



**HAL**  
open science

# Implantation numérique d'un modèle d'endommagement anisotrope non-local

Fabrice Gatuingt, Frédéric Ragueneau, Rodrigue Desmorat

► **To cite this version:**

Fabrice Gatuingt, Frédéric Ragueneau, Rodrigue Desmorat. Implantation numérique d'un modèle d'endommagement anisotrope non-local. *Revue Européenne de Génie Civil*, 2006, 10 (3), pp.391-404. 10.1080/17747120.2006.9692835 . hal-00994389

**HAL Id: hal-00994389**

**<https://hal.science/hal-00994389v1>**

Submitted on 21 May 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Implantation numérique d'un modèle d'endommagement anisotrope non-local

Fabrice Gatuingt — Frédéric Ragueneau — Rodrigue Desmorat

LMT-Cachan, ENS Cachan/CNRS/Paris 6, 61 av. du Pt Wilson, F-94235 Cachan

---

*RÉSUMÉ. Simuler des structures en béton jusqu'à la rupture nécessite des modèles de comportement non linéaires fondés sur des hypothèses physiques réalistes et suffisamment robustes. Un modèle d'endommagement anisotrope est décrit pour des matériaux quasi-fragiles tels que le béton. Le modèle est écrit dans un cadre thermodynamique et n'introduit qu'une seule variable d'endommagement (tensorielle d'ordre 2). Pour gérer son évolution, un critère de Mazars est utilisé. Celui-ci introduit une déformation équivalente construite à partir de la partie positive du tenseur de déformation. Pour le modèle non local, il suffit de remplacer la déformation équivalente locale par une formulation non locale déterminée par exemple par une forme intégrale de celle-ci. Le schéma numérique utilisé est un schéma implicite, avec tous ses avantages de robustesse et de stabilité. Cependant, les équations constitutives de l'endommagement anisotrope peuvent être résolues de manière exacte sur un pas de temps. Le calcul de l'endommagement est alors explicite d'un point de vue programmation. Des simulations numériques de structures en béton armé sont présentées afin de montrer les possibilités de la modélisation proposée.*

*ABSTRACT. Numerical simulations of concrete structures up to rupture require the use of non-linear models based on realistic and sufficiently robust physical assumptions. A nonlocal anisotropic damage model is described for quasi-brittle materials such as concrete. The model is written within the thermodynamics framework and introduces only one damage variable (2nd order tensor). To describe the damage evolution, a damage criterion of Mazars type is used. It introduces an equivalent strain computed from the positive part of the strain tensor. To define a nonlocal model, one has to replace it by a nonlocal formulation based on an integral form. The numerical scheme used for the implementation in a F.E. code is implicit, with all the advantages of robustness and stability. However, the constitutive equations of the anisotropic damage can be solved in an exact way on a time integration step. The calculation of the damage is then completely explicit from a programming point of view. Numerical simulations of reinforced concrete structures are presented in order to show the capabilities of the model.*

*MOTS-CLÉS : endommagement anisotrope, non local, éléments finis.*

*KEYWORDS: anisotropic damage, nonlocal, finite element.*

---

## 1. Introduction

Etendre les modèles d'endommagement isotropes à l'anisotropie induite n'est pas toujours chose facile tant d'un point de vue théorique que dans sa mise en œuvre numérique. Considérer un tenseur d'ordre 2 comme variable d'endommagement est un choix pratique, mais qui soulève des difficultés théoriques liées à la définition d'une contrainte effective symétrique, indépendante des paramètres d'élasticité, et à la définition du potentiel thermodynamique associé (Cordebois *et al.*, 1982; Lemaitre *et al.*, 2005). Des difficultés supplémentaires sont rencontrées lorsque l'on souhaite modéliser la différence de comportement entre la traction et la compression (Ladevèze, 1983; Lemaitre, 1992). D'un point de vue thermodynamique, une seule variable d'endommagement doit rendre compte de l'état de micro-fissuration du matériau, que ce dernier soit soumis à de la traction, de la compression ou à tout autre type de chargement. Cette propriété (un mécanisme de dégradation, une variable d'endommagement) n'est en générale pas respectée (Mazars, 1984; Laborderie, 1991), ce qui conduit à introduire un grand nombre de paramètres dans les modèles. Nous proposons dans cet article de rappeler le cadre thermodynamique initialement proposé par (Ladevèze, 1983) et particularisé à l'endommagement anisotrope induit des matériaux quasi-fragiles (Desmorat *et al.*, 2004). Nous présentons également l'implantation numérique de cette loi de comportement que nous illustrons de calculs de structures.

## 2. Couplage endommagement-élasticité utilisant un tenseur d'ordre 2

L'état d'endommagement est représenté par une variable  $\mathbf{D}$  tensorielle d'ordre 2. Il y a alors un potentiel thermodynamique connu  $\rho\psi^*$  duquel dérive une contrainte effective symétrique et indépendante des caractéristiques élastiques (Lemaitre *et al.*, 2000) :

$$\rho\psi^* = \frac{1+\nu}{2E} \text{tr} \left( (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D \right) + \frac{1-2\nu}{6E} \left[ \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^2}{1 - \eta D_H} \right] \quad [1]$$

où  $E$  est le module d'Young du matériau,  $\nu$  son coefficient de Poisson,  $\eta$  le paramètre de sensibilité hydrostatique ( $\eta = 3$  pour la plupart des métaux), où  $(.)^D$  désigne le déviateur,  $(.)^D = (.) - \frac{1}{3} \text{tr}(.) \mathbf{1}$ , et où l'on définit l'endommagement hydrostatique comme étant :

$$D_H = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{D} \quad [2]$$

Les matériaux quasi-fragiles comme le béton exhibent une grande différence de comportement entre la traction et la compression. Cela est principalement dû à la différence de la micro-fissuration entre la traction et la compression. Rendre compte de cet effet, conduit souvent à une modélisation complexe, notamment lorsque l'anisotropie de l'endommagement est considérée (Ladevèze, 1983; Ladevèze, 1995; Cha-boche, 1993; Dragon, 1996). Nous allons montrer que décrire un effet unilatéral sur la

partie hydrostatique des contraintes s'avère suffisant, tout au moins pour des applications sous chargements monotones. Pour cela posons :

$$\begin{aligned} \rho\psi^* = & \frac{1+\nu}{2E} \text{tr} \left( (1-D)^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (1-D)^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D \right) \\ & + \frac{1-2\nu}{6E} \left[ \frac{\langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle^2}{1-\text{tr} \mathbf{D}} + \langle -\text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle^2 \right] \end{aligned} \quad [3]$$

de sorte que la loi d'élasticité s'écrive :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{1} \quad [4]$$

Elle définit la contrainte effective indépendante du coefficient de Poisson :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = ((1-D)^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^D (1-D)^{-1/2})^D + \frac{1}{3} \left[ \frac{\langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle}{1-\text{tr} \mathbf{D}} - \langle -\text{tr} \boldsymbol{\sigma} \rangle \right] \mathbf{1} \quad [5]$$

La notation  $\langle X \rangle$  correspond à la partie positive de la variable  $X$  :  $\langle X \rangle = X$  si  $X > 0$ ,  $\langle X \rangle = 0$  sinon. Le potentiel thermodynamique [3] définit également la variable  $\mathbf{Y}$ , taux de restitution de densité d'énergie, associée à  $\mathbf{D}$  :

$$\mathbf{Y} = \rho \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{D}} \quad [6]$$

### 3. Fonction critère d'endommagement

Une fonction critère  $f$  définit le domaine d'élasticité du matériau par la condition  $f < 0$ . Nous utilisons ici la fonction critère d'endommagement de Mazars,

$$f = \hat{\varepsilon} - \kappa \quad \hat{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \varepsilon_I \rangle^2} = \sqrt{\text{tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2} \quad [7]$$

construite à partir de la partie positive du tenseur de déformation  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+$  (ou des déformations principales  $\varepsilon_I$ ) et où  $\kappa = \kappa(\text{tr} \mathbf{D})$  est une fonction croissante de la trace du tenseur d'endommagement ( $\kappa_0 = \kappa(0)$  est le seuil d'endommagement). Pour définir le modèle d'endommagement non local, il suffira de considérer la fonction critère de Mazars non locale :

$$f = \hat{\varepsilon}^{nl} - \kappa \quad [8]$$

qui introduit la déformation équivalente non locale  $\hat{\varepsilon}^{nl}$  au point  $\mathbf{x}$  calculée par exemple sous forme intégrale (Pijaudier-Cabot *et al.*, 1987),

$$\hat{\varepsilon}^{nl}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_r} \int_{\Omega} \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \hat{\varepsilon}(\mathbf{s}) ds \quad V_r = \int_{\Omega} \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{s}) ds \quad [9]$$

avec la fonction poids Gaussienne  $\mathcal{W}$ ,

$$\mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{s}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2}{l_c^2}\right) \quad [10]$$

Dans ce cas, une longueur interne « caractéristique » du matériau est introduite,  $l_c$ .

#### 4. Loi d'évolution de l'endommagement anisotrope induit

Pour les matériaux quasi-fragiles tels que le béton, l'état d'endommagement est différent en traction et en compression (Mazars *et al.*, 1990; Dragon, 1996) :

– pour une traction suivant la direction 1 :

$$\mathbf{D} \approx \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [11]$$

qui correspond à une micro-fissuration orthogonale à la direction de la traction ;

– pour une compression suivant la direction 1 :

$$\mathbf{D} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{bmatrix} \quad [12]$$

qui correspond à une micro-fissuration parallèle à la direction de la compression.

Les formes [11] et [12] du tenseur d'endommagement sont classiquement obtenues en considérant un endommagement proportionnel à la partie positive du tenseur de déformation.

Afin de traiter correctement la propagation des fissures à l'aide d'un modèle d'endommagement anisotrope, on supposera qu'une mésosfissure sera initiée lorsque le plus grand endommagement principal  $D_I = \sup_J D_J$  atteint la valeur critique  $D_c$  considérée comme un paramètre matériau. La direction de la fissure sera alors perpendiculaire à la direction principale associée à  $D_I$  (Lemaitre *et al.*, 2005). Il est à noter que l'endommagement critique est grand pour les matériaux cimentaires de sorte que le phénomène de localisation des déformations se produit bien avant la condition  $D = D_c$ . Reproduire un tel phénomène, notamment *via* l'extension au non local du modèle, permet de rendre compte de la rotation possible de la mésosfissuration. Au final, la fissure macroscopique conduisant à la ruine de la structure correspond à la bande de localisation.

#### 4.1. Modèle non associé

Afin de proposer un modèle d'endommagement écrit dans le cadre thermodynamique, considérons le potentiel d'endommagement  $F = \mathbf{Y} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^\alpha$  dont dérive par normalité la loi d'évolution de l'endommagement,

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}} = \dot{\lambda} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^\alpha \quad [13]$$

Le multiplicateur d'endommagement  $\dot{\lambda}$  est déterminé par la condition de consistance  $f = 0, \dot{f} = 0$ , de sorte que le choix  $\alpha = 2$ , le plus cohérent avec l'utilisation de la déformation équivalente de Mazars car  $tr \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2 = \hat{\varepsilon}^2$ , conduit à :

$$\dot{\lambda} = \frac{d\kappa^{-1}}{d\hat{\varepsilon}} \frac{\dot{\hat{\varepsilon}}}{\hat{\varepsilon}^2} \quad [14]$$

La loi d'évolution de l'endommagement anisotrope induit s'écrit alors

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{d\kappa^{-1}}{d\hat{\varepsilon}} \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2}{\hat{\varepsilon}^2} \dot{\hat{\varepsilon}} \quad [15]$$

#### 4.2. Modèle non local

Pour le modèle non local,  $\hat{\varepsilon}$  doit être remplacé par  $\hat{\varepsilon}^{nl}$  dans la fonction critère, ce qui donne pour le multiplicateur d'endommagement :

$$\dot{\lambda} = \frac{d\kappa^{-1}}{d\hat{\varepsilon}^{nl}} \frac{\dot{\hat{\varepsilon}}^{nl}}{\hat{\varepsilon}^2} \quad [16]$$

Cela conduit à la loi d'évolution de l'endommagement anisotrope induit et non local suivante :

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{d\kappa^{-1}}{d\hat{\varepsilon}^{nl}} \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2}{\hat{\varepsilon}^2} \dot{\hat{\varepsilon}}^{nl} \quad [17]$$

En traction,  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_1 > 0$  et on retrouve alors la forme [11] du tenseur d'endommagement. En compression,  $\hat{\varepsilon} = \sqrt{2}\varepsilon_2 > 0$  et on retrouve alors la forme [12] du tenseur d'endommagement.

#### 4.3. Choix de la fonction $\kappa$

Il reste à préciser l'expression de la fonction  $\kappa$ . Par souci de simplicité,  $\kappa$  est choisie fonction de la trace de  $\mathbf{D}$  seulement. Le choix plus simple est de considérer une fonction linéaire n'introduisant (en plus du seuil  $\kappa_0$ ) qu'un seul paramètre d'endommagement  $A$  (Mazars *et al.*, 1990; Dragon, 1996),

$$\kappa(tr \mathbf{D}) = \frac{1}{A} tr \mathbf{D} + \kappa_0 \quad [18]$$

conduisant à la loi d'évolution (loi 1) :

$$\dot{\mathbf{D}} = A \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2}{\hat{\varepsilon}^2} \dot{\hat{\varepsilon}} \quad [19]$$

Grâce à la considération de l'anisotropie induite de l'endommagement, la loi d'évolution [19] conduit bien à une dissymétrie traction-compression (figure 1, loi 1). Mais cette dissymétrie n'est pas suffisante. L'existence d'un snapback en compression montre en fait que considérer l'expression linéaire [18] pour  $\kappa$  conduit à un endommagement trop important en compression. Une solution consiste à prendre en compte le ralentissement apparent de la croissance de l'endommagement en compression (mais pas en traction), en posant (loi 2) :

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{d\kappa^{-1}}{d\hat{\varepsilon}} \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2}{\hat{\varepsilon}^2} \dot{\hat{\varepsilon}} = A \left[ 1 + \left( \frac{\hat{\varepsilon}}{a} \right)^2 \right]^{-1} \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^2}{\hat{\varepsilon}^2} \dot{\hat{\varepsilon}} \quad [20]$$

où le paramètre  $a$  est de l'ordre de grandeur des déformations atteintes en compression. La fonction  $\kappa$  correspondante est obtenue par intégration,

$$\kappa(\text{tr } \mathbf{D}) = a \cdot \tan \left[ \frac{\text{tr } \mathbf{D}}{aA} + \arctan \left( \frac{\kappa_0}{a} \right) \right] \quad [21]$$

La loi d'évolution [20] et l'expression correspondante de  $\kappa$  [21] sont valables pour tous les trajets de chargement. Elles permettent de modéliser avec le même jeu de paramètres d'endommagement  $A$ ,  $a$  aussi bien le comportement en traction que le comportement en compression du béton (figure 1, loi 2).

## 5. Implantation numérique du modèle

Le modèle proposé est en fait assez simple à implanter dans un code EF. Connaissant la valeur des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  à l'instant  $t_{n+1}$ , de l'endommagement  $\mathbf{D}_n$  à l'instant  $t_n$ , le schéma proposé pour calculer les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  et l'endommagement  $\mathbf{D}_{n+1}$  à l'instant  $t_{n+1}$  est le suivant :

1) Calcul de la déformation équivalente

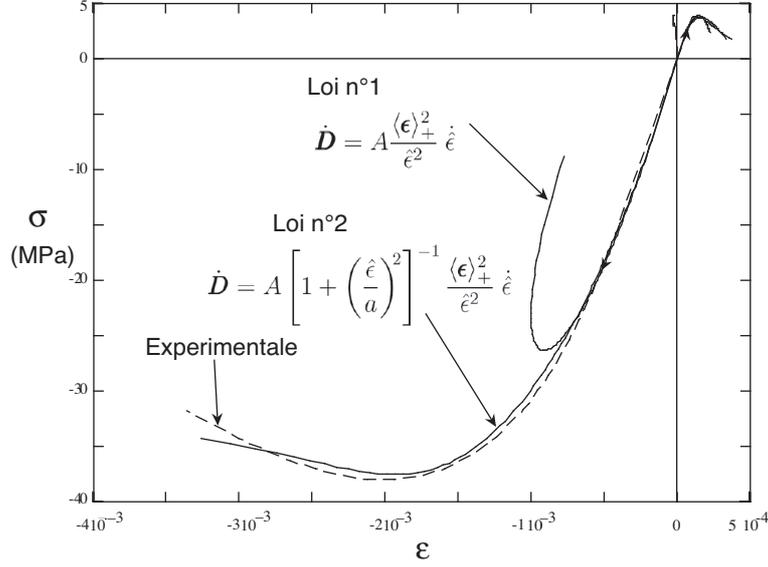
$$\hat{\varepsilon}_{n+1} = \sqrt{\text{tr } \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2} \quad , \quad \hat{\varepsilon}_{n+1}^{nl} = \sum_p w_p \hat{\varepsilon}_{n+1}^p \quad [22]$$

où les poids d'intégration  $w_i$  correspondent à la forme intégrale [9]. Ils sont classiquement déterminés une fois pour toute au début du calcul et où la somme s'effectue sur tous les points de Gauss (indice  $p$ ).

2) Test sur la fonction critère  $f = \hat{\varepsilon}_{n+1} - \kappa(\text{tr } \mathbf{D}_n)$

Si  $f \leq 0$ ,  $\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n$  (le matériau se comporte élastiquement), sinon l'endommagement doit être corrigé en utilisant la loi d'évolution [15] discrétisée par un schéma d'Euler implicite,

$$\Delta \mathbf{D} = \mathbf{D}_{n+1} - \mathbf{D}_n = \Delta \lambda \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \rangle_+^2 \quad [23]$$



**Figure 1.** Courbes contrainte-déformation ( $E = 42 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $\kappa_0 = 5.10^{-5}$ ,  $A = 5.10^3$ ,  $a = 2.9310^{-4}$ )

Le multiplicateur  $\Delta\lambda$  est déterminé par la condition de consistance  $f_{n+1} = \hat{\epsilon}_{n+1} - \kappa(\text{tr } \mathbf{D}_{n+1}) = 0$  qui conduit à :

$$\Delta\lambda = \frac{\text{tr } \mathbf{D}_{n+1} - \text{tr } \mathbf{D}_n}{\hat{\epsilon}_{n+1}^2} \quad [24]$$

L'endommagement est alors actualisé, sans recours à un schéma itératif quelconque et en conservant le caractère implicite du schéma numérique :

$$\mathbf{D}_{n+1} = \mathbf{D}_n + \Delta\lambda \langle \epsilon_{n+1} \rangle_+^2 \quad [25]$$

### 3) Calcul des contraintes

La loi d'élasticité permet le calcul de la contrainte effective ( $\underline{\mathbf{E}}$  est le tenseur de Hooke),

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \underline{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \quad [26]$$

Le tenseur des contraintes est alors obtenu en inversant analytiquement la relation [5]. Le schéma numérique ainsi proposé est un schéma implicite, avec tous ses avantages de robustesse et de stabilité, avec un calcul de l'endommagement exact sur un pas de temps. Le modèle non local se programme de manière quasi-identique au modèle local. La différence vient du fait qu'il est nécessaire de connaître la déformation équivalente non locale à l'entrée de la procédure, option déjà programmée dans le code de calcul aux éléments finis CAST3M.

## 6. Exemples numériques sur structures

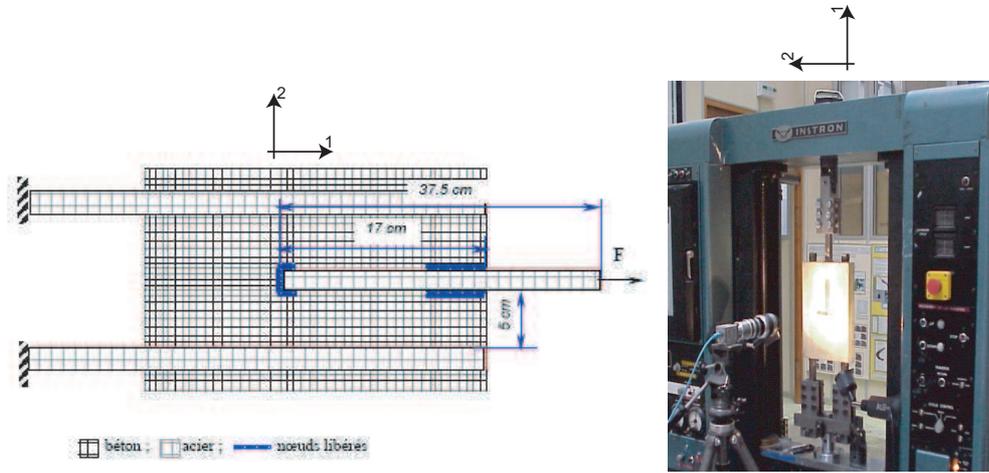
### 6.1. Analyse des mécanismes d'interface acier-béton

Les classiques essais d'adhérence acier-béton ne permettent pas une identification directe des propriétés mécaniques de l'interface du fait même du caractère structural de ces essais, comme les essais d'arrachement (pull-out), tirant, ou par flexion 3 points. Des analyses numériques de ces essais montrent une très forte inhomogénéité des contraintes le long de l'interface. La volonté de vouloir accéder directement à des quantités cinématiques entre les matériaux en présence rend impossible la configuration de type axisymétrique. D'autre part, du fait de conditions aux limites inadaptées et mal maîtrisées, un confinement latéral inhomogène apparaît le long de l'interface engendrant un état de contrainte lui-même inhomogène et supportant une étreinte latérale parasite empêchant toute mesure objective de la résistance au cisaillement de ces zones d'interface.

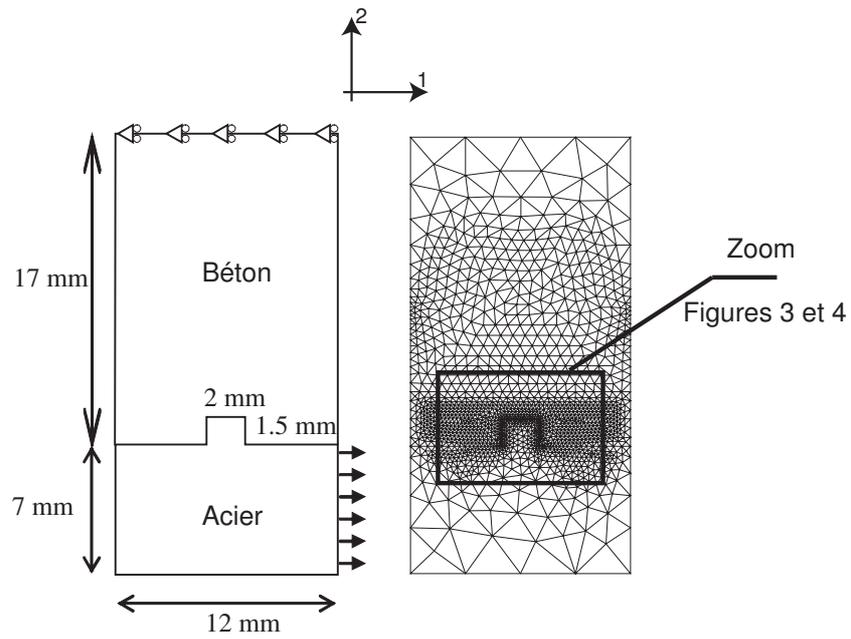
Partant de ces considérations, un nouvel essai d'adhérence acier-béton a été imaginé (Ouglova, 2004; Ragueneau *et al.*, 2005), permettant par une géométrie plane de procéder à des mesures de champs de types déplacements et déformations le long de l'interface et par des conditions aux limites et de chargement adaptés (triple rotule), de prévenir toute occurrence de contrainte latérale parasite, voire par un dispositif de chargement orthogonal de les imposer. La figure 2 montre la géométrie de l'éprouvette, Trois barres en acier sont fixées en rotation libre à la machine de traction. Deux barres assurent le maintien général de l'éprouvette et la troisième est celle sur laquelle le test d'adhérence est effectivement réalisé. La surface adhérente est ainsi composée de deux faces parallèles de 2 cm x 12 cm de surface. La géométrie de l'éprouvette permet le positionnement aisé d'une caméra CCD permettant la prise d'images numériques utilisées ultérieurement lors d'analyses par intercorrélation.

Une caméra numérique (1000 x 1000 pixels) a été utilisée pour pratiquer à des mesures de champs dans la zone d'intérêt de l'interface. Les images ont été analysées utilisant le logiciel *CORRELI<sup>LM</sup>* (Hild, 2002), basé sur une approche multi-échelle des zones d'études, il permet de déterminer les déplacements et champs de déformations le long de l'interface. Pour les deux types extrêmes de rugosité des barres, la figure 4 montre un champ de déformation interpolé dans la direction (1) et (2). Par analyse d'images, des discontinuités de déplacement sont mises en évidence aux interfaces avant le pic dans le diagramme effort-déplacement. Deux types de fissuration ont pu être observés : des decohésions interfaciales entre les nervures, et des ouvertures à 45° à partir de chacune de ces nervures.

Cet essai a été analysé de manière locale en isolant une cellule élémentaire d'acier et de béton comprenant une nervure. Le maillage, les dimensions et les conditions aux limites sont montrés en figure 3. Une comparaison qualitative permet de mettre en évidence l'intérêt d'une modélisation anisotrope des phénomènes de rupture. Sur la figure 4, les déformations axiales et latérales à rupture le long de l'interface sont représentées. Deux mécanismes distincts sont observés. Tout d'abord une fissuration



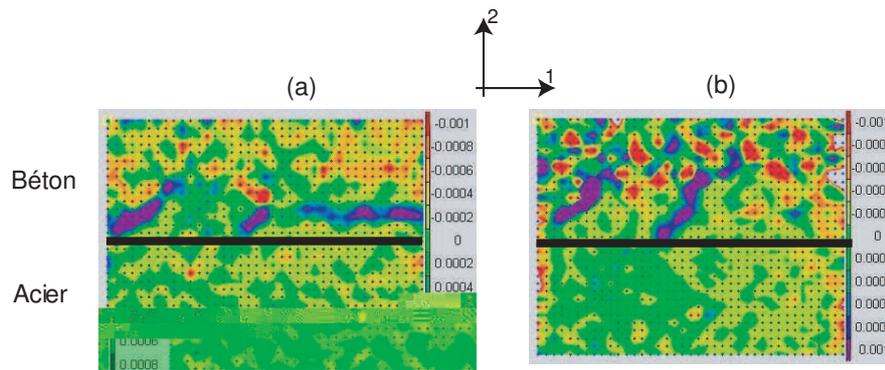
**Figure 2.** *Eprouvette en contrainte plane d'essais d'adhérence acier-béton*



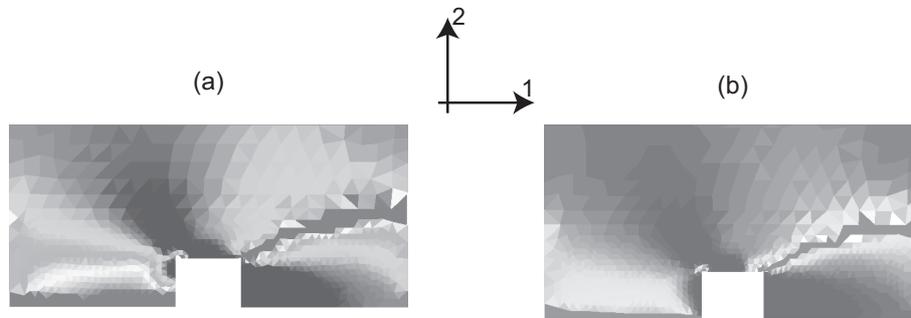
**Figure 3.** *Cellule élémentaire et maillage élément finis*

à 45° partant des nervures et une décohésion en mode I entre les nervures le long de l'interface.

Cet essai a été simulé à l'aide du modèle d'endommagement anisotrope pour un maillage 3D représentant l'éprouvette. La figure 5 présente les résultats en termes de carte d'endommagement dans la direction axiale ( $\vec{1}$ ) et latérale ( $\vec{2}$ ). À la différence d'un modèle purement isotrope, l'approche anisotrope de l'endommagement permet ici de bien discriminer les deux modes de rupture le long de l'interface.



**Figure 4.** Mesure de champ le long de l'interface. (a) Déformation normale latérale  $\varepsilon_{22}$ , (b) déformation normale axiale  $\varepsilon_{11}$



**Figure 5.** Cartes d'endommagement le long de l'interface. (a) Endommagement  $D_{22}$ , (b) endommagement  $D_{11}$

## 6.2. Structure en béton précontraint

Afin de traiter un exemple plus proche de l'ingénierie, intéressons-nous au problème de la tenue à court terme de la structure en béton précontraint dont le maillage

est donné à la figure 6a. Celle-ci représente une tranche d'une enceinte de confinement de centrale nucléaire, renforcée par des armatures passives et des câbles de précontraintes. Le diamètre de l'anneau est de 46,8 m, l'épaisseur est de 0,9 m pour une hauteur de 0,4 m. Une contrainte verticale de 8,5 MPa est appliquée, ce qui représente la partie supérieure de l'enceinte non représentée dans la simulation numérique. Les armatures passives sont constituées de 88 cadres d'efforts tranchant (non modélisés ici), de 4 armatures circulaires et de 2 câbles de précontrainte semi-circulaire (4,4 MN de tension dans chaque câble). On peut remarquer qu'il existe deux excroissances de béton sur cet anneau circulaire qui permettent d'ancrer les câbles de précontraintes. La simulation numérique est réalisée en 3D à l'aide du code aux éléments finis CAST3M. Les armatures passives et actives sont modélisées à l'aide d'éléments barres à 2 nœuds, tandis que le béton est modélisé par des éléments cubiques à 8 nœuds. Les aciers (actifs et passifs) sont supposés avoir un comportement élastique parfaitement plastique tandis que le béton est modélisé par la loi de comportement décrite précédemment. Les paramètres « matériau » pour les aciers sont :  $E = 190\,000$  MPa,  $\nu = 0.3$ , limite élastique de 500 MPa pour les armatures passives de diamètre 25 mm ;  $E = 190\,000$  MPa,  $\nu = 0.3$ , limite élastique de 1 814 MPa pour les câbles de précontrainte de section 5 143 mm<sup>2</sup>.

La déformée de la structure après la phase de mise en précontrainte est donnée sur la figure 6a.

Une pression interne  $P$ , monotone et croissante linéairement, est ensuite appliquée. L'endommagement de la structure est calculé jusqu'à une pression de  $P_{Max} = 2$  MPa ce qui correspond à un endommagement tel que la structure peut être considérée comme rompue. En raison de la présence des points rigides que forment les ancrages en béton, la déformée obtenue sur la figure 6b n'est pas uniforme.

La carte d'endommagement (figure 7) montre une fissuration orientée, principalement radiale (normalement représentée par  $D_{\theta\theta}$ , soit  $D_{22}$  dans la partie  $\theta \approx 0^\circ$  et  $180^\circ$  et  $D_{11}$  dans la partie  $\theta \approx 90^\circ$  et  $-90^\circ$ ).

L'évolution des endommagements principaux au point A (point externe de l'ancrage) et B (point interne de l'ancrage) sont tracés sur la figure 8. Le point A est le point de la structure le plus endommagé après la mise en précontrainte. Lors de la mise en pression de l'enceinte, les microfissures se répartissent sur la totalité de l'enceinte jusqu'à un niveau constant  $D_{\theta\theta} \approx 1$  pour  $P = P_{Max} = 2$  MPa.

Ce test montre qu'il est possible d'utiliser un modèle d'endommagement anisotrope pour réaliser des simulations numériques de structures en béton précontraint même jusqu'à un niveau élevé d'endommagement et de plastification des armatures. Il illustre également le fait que des microfissures existent initialement dans de tels structures dues à la mise en précontrainte.

Dans la simulation numérique effectuée avec le modèle local, la présence d'acier associée à un mode de fissuration principalement en traction ainsi que la taille importante du maillage éléments finis utilisé (0.3 m en zone courante) empêche le phénomène de localisation des déformations de sorte que les calculs effectués en non local

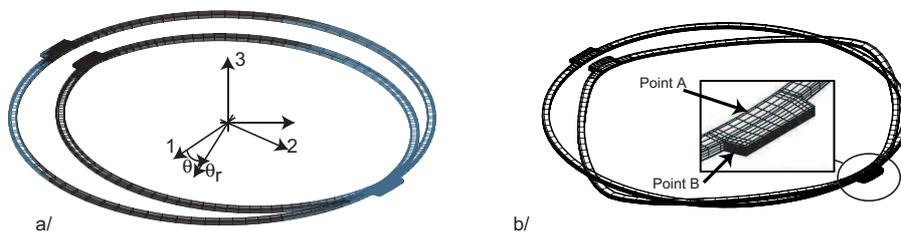
sur le présent maillage donne des résultats identiques. Si l'on souhaite représenter une microfissuration plus localisée, il ne faut réaliser que des calculs non locaux mais en utilisant des éléments bien plus petits, choix qui n'a pas été possible pour la présente étude et qui induirait un coût de calcul bien plus important.

## 7. Conclusions

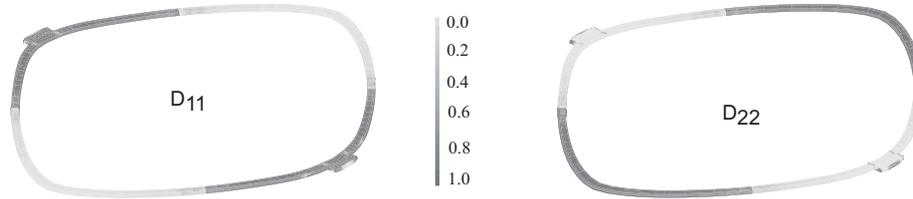
Un modèle d'endommagement anisotrope induit pour les matériaux quasi-fragiles est présenté. Une seule variable d'endommagement rend compte de l'état de microfissuration du matériau, aussi bien en traction qu'en compression. L'anisotropie induite par le chargement est responsable de la forte dissymétrie traction-compression du béton. Les paramètres caractéristiques du matériau sont au nombre de 5 : 2 pour l'élasticité, 1 pour le seuil d'endommagement, 2 pour l'endommagement. Un schéma numérique implicite est décrit. Il se programme de manière totalement explicite et permet de prendre en compte l'anisotropie induite lors du calcul de structures pour quasiment le même coût qu'un calcul avec endommagement isotrope.

Si le calcul de la déformation équivalente non locale de Mazars est disponible dans le code EF utilisé, implanter le modèle d'endommagement anisotrope non local est immédiat. Nous avons également montré qu'il était possible de calculer une structure à l'aide d'un modèle d'endommagement anisotrope non local.

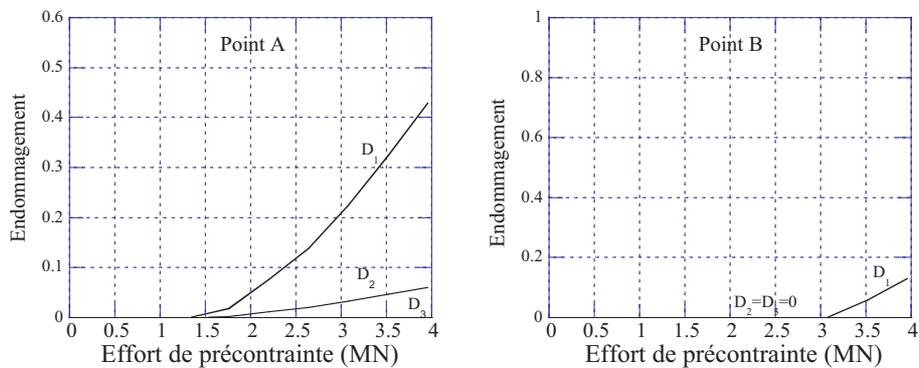
Enfin, l'implantation numérique du modèle permet d'avoir un schéma exact au niveau local et ainsi de ne pas avoir de processus itératif. Associée à l'emploi d'une loi de comportement non locale, cela permet de pousser ces simulations jusqu'à des niveaux d'endommagement représentatifs de la rupture des structures.



**Figure 6.** Déformée de l'anneau (a) après mise en précontrainte et (b) après mise en pression - Points A et B des ancrages



**Figure 7.** Champs d'endommagement pour  $P = 2 \text{ MPa}$



**Figure 8.** Endommagement aux points A et B pendant la mise en précontrainte

## 8. Bibliographie

- Chaboche J. L., « Development of continuum Damage Mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage », *Int. J. Damage Mechanics*, vol. 2, p. 311-329, 1993.
- Cordebois J., Sidoroff F., « Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité », *J.M.T.A.*, vol. special, p. 45-65, 1982.
- Desmorat R., Gatuingt F., Ragueneau F., « Explicit evolution law for anisotropic damage : application to concrete structures », *NATO Advanced Research Workshop – Multi-physics and Multi-scale Computer Models in Non-linear Analysis and Optimal Design of Engineering Structures Under Extreme Conditions*, Bled (Slovenia), 2004.
- Dragon A., « Modélisation de l'endommagement par mésosfissuration : comportement unilatéral et anisotropie induite », *C. R. Acad. Sci., Série IIb*, vol. 322, p. 275-282, 1996.
- Hild F., *CORRELI<sup>LMT</sup> : a software for displacement field measurements by digital image correlation*, Internal report N° 254, LMT Cachan, 2002.
- Laborderie C., *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse de structures en béton*, Thèse, Université Paris VI, 1991.

- Ladevèze P., « On an anisotropic damage theory », *Failure criteria of structured media*, Villars-de-Lans, p. 355-363, 1983.
- Ladevèze P., « Modeling and simulation of the mechanical behavior of CMCs », *High Temperature Ceramic-Matrix Composite*, A. G. Evans and R. Naslain eds, *Ceramic Transaction*, vol. 57, p. 53-64, 1995.
- Lemaitre J., *A course on Damage Mechanics.*, Springer Pubs, 1992.
- Lemaitre J., Desmorat R., *Engineering Damage Mechanics : Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*, Springer, 2005.
- Lemaitre J., Desmorat R., Sauzay M., « Anisotropic damage law of evolution », *Eur. J. Mech., A/Solids*, vol. 19, p. 187-208, 2000.
- Mazars J., Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure, Thèse, Doctorat d'état de l'Université Paris VI, France, 1984.
- Mazars J., Berthaud Y., Ramtani S., « The unilateral behaviour of damaged concrete », *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 35, n° 4, p. 629-635, 1990.
- Ouglova A., Etude du comportement mécanique des structures en béton armé atteintes par la corrosion, Thèse, ENS Cachan, 2004.
- Pijaudier-Cabot G., Bažant Z., « Nonlocal damage theory », *J. Engng Mech. ASCE*, vol. 113, p. 1512-1533, 1987.
- Ragueneau F., François M., Ouglova A., Delaplace A., Berthaud Y., « Identification of the properties of steel concrete interface through optical tests », *Euromech-Mecamat, EMMC8*, Cachan, France, p. 8p, 2005.