47] E. Braaten, L. Platter, Phys. Rev. Lett. **100**, 205301 (2008); E. Braaten, D. Kang, L. Platter, Phys. Rev. A **78**, 053606 (2008).
- [48] S. Zhang, A.J. Leggett, Phys. Rev. A **79**, 023601 (2009).
- [49] F. Werner, L. Tarruell, Y. Castin, Eur. Phys. J. B **68**, 401 (2009).
- [50] Hyungwon Kim, D.A. Huse, Phys. Rev. A **85**, 043603 (2012).
- [51] F. Werner, L. Tarruell, Y. Castin, Eur. Phys. J. B **68**, 401 (2009).
- [52] F. Ferlaino, R.J. Brecha, P. Hannaford, F. Riboli, G. Roati, G. Modugno, M. Inguscio, Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics, **5**(2) :S3 (2003).
- [53] I. Ferrier-Barbut, M. Delehaye, S. Laurent, A.T. Grier, M. Pierce, B.S. Rem, F. Chevy, Ch. Salomon, arXiv :1404.2548 .