



**HAL**  
open science

# Développement d'une méthode analytique pour la prédiction des mécanismes vibro-acoustiques des plaques orthotropes raidies de forme quelconques : application à la table d'harmonie de piano

Benjamin Trévisan, Kerem Ege, Bernard Laulagnet

## ► To cite this version:

Benjamin Trévisan, Kerem Ege, Bernard Laulagnet. Développement d'une méthode analytique pour la prédiction des mécanismes vibro-acoustiques des plaques orthotropes raidies de forme quelconques : application à la table d'harmonie de piano. 12ème Congrès Français d'Acoustique, CFA 2014, Apr 2014, Poitiers, France. pp.1093-1099. hal-00993873

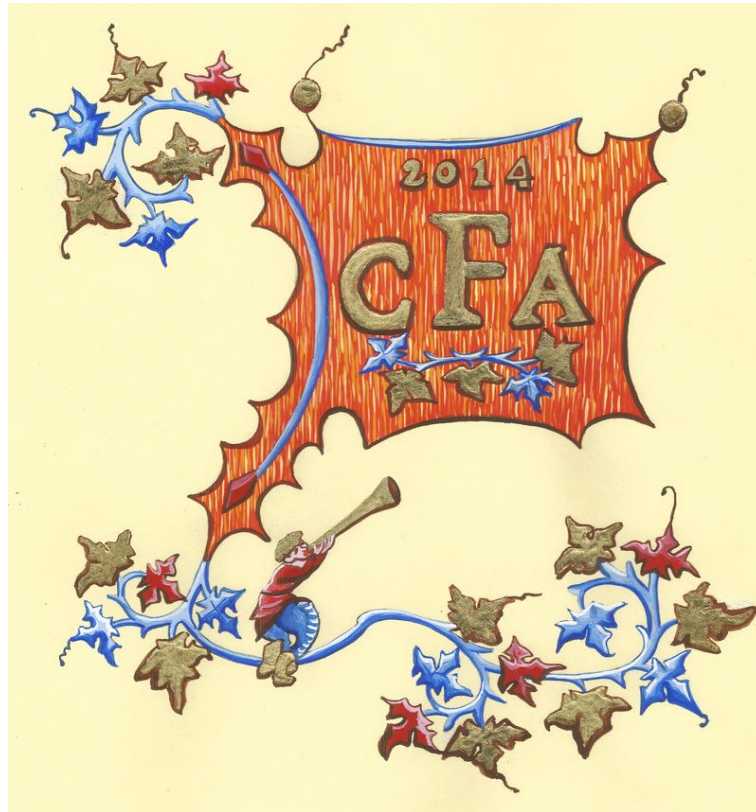
**HAL Id: hal-00993873**

**<https://hal.science/hal-00993873v1>**

Submitted on 18 May 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Développement d'une méthode analytique pour la prédiction des mécanismes vibro-acoustiques des plaques orthotropes raidies de forme quelconques : application à la table d'harmonie de piano**

B. Trevisan, K. Ege et B. Lualagnet

INSA Lyon - Laboratoire Vibrations Acoustique, 25 bis, avenue Jean Capelle, 69621 Villeurbanne, France  
benjamin.trevisan@insa-lyon.fr

Le but de cette étude est de développer une méthode analytique pour la prédiction des mécanismes vibro-acoustiques des plaques orthotropes raidies de formes quelconques et plus particulièrement de son application à la table d’harmonie de piano. Elle s’appuie sur une approche variationnelle et les mouvements sont calculés par décomposition modale. Dans cet article, nous proposons une vue générale de la méthode ainsi que les premiers résultats sur une table d’harmonie simplifiée. Entre autre, nous présentons une analyse des modes de plaque raidie ainsi que des réponses vibratoires à des fréquences caractéristiques traitées dans la littérature mais aussi des réponses à des excitations de type musicale.

## 1 Introduction

Longtemps conçus de manière empirique, les instruments de musique sont aujourd’hui sujet à des études de plus en plus nombreuses qui s’avèrent complexes de par l’aspect perceptif et subjectif du son produit par les instruments. En effet, de nombreux paramètres définissent le timbre de ces derniers allant des bois utilisés [1, 2] jusqu’aux spécificités liées à la conception de l’instrument qui déterminent en grande partie leur comportement vibratoire. Dans le cas de la table d’harmonie de piano, ce problème a été abordé à de nombreuses reprises par Suzuki, Conklin, Giordano [3, 4, 5] et plus récemment par Berthaut, Ege & Boutillon et Chaigne [6, 7, 8, 9] mais son comportement large bande est complexe et les problématiques liées au piano sont guidées par des questions d’ordre purement musical. Parmi elles, la recherche d’un bon compromis “longueur du son / puissance rayonnée” dans l’avant dernière octave (*killer octave*) ou encore la question du timbre insuffisamment riche dans les aigues semblent être les principales difficultés rencontrées par les facteurs. Dans l’optique de répondre à ces questions, l’analyse de l’influence des superstructures (barres et chevalets) sur le comportement vibro-acoustique de la table d’harmonie de piano est réalisée via un modèle analytique dédié basé sur une formulation variationnelle, offrant ainsi la possibilité de quantifier l’influence de petites variations de géométrie.

C’est aussi la possibilité de s’affranchir de la méthode éléments finis qui est trop lourde à manier pour les études paramétriques nombreuses à venir.

## 2 Considérations géométriques

La table d’harmonie a un rôle prépondérant dans le fonctionnement de l’instrument. En effet, les cordes étant de sections trop faibles pour rayonner suffisamment d’elles-mêmes, leurs vibrations sont transmises à la table via le chevalet qui fait alors office de radiateur acoustique efficace.

Il s’agit d’une structure de géométrie complexe et on distingue deux catégories principales de piano : les pianos à queue, de grandes tailles, dont la table d’harmonie est horizontale et les pianos droits, de dimensions plus réduites, dont la table d’harmonie est cette fois ci verticale. Outre le plan dans lequel la table est inscrite, leurs géométries sont complètement différentes comme le montrent les figures 1 et 2. Dans les deux cas, elles sont constituées d’une plaque de forme quelconque, classiquement en épicea, raidie sur une face par de multiples barres pseudo-périodiquement espacées dans une direction perpendiculaire au grain, et par un (piano à corde parallèle) ou deux (piano à cordes croisées) chevalets sur la face opposée dans une direction quasi parallèle au grain (représentés en bleu sur les figures 1

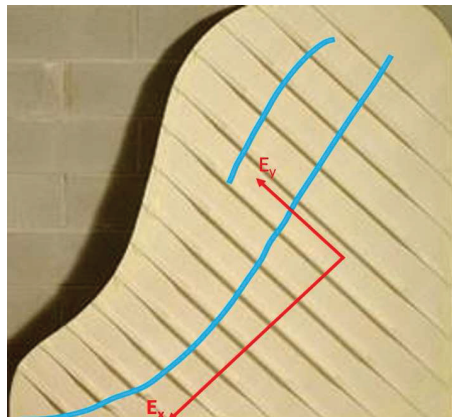


FIGURE 1 – Table d’harmonie d’un piano à queue.

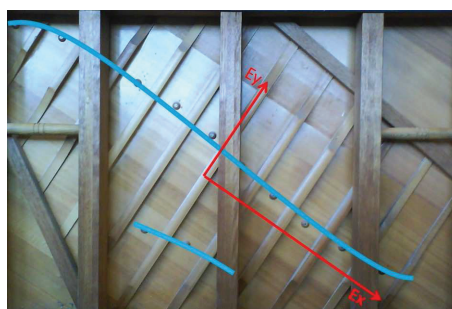


FIGURE 2 – Table d’harmonie d’un piano droit.

et 2). L’épicéa est également utilisé pour la fabrication des barres tandis que les chevalets sont habituellement fait en érable ou en hêtre.

Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons à une géométrie simplifiée de table de piano droit : la plaque est rectangulaire, l’orthotropie est dite dite “spéciale” (axes d’orthotropie parallèles aux bords de plaque), les conditions aux limites sont simplement supportées et la table ne comprend qu’un seul chevalet rectiligne dans la direction du grain (axe principal d’orthotropie). Voir figure 3. L’excentricité des différentes superstructures est par ailleurs prise en compte. De plus l’épaisseur de la table, tout comme la largeur et la hauteur des différentes superstructures sont constantes.

## 3 Formulation théorique

Le modèle analytique développé se base sur une approche variationnelle s’inspirant des travaux de Laulagnet & Guyader [10, 11]. Il convient de calculer énergies cinétique et de déformation de l’ensemble.

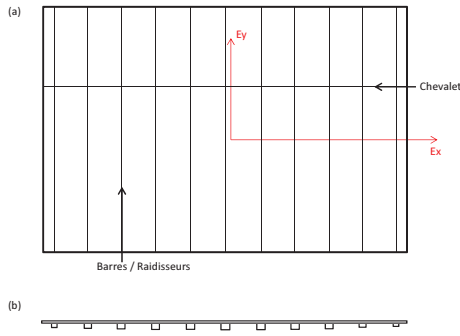


FIGURE 3 – Table d’harmonie d’un piano droit simplifiée utilisée dans le modèle analytique. (a) : vue de dessus ; (b) : vue en coupe de la table et des raidisseurs.

### 3.1 Hypothèses cinématiques des différentes sous-structures

De par sa petite épaisseur devant les dimensions moyennes de la plaque, nous adoptons les hypothèses de Love-Kirchhoff relatives aux plaques minces. Les effets de pompage ainsi que le cisaillement dans les deux plans de flexion sont négligés. Le feuillet moyen de la plaque n’admet quant à lui pas de déplacement dans les directions des bords de plaque. En tenant compte de ces hypothèses ainsi qu’en écrivant comme linéaire la variation des déplacements dans l’épaisseur (développement limité d’ordre 1), il vient le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

où  $u(x, y, z, t)$  et  $v(x, y, z, t)$  sont les déplacements dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  et  $w(x, y, z, t)$  représente le déplacement transversal.

Les différentes superstructures (barres et chevalet) sont quant à elles animées d’un mouvement de flexion et d’un mouvement de torsion. Les conditions aux limites étant appliquées à la plaque et non aux superstructures, c’est la plaque qui gouverne le mouvement de ces dernières. De par la continuité des déplacements et des rotations à l’interface, nous avons pour un raidisseur orienté dans la direction  $\vec{y}$  à la position  $x = x_r$  :

$$\begin{cases} u_{rfl}(y, z, t) = -z w_{,x}(x_r, y, t) \\ v_{rfl}(y, z, t) = -z w_{,y}(x_r, y, t) \\ w_{rfl}(x, y, t) = w(x_r, y, t) + x w_{,x}(x_r, y, t) \end{cases} \quad (2)$$

où  $x \in [x_r - \frac{h}{2}; x_r + \frac{h}{2}]$  et  $z \in [\frac{h}{2}; \frac{h}{2} + H]$  et où  $h$  et  $H$  sont respectivement l’épaisseur de la plaque et la hauteur du raidisseur considéré.

### 3.2 Fonctionnelle de Hamilton

A partir des différents champs de déplacements, on exprime les fonctionnelles de Hamilton (fonctionnelles d’actions associées) de chaque sous partie. Cette

fonctionnelle s’exprime comme l’intégrale de la différence entre l’énergie cinétique et l’énergie de déformation sur un intervalle de temps arbitraire. Ainsi on exprime successivement l’action de la plaque, de la flexion et de la torsion d’un raidisseur orienté dans la direction  $\vec{y}$  à la position  $x = x_r$  par :

$$H_{plaque} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_S \rho h \dot{w}^2 - (D_1 w_{,xx}^2 + D_3 w_{,yy}^2 + D_2 w_{,xx} w_{,yy} + D_4 w_{,xy}^2) dS dt \quad (3)$$

$$H_{flexion\ raidisseur} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_S [\rho_r (I_f \dot{w}_{,x}^2 + bH \dot{w}^2) - E_r I_f w_{,yy}^2] \delta(x - x_r) dS dt \quad (4)$$

$$H_{torsion\ raidisseur} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_S [\rho_r I_g w_{,x}^2 - G_r I_g w_{,xy}^2] \delta(x - x_r) dS dt \quad (5)$$

où le raidisseur est considéré comme ponctuel dans sa largeur ce qui justifie l’application du dirac  $\delta(x - x_r)$ .

Notons que l’on conserve le terme d’énergie rotationnelle dans la formule de flexion. Du fait de la faible hauteur des raidisseurs par rapport à leur largeur, l’inertie de torsion ne prend quant à elle pas en compte les phénomènes de gauchissement.

Pour une structure avec une multitude de barres orientées selon la direction  $\vec{y}$  et un chevalet dans la direction perpendiculaire, on exprime la fonctionnelle d’action de l’ensemble par :

$$H_{totale} = H_{plaque} + \sum_{i=1}^N H_{i\text{eme}\ raidisseur} + H_{chevalet} \quad (6)$$

### 3.3 Décomposition modale sur la base des modes propres d’une plaque simplement supportée non raidie

Nous souhaitons maintenant développer ces dernières équations sur la base des modes propres d’une plaque non raidie. Pour cela nous choisissons les conditions aux limites simplement supportées pour la plaque car il s’agit d’une base appropriée à une approche analytique couramment utilisée en vibration [10, 11]. Le déplacement transversal de la plaque s’écrit comme une combinaison linéaire de modes de plaque non raidie pondérés par les amplitudes modales  $a_{mn}(t)$  :

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \phi_{mn}(x, y) \quad (7)$$

où  $\phi_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$ .

Notons que les déformées propres de la plaque simplement supportée (non raidie) sont orthogonales. En injectant cette solution dans l’expression de la fonctionnelle de Hamilton, on peut réaliser analytiquement l’intégrale de surface au sein de cette fonctionnelle.

Il en résulte que la fonctionnelle dépend alors du couple de variable  $(a_{mn}(t), \dot{a}_{mn}(t))$  et non plus du déplacement transversal  $w(x, y, t)$  et de ses dérivées spatiales et temporelles  $w_{,x}$ ,  $w_{,xx}$ ,  $w_{,yy}$ ,  $w_{,xy}$  et  $\dot{w}$ . On pose alors :

$$H_{totale} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(a_{mn}(t), \dot{a}_{mn}(t)) dt \quad (8)$$

où  $\mathcal{L}(a_{mn}(t), \dot{a}_{mn}(t))$  est le Lagrangien du système.

### 3.4 Équations de Lagrange

En mécanique analytique tout système vibrant est régi par le principe de moindre action, également nommé principe de Hamilton. En pratique, on utilise la forme différentielle d'Euler-Lagrange pour déterminer l'évolution du système. Soit les équations suivantes :

$$\delta H_{totale} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{pq}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{pq}} = 0 \quad (9)$$

exprimée pour chaque mode de plaque non raidie et où  $p = 1 \rightarrow M$  et  $q = 1 \rightarrow N$ .

Cette minimisation, alliée aux propriétés d'orthogonalités des déformées propres de la plaque simplement supportée, permet d'écrire une équation pour un mode "pq" arbitraire. On obtient finalement un problème homogène dont la taille est conditionnée par le nombre de mode de plaque non raidie pris en compte, qui doit assurer la convergence de la solution, soit :

$$\begin{cases} [M_p^{plaque}] + [M_{pn}^{raidisseurs} + [M_{pn}^{chevalet}]] \end{cases} \begin{cases} \ddot{a}_p \\ \end{cases} + \begin{cases} [K_p^{plaque}] + [K_{pn}^{raidisseurs} + [K_{pn}^{chevalet}]] \end{cases} \begin{cases} a_p \\ \end{cases} = \bar{0} \quad (10)$$

où  $p = (m, n)$  et  $n = (r, s)$ .

Dans les résultats présentés par la suite, nous avons augmenté pas à pas le nombre de modes de plaque non raidie pris en compte jusqu'à stabilisation des fréquences propres en hautes fréquences. Cela nous amène à des ordres  $p$  et  $q$  valant respectivement 60 et 40.

Contrairement aux matrices relatives à la plaque qui sont diagonales, nous constatons que celles liées aux raidisseurs et au chevalet sont pleines et symétriques. Les superstructures introduisent donc un couplage des modes de plaque non raidie, couplage qui va se révéler extrêmement fort comme nous le montrerons par la suite.

Sous une forme harmonique, l'équation 10 devient :

$$(\bar{K} - \omega^2 \bar{M}) \bar{a} = \bar{0} \quad (11)$$

où  $\bar{K}$  et  $\bar{M}$  sont respectivement les matrices de raideur et de masse généralisées de l'ensemble plaque raidie et  $\bar{a}$  le vecteur des amplitudes modales  $\ddot{a}_{pq}$ .

## 4 Problème aux valeurs propres

Une première étude concerne l'analyse des modes d'une structure raidie. Nous nous intéressons pour cela au problème aux valeurs propres standard suivant en prémultipliant l'équation généralisée (11) par  $\bar{M}^{-1}$  :

$$(\bar{N} - \lambda \bar{I}) \bar{a} = \bar{0} \quad (12)$$

où  $\bar{N}$  est le noyau du système [13] valant  $\bar{M}^{-1} \bar{K}$  et  $\lambda = \omega^2$ .

La recherche des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice  $N$  conduit à une matrice diagonale des pulsations propres au carré et à une matrice des vecteurs propres dont les termes sont les amplitudes modales pondérant les modes de plaque non raidie pour recréer les modes de plaque raidie (équation 7).

L'étude réalisée se concentre sur la plage de fréquences 0 à 5kHz. Nous nous intéressons à deux cas d'études :

- Cas n° 1 : onze barres orientées selon  $\vec{y}$  pseudo-périodiquement espacées,
- Cas n° 2 : les mêmes onze barres orientées selon  $\vec{y}$  et un chevalet selon  $\vec{x}$ . Voir figure 3.

Les dimensions de la table et des superstructures sont tirées de [7] et font référence à un piano droit d'entrée de gamme. Notons que les barres deviennent de moins en moins imposantes au fur et à mesure que l'on se dirige vers les notes aiguës (sens de droite à gauche sur la figure 3). Intéressons nous au nombre de modes nécessaires pour reconstruire un mode de plaque raidie. Pour cela, nous cumulons les  $a_{pq}$  les plus grands jusqu'à nous approcher à plus de 99% de la réponse complète. La figure 4 présente l'évolution de ce nombre en fonction de la fréquence.

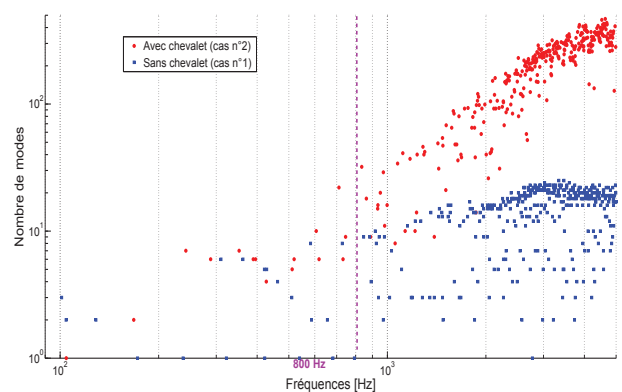


FIGURE 4 – Évolution en fonction de la fréquence du nombre de modes de plaque non raidie intervenant dans la combinaison linéaire des modes de plaque raidie.

Les travaux de [6, 7, 8] montrent via des indicateurs statistiques (densité modale) qu'une structure raidie, et plus particulièrement la table d'harmonie de piano, s'apparente à une structure non raidie homogène équivalente en dessous d'environ 800 Hz/1 kHz. Ces modes apparaissent sur l'abscisse de la figure 4. Nous constatons que le nombre de modes homogènes est nettement plus important dans le cas n° 1 (raidie dans une seule direction) que dans le cas n° 2 (cas n° 1 avec un chevalet). Au delà de cette fréquence, le nombre de modes pris en compte dans la combinaison linéaire augmente grandement et culmine à 25 pour le cas n° 1 et 467 pour le cas n° 2. Le chevalet apporte donc un couplage très important et les déformées qui en découlent sont particulièrement complexes. [7, 8] montrent également que des localisations de vibrations apparaissent lorsque la longueur d'onde dans la direction perpendiculaire au grain est de l'ordre de l'espace inter-raisseur. Nos calculs montrent que la majorité des localisations intervient en effet dans les conditions décrites par les auteurs sus-nommés. Néanmoins, il apparaît que plusieurs modes basses fréquences sont une combinaison linéaire de mode de plaque non raidie et ne peuvent être assimilables à des modes de plaque homogène et qui plus est, présentant des localisations. Voir figure 5 et 6.

Dans le cas n° 1 (raidie dans une seule direction), nous voyons que les écarts de dimensions entre les raidisseurs

(hauteurs et largeurs) créent une dissymétrie. A partir du troisième mode, la structure s'homogénéise jusqu'à environ 800 Hz/1 kHz à quelques modes localisés près, comme le 6ème mode de fréquence 310 Hz. Voir figure 5.

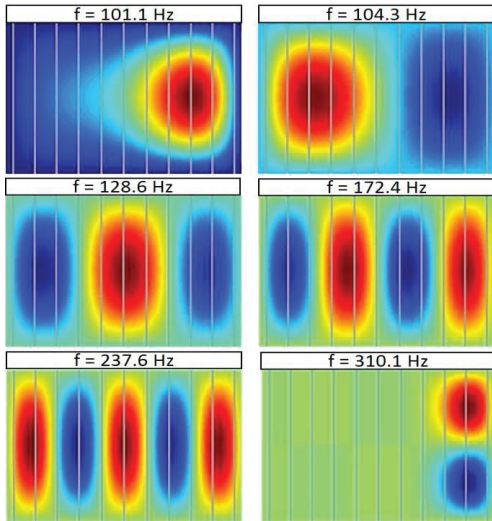


FIGURE 5 – 1er au 6ème modes pour le cas n° 1 (table raidie dans une seule direction).

Dans le cas n°2 (cas n°1 avec un chevalet), la table d'harmonie apparaît comme coupée en deux. On retrouve alors souvent une zone vibrante et une zone non vibrante de part et d'autre du chevalet. Voir figure 6. Dans ces conditions, seul le premier mode "ne voit pas" les superstructures et correspond à un mode de plaque non raidie même si le second mode n'en est pas très éloigné. Cependant en tenant compte de l'effet séparateur précédemment cité, on retrouve des modes de plaque proche de ceux d'une plaque non raidie sur une table réduite à une partie plus petite limitée par le chevalet. Le chevalet tend donc à "répartir" la hauteur des différents raidisseurs le long de la plaque et à homogénéiser la plaque dans la direction  $\vec{x}$  pour les premiers modes. Nous trouvons également des localisations en dehors des conditions décrites par [7, 8] mais ces phénomènes sont encore moins fréquent que dans le cas n° 1.

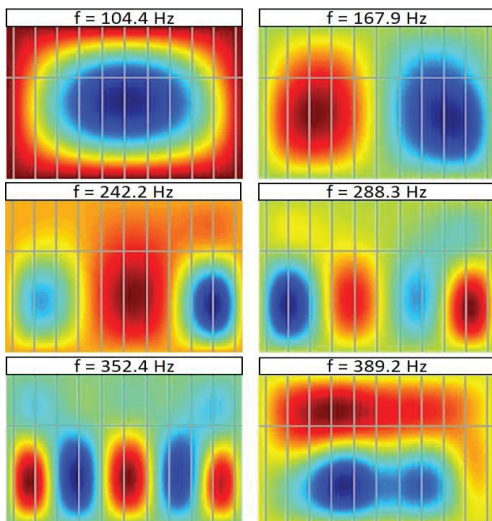


FIGURE 6 – 1er au 6ème modes pour le cas n° 2 (table raidie avec chevalet).

En plus de pouvoir réaliser facilement et rapidement des études paramétriques, la méthode que nous développons permet de calculer des modes hautes fréquences rapidement. La figure 7 présente un de ces modes qui met en évidence de nombreux phénomènes vibratoires avec notamment des ondes obliques où des réflexions d'ondes localisées dans des espaces inter-raidsseurs particuliers.

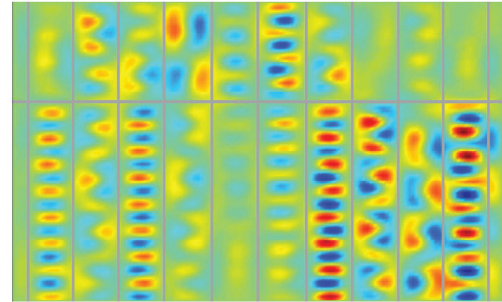


FIGURE 7 – 288ème mode pour le cas n° 2 (table raidie avec chevalet) de fréquence 4190 Hz présentant des phénomènes vibratoires complexes.

## 5 Réponses forcées

Une seconde étude concerne la réponse du système soumis à une excitation particulière. Nous introduisons donc un effort extérieur de forme harmonique  $F(x_e, y_e, t) = F\delta(x - x_e)\delta(y - y_e)e^{j\omega_e t}$  où la multiplication des diracs  $\delta(x - x_e)\delta(y - y_e)$  rend cet effort ponctuel et appliqué aux coordonnées  $(x_e, y_e)$ . On définit le vecteur des efforts généralisés  $\bar{F}_{gen}$  dont les composantes s'expriment par la relation suivante :

$$F_{pq} = F \phi_{pq}(x_e, y_e) \quad (13)$$

On calcul alors le vecteur des amplitudes modales correspondant à une excitation particulière :

$$\bar{a} = (\bar{K} - \omega_e^2 \bar{M})^{-1} \bar{F}_{gen} \quad (14)$$

Ege *et al.* montrent dans [7] que l'amortissement structural mesuré sur une table d'harmonie en épicea de piano de droit en situation de jeu varie entre 1 et 3%. Nous avons donc choisi d'appliquer un coefficient de 2% constant pour toutes les fréquences en rendant complexe la matrice de raideur  $\bar{K}$ .

### 5.1 Impédance au chevalet et sur la peau

La mobilité au chevalet est une mesure classique en acoustique musicale [5, 3, 4, 9] et a aussi fait l'objet de modélisation visant à montrer que celle-ci est en grande partie dominée par le chevalet seul [8].

Elle est définie par le rapport entre la vitesse vibratoire et l'effort appliqué en ce même point d'excitation. Dans le cadre d'une excitation harmonique, cette mobilité est calculée par :

$$Y(x_e, y_e, \omega_e) = \frac{j\omega_e w(x_e, y_e, \omega_e)}{F} \quad (15)$$

Afin de vérifier la pertinence du modèle, nous comparons nos résultats à ceux de N. Giordano [5] et plus particulièrement en simulant une excitation au chevalet et une loin du chevalet, directement sur la plaque entre deux raidisseurs. Giordano ayant mesuré des impédances ( $|Z| = 1/|Y|$ ), c'est sous cette forme que nos résultats seront présentés ici.

La géométrie de la plaque simulée est adaptée afin de s'approcher au mieux de la table utilisée expérimentalement par [5]. Nous ne connaissons malheureusement que peu de choses sur la table utilisée hormis les dimensions de la plaque, le nombre de raidisseurs ainsi que leurs espacements (ces données géométriques ont été mesurées à la main sur le schéma de Giordano publié dans [5]). De nombreuses dimensions restent inconnues. Il nous est donc impossible de comparer rigoureusement nos résultats aux données expérimentales. Malgré les différences et inconnues qui subsistent, nos résultats corroborent avec ceux de [5] comme le montre la figure 8.

Les impédances calculées sont du même ordre de grandeur que celles issues de la littérature et suivent les tendances d'évolution mesurées. Au chevalet, la valeur moyenne de l'impédance est tout à fait comparable pour les deux courbes. Loin du chevalet, l'impédance calculée analytiquement est globalement 3 fois inférieure à celle calculée au chevalet ce qui corrobore bien les mesures de Giordano [5]. On retrouve par ailleurs la diminution subite de l'impédance en plus hautes fréquences lorsque les longueurs d'ondes dans la direction perpendiculaire aux barres est de l'ordre de grandeur de l'espace inter-raideurs [7, 8].

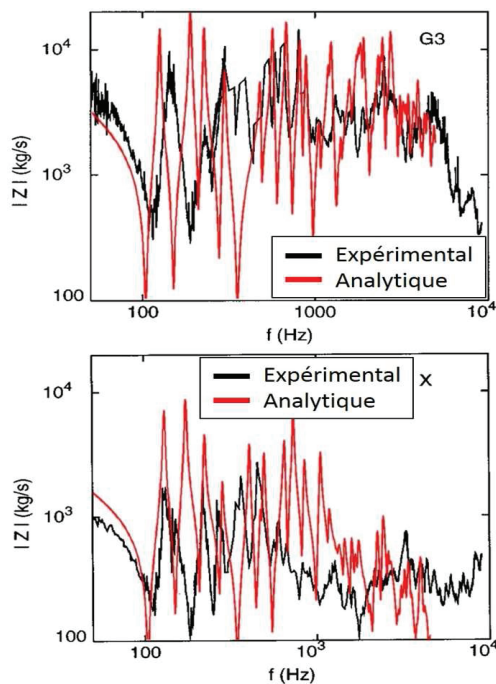


FIGURE 8 – Comparaisons d'impédances entre expériences de N. Giordano [5] et le modèle analytique développé. En haut : au chevalet. ; En bas : loin du chevalet entre deux barres.

## 5.2 Excitation représentative d'une corde pincée

L'analyse de la réponse forcée ne se limite pas à l'impédance de la table en certains points mais permet tout comme pour la réponse libre du système de visualiser le comportement de la structure complète.

Nous proposons dans cette dernière partie de comparer les réponses vibratoires de quelques notes (combinaison de fréquences). Dans le cas du piano les cordes sont frappées. Malgré tout nous utilisons un modèle de corde pincée plus simple à mettre en œuvre dans le cadre de cette étude. Ce modèle est issu de [14] et les cordes peuvent être considérée comme harmonique en première approximation [15]. Nous retenons après passage dans le domaine fréquentiel (transformée de Fourier) l'effort au chevalet suivant :

$$\bar{F}(\omega) = -T \sum_n \frac{2hL_c}{n\pi x_m(L_c - x_m)} \cos(k_n L_c) \sin(k_n x_m) \frac{1}{2} \delta(\omega - \omega_n) \quad (16)$$

où  $T$ ,  $h$ ,  $L_c$  et  $x_m$  sont respectivement la tension de la corde, son amplitude initiale, la longueur de corde vibrante et la position à laquelle elle est pincée.

La réponse d'une corde pincée s'interprète donc comme une combinaison linéaire d'excitation à sinus pur dont les amplitudes varient pour chaque composante (équation 16). Cette amplitude varie en  $1/n$  et le terme  $\cos(k_n L_c) \sin(k_n x_m)$  induit un déphasage entre les composantes. En suivant la même méthode que dans la partie précédente, nous calculons le champ de vitesse relatif à chacune de ces composantes. Nous calculons enfin la vitesse quadratique de l'ensemble, soit :

$$v_{note}(x, y) = \sqrt{\sum_n |j\omega_n w(x, y, \omega_n)|^2} \quad (17)$$

Ce calcul ne prend pas en compte le déphasage entre les différentes composantes représentatives d'une corde pincée qui se trouvent être biaisées du fait que cette modélisation n'intègre pas l'amortissement dans la corde (excitation entretenue). Ce calcul fournit donc des indications spatiales sur le champ vibratoire et reste défini à une constante près. Notons que les différentes croix sur les figures correspondent aux positions des excitations.

Dans les premières notes, les vibrations "ne voient" que très peu les superstructures. Les harmoniques de rangs élevés sont très nombreuses mais leur influence est pourtant faible. En effet, nous constatons que l'énergie du fondamental est prédominante même si de petites composantes dues aux harmoniques hautes fréquences sont présentes. Voir figure 9.

A l'inverse, alors que dans les notes élevées du piano le nombre d'harmoniques décroît de manière importante, les composantes hautes fréquences gagnent en importance. Voir figure 10. En effet, alors que dans les premières notes l'amplitude du fondamental est largement supérieure à celles des autres composantes, plus nous montons dans les notes et plus l'amplitude du fondamental diminue pour devenir du même ordre de grandeur que celles des autres composantes. La vitesse quadratique moyenne surfacique décroît alors grossièrement en  $1/n$  en montant dans les notes.

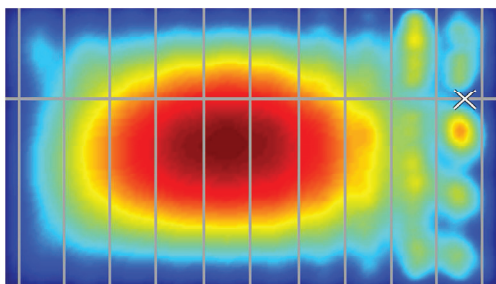


FIGURE 9 – Réponse vibratoire d'un La1 ( $f_0 = 110$  Hz).  
NB : la croix représente le point d'application de l'effort.

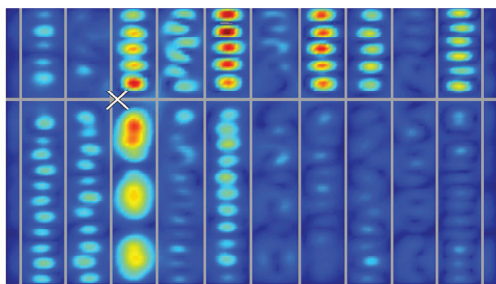


FIGURE 10 – Réponse vibratoire d'un La5 ( $f_0 = 1760$  Hz).  
NB : la croix représente le point d'application de l'effort.

La figure 10 met également en évidence le rôle particulier des superstructures dans la diffusion de l'énergie vibratoire. Étant beaucoup plus raides que la plaque, l'énergie est en premier lieu véhiculée le long du chevalet, transmise aux barres puis diffusée dans la plaque. Le rôle du squelette est alors prépondérant en moyennes et hautes fréquences où la plaque fait alors office de diffuseur acoustique. La surface vibrante reste en revanche moins importante qu'en basses fréquences.

Cette plus petite surface vibrante ainsi que les amplitudes plus faibles en HF peuvent en partie expliquer la perte de rayonnement caractéristique dans les aigues mais ne permet cependant pas d'expliquer la perte particulièrement marquée dans l'avant dernière octave (*killer octave*).

## 6 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté les bases du modèle analytique destiné à la modélisation de plaques orthotropes raidies de formes quelconques. Même s'il ne permet pas encore de prédire le comportement vibratoire d'une structure de géométrie complexe et reste limité au cas d'une plaque rectangulaire d'orthotropie spéciale, les résultats sont encourageants et rendent bien compte des phénomènes constatés jusque là dans la littérature notamment au niveau des impédances au chevalet et loin du chevalet, mais aussi en terme de modes propres et de réponses vibratoires. Des comparaisons expérimentales interviendront par ailleurs dans un futur proche pour valider les résultats numériques présentés et nous intégrerons très prochainement des complexités géométriques au modèle.

## Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Labex CeLyA de l'Université de Lyon, géré par l'Agence Nationale de la

Recherche (ANR-10-LABX-0060/ ANR-11-IDEX-0007).

## Références

- [1] I. Brémaud, Diversité des bois utilisés ou utilisables en facture d'instruments de musique, *Thèse de doctorat*, Université Montpellier II (2006).
- [2] I. Brémaud & N. Poidevin, Approches culturelles et mécaniques dans le choix des bois en facture : cas des archets anciens, *5th Conference on Interdisciplinary Musicology*, Paris (2009).
- [3] H. Suzuki, Acoustics of Pianos, *Applied Acoustics*, 30(2) : 147-205 (1990).
- [4] H. A. Conklin, Design and tone in the mechanoacoustic piano. Part II. Piano structure, *JASA*, 100(2) : 695-708 (1996).
- [5] N. Giordano, Mechanical impedance of a piano soundboard, *JASA*, 104(4) : 2128-2133 (1998).
- [6] J. Berthaut, M. N. Ichchou, & L. Jezequel, Piano soundboard : structural behavior, numerical and experimental study in the modal range, *Applied Acoustics*, 64(1) : 1113-1136 (2003).
- [7] K. Ege, X. Boutillon, & M. Rébillat, Vibroacoustics of the piano soundboard : (Non)linearity and modal properties in the low- and mid-frequency ranges, *JSV*, 332(5) : 1288-1305 (2013).
- [8] X. Boutillon & K. Ege, Vibroacoustics of the piano soundboard : Reduced models, mobility synthesis, and acoustical radiation regime, *JSV*, 332(18) : 4261-4279 (2013).
- [9] A. Chaigne, B. Cotté & R. Viggiano, Dynamical properties of piano soundboards, *JASA*, 133(4) : 2456-2466 (2013).
- [10] B. Laulagnet & J. L. Guyader, Sound radiation by finite cylindrical ring stiffened shells, *JSV*, 138(2) : 173-191 (1990).
- [11] B. Laulagnet & J. L. Guyader, Structural acoustic radiation prediction : expanding the vibratory response on a functional basis, *Applied acoustics*, 43(3) : 247-269 (1994).
- [12] R. D. Mindlin, Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plate, *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme*, 18(1) : 31-38 (1951).
- [13] T. Gmür, Dynamique des structures : analyse modale numérique, *Presses polytechniques et universitaires romandes*, (1997).
- [14] A. Chaigne & J. Kergomard, Acoustique des instruments de musique, *Belin*, (2008).
- [15] X. Boutillon, Model for piano hammers : Experimental determination and digital simulation, *JASA*, 83(2) : 746-754 (1988).