



**HAL**  
open science

## Catégories à dualité

Ramzi Ksouri

► **To cite this version:**

| Ramzi Ksouri. Catégories à dualité. 2014. hal-00990046

**HAL Id: hal-00990046**

**<https://hal.science/hal-00990046>**

Preprint submitted on 13 May 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# CATÉGORIES À DUALITÉ

RAMZI KSOURI\*

RÉSUMÉ. Nous définissons la notion de catégorie à dualité comme généralisant les groupes à dualité. Deux exemples sont traités. Le premier est la dualité de Serre dans les catégories de foncteurs polynômiaux stricts. Le second concerne les complexes finis. Nous montrons en particulier que les immeubles de Tits finis sont des catégories à dualité.

## 1. INTRODUCTION

Un groupe  $G$  est à dualité au sens de Beiri et Eckmann [BE73] s'il existe un entier  $n$  et un  $G$ -module à droite  $D$  et un isomorphisme naturel

$$H^k(G, -) \cong H_{n-k}(G, D \otimes -).$$

On généralise cette définition de groupe à dualité en remplaçant le groupe  $G$  par une catégorie  $\mathcal{C}$ . Un  $\mathcal{C}$ -module est alors un foncteur de  $\mathcal{C}$  dans la catégorie des groupes abéliens  $\mathbf{Ab}$ .

**Définition 1.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie. On dit qu'elle est à dualité s'il existe un foncteur  $D : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ , un entier  $n$ , et un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\underline{\mathbb{Z}}, -) \cong \mathrm{Tor}_{n-i}^{\mathcal{C}}(D, -)$$

où  $\underline{\mathbb{Z}}$  désigne le foncteur constant.

Dans cet article, nous esquissons une théorie de la dualité. Dans le cas où la petite catégorie  $\mathcal{C}$  est un complexe simplicial fini, nous obtenons la condition locale suivante :

**Théorème 1.2.** Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble ordonné des simplexes d'un complexe simplicial fini. S'il existe un entier  $n$  tel que, pour tout simplexe  $x$  de  $\mathcal{P}$ ,

$$\tilde{H}^i(\mathrm{link}_x) = 0 \text{ pour } i \neq n - \dim(x) - 1,$$

(où  $\tilde{H}^*$  désigne la cohomologie réduite à coefficients entiers), alors  $\mathcal{P}$  est à dualité.

---

\* Laboratoire de Mathématiques: Algèbre, Topologie, Arithmétique et Structures ordonnées "LATAO", Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Le Campus Universitaire TN-2092, Tunis, Tunisie.

Ce théorème permet de retrouver la dualité classique de Poincaré pour les variétés compactes triangulées. Il entraîne aussi le résultat suivant.

**Corollaire 1.3.** *Les immeubles de Tits finis sont des catégories à dualité.*

Plus généralement, si  $k$  désigne un anneau unitaire commutatif et  $k\text{-mod}$  la catégorie des  $k$ -modules à gauche, on dit qu'un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow k\text{-mod}$  est à dualité lorsqu'il existe un entier  $n$ , un foncteur  $D^n(F) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow k\text{-mod}$  et un isomorphisme naturel

$$(1) \quad \text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(F, -) \cong \text{Tor}_{n-i}^{\mathcal{C}}(D^n(F), -).$$

Si  $k$  est un corps, l'isomorphisme (1) est équivalent au suivant

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(F, -)' \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^{n-i}(-, D^n(F)')$$

où  $D^n(F)'$  désigne la postcomposition de  $D^n(F)$  par l'opération de dualité  $V \mapsto V' := \text{Hom}_k(V, k)$ . Ce dernier isomorphisme rappelle la dualité de Serre classique pour les variétés projectives.

Idun Reiten et Michel Van Den Bergh dans [RV02] ont généralisé le concept de dualité de Serre de la façon suivante. Une catégorie  $k$ -linéaire  $\mathcal{A}$  satisfait une dualité de Serre si elle possède un foncteur de Serre, *i.e.* un endofoncteur  $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  tel que l'on ait un isomorphisme naturel

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, b)' \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(b, Sa).$$

La dualité présentée dans cet article permet d'explicitier une dualité de Serre pour la catégorie  $\mathcal{D}_{\text{parf}}(\mathcal{C}\text{-mod})$  des complexes parfaits de  $\mathcal{C}\text{-mod}$ . Précisons un peu. Soit  $D$  le foncteur :

$$D : (\mathcal{C}\text{-mod})^{op} \rightarrow \mathcal{C}^{op}\text{-mod} \\ F \mapsto DF$$

défini pour un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  par

$$DF(x) = \text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(F, P_x^{\mathcal{C}})$$

où  $P_x^{\mathcal{C}} = k[\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, -)]$  est un projectif standard de  $\mathcal{C}\text{-mod}$ . Soit

$$RD : \mathcal{D}^b(\mathcal{C}\text{-mod})^{op} \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathcal{C}^{op}\text{-mod})$$

le foncteur dérivé de  $D$ . On montre le résultat suivant :

**Proposition 1.4.** *Le foncteur  $RD(-)'$  est un foncteur dualité de Serre pour  $\mathcal{D}_{\text{parf}}(\mathcal{C}\text{-mod})$ .*

Nous illustrons la notion de foncteur à dualité par un exemple dans la catégorie  $\text{Rep} \Gamma_k^d$  des foncteurs polynomiaux stricts sur un corps fini  $k$  de caractéristique  $p$ . Soit  $s, r$  deux entiers et  $\mathfrak{s} = (s_1, \dots, s_k)$  une partition de  $s$ . Le foncteur polynômial strict  $\Gamma^{\mathfrak{s}(r)}$  (resp.  $S^{\mathfrak{s}(r)}$ ) de degré  $d := sr$  est la pré composition de  $\Gamma^{\mathfrak{s}}$  (resp.  $S^{\mathfrak{s}}$ ) par le twist de Frobenius  $\Gamma^{(r)}$ . On rappelle que  $\Gamma^{\mathfrak{s}}$  (resp.  $S^{\mathfrak{s}}$ ) est le produit tensoriel  $\Gamma^{s_1} \otimes \dots \otimes \Gamma^{s_k}$

(resp.  $S^{s_1} \otimes \cdots \otimes S^{s_k}$ ) où  $\Gamma$  (resp.  $S$ ) est le foncteur de puissances divisées (resp. symétriques). On utilise les propriétés de la dualité de Ringel étudiée dans [Touzé1] pour montrer le résultat suivant :

**Proposition 1.5.** *Le foncteur  $\Gamma^{s(r)}$  est à dualité et on a l'isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{Rep}\Gamma_k^d}^i(\Gamma^{s(r)}, -)' \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{Rep}\Gamma_k^d}^{2s(p^r-1)-i}(-, S^{s(r)}).$$

Voici un résumé des différentes sections.

Section 2 : cette section est une collection de rappels et de notations utilisées dans l'article.

Section 3 : dans le cas des modules sur un anneau  $R$ , la structure de  $R$ -module à droite sur le dual  $M' = \mathrm{Hom}_R(M, R)$  d'un  $R$ -module à gauche  $M$  est héritée de la structure de  $R$ -bimodule de  $R$ . Un équivalent du bimodule  $R$  est le bifoncteur

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} &\rightarrow k\text{-mod} \\ (x, y) &\mapsto k[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)] \end{aligned}$$

Notre théorie de la dualité s'appuie sur la propriété suivante

$$(*) \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(\underline{\mathcal{C}}(y, -), \underline{\mathcal{C}}(x, -)) \cong \underline{\mathcal{C}}(x, y)$$

fournit par le lemme de Yoneda. On appelle bifoncteur de Yoneda tout bifoncteur possédant cette propriété (\*). On montre que la donnée d'un bifoncteur de Yoneda  $T$  est équivalent à la donnée d'une sous-catégorie épitréflexive  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$  de  $\mathcal{C}\text{-mod}$ .

Section 4 : on montre qu'un bifoncteur de Yoneda  $T$  sur une catégorie  $\mathcal{C}$  fournit un foncteur de dualité  $D$  et l'on étudie les premières propriétés. On illustre ce point de vue en montrant (proposition 4.13) que pour un bifoncteur de Yoneda  $T$  sur une catégorie  $k$ -linéaire  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $RD(-)'$  est une dualité de Serre de  $\mathcal{D}_{\mathrm{parf}}(\mathcal{C}_T\text{-mod})$ .

Section 5 : un foncteur  $F$  de  $\mathcal{C}\text{-mod}$  est à dualité lorsqu'il existe un entier  $n$  tel que l'on ait un isomorphisme

$$RD(F) \cong R^n D(F)[n]$$

dans  $\mathcal{D}^+(\mathcal{C}\text{-mod})$ . Dans cette section, nous donnons plusieurs conditions équivalentes à cette dernière.

Section 6 : nous illustrons les notions de dualité présentées dans cet article par la catégorie  $\mathrm{Rep}\Gamma_k^d$  des foncteurs polynomiaux stricts de degré  $d$  sur un corps fini  $k$ . On équipe cette catégorie d'un foncteur dualité de Serre  $RD(-)'$  et on montre que le foncteur polynômial strict  $\Gamma^{s(r)}$  est un foncteur à dualité.

Section 7 : le reste de cet article est consacré à la notion de catégorie à dualité. Une catégorie est à dualité si le foncteur constant  $\underline{\mathbb{Z}}$  est à dualité. Nous isolons un critère local suffisant pour affirmer qu'une

catégorie est à dualité. Le théorème 7.12 présente ce critère dans le cas où la catégorie est l'ensemble ordonné des simplexes d'un complexe simplicial. On retrouve ainsi la dualité de Poincaré classique pour les variétés. On montre aussi que l'ensemble ordonné des simplexes d'un immeuble de Tits est à dualité.

**Remerciements.** Je tiens à remercier Gaël Collinet de m'avoir proposer de travailler sur la généralisation de groupe à dualité et pour son suivi constant jusqu'à la rédaction de cet article. Je remercie Antoine Touzé pour les discussions sur la dualité de Ringel.

## 2. RAPPELS

Dans cette section, la notation  $\mathcal{C}$  désigne une catégorie, la notation  $k$  désigne un anneau unitaire commutatif, la notation  $k\text{-mod}$  désigne la catégorie des  $k$ -modules à gauche. La catégorie  $\mathbb{Z}\text{-mod}$  est notée  $\mathbf{Ab}$ .

### 2.1. La catégorie $\mathcal{C}\text{-mod}$ .

#### Définitions 2.1.

- Un  $\mathcal{C}$ -module à gauche (resp. à droite) est un foncteur covariant de  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{C}^{op}$ ) dans la catégorie  $k\text{-mod}$ .
- On note  $I$  la catégorie  $0 \rightarrow 1$ . Soient  $F$  et  $G$  deux  $\mathcal{C}$ -modules à gauche. Une transformation naturelle entre  $F$  et  $G$  est un foncteur

$$T : \mathcal{C} \times I \rightarrow k\text{-mod}$$

tel que  $T(c, 0) = F(c)$  et  $T(c, 1) = G(c)$ .

- On note  $\mathcal{C}\text{-mod}$  (resp.  $\mathcal{C}^{op}\text{-mod}$ ) la catégorie dont les objets sont les  $\mathcal{C}$ -modules à gauche (resp. à droite) et dont les morphismes sont les transformations naturelles.

#### Propriétés 2.2.

- Pour deux objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{C}\text{-mod}$ , l'ensemble  $\text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(F, G)$  des transformations naturelles entre  $F$  et  $G$  est naturellement muni d'une structure de  $k$ -module.
- Les catégories  $\mathcal{C}\text{-mod}$  et  $\mathcal{C}^{op}\text{-mod}$  sont des catégories abéliennes avec assez de projectifs et d'injectifs. Les noyaux et les conoyaux sont calculés au but.
- Pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{C}$ , les foncteurs dits projectifs standards  $P_a^{\mathcal{C}} := k[\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, -)]$  et  $P_a^a := k[\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, a)]$  sont projectifs dans  $\mathcal{C}\text{-mod}$  et  $\mathcal{C}^{op}\text{-mod}$  respectivement.
- Les projectifs standards de  $\mathcal{C}\text{-mod}$  (resp. de  $\mathcal{C}^{op}\text{-mod}$ ) forment un système de générateurs projectifs.
- Le bifoncteur

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(-, -) : (\mathcal{C}\text{-mod})^{op} \times \mathcal{C}\text{-mod} \rightarrow k\text{-mod}$$

commute avec les limites par rapport à chaque variable (les objets limites dans  $(\mathcal{C}\text{-mod})^{op}$  s'identifient aux objets colimites dans  $\mathcal{C}\text{-mod}$ ).

– Le lemme de Yoneda fournit l'isomorphisme naturel suivant

$$(2) \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(P_a^{\mathcal{C}}, F) \cong F(a).$$

**2.2. Produit tensoriel sur  $\mathcal{C}$ .** Soient  $F$  un  $\mathcal{C}$ -module à droite et  $G$  un  $\mathcal{C}$ -module à gauche. Le produit tensoriel  $F \otimes_{\mathcal{C}} G$  de  $F$  et  $G$  au dessus de  $\mathcal{C}$  est le quotient du  $k$ -module

$$\bigoplus_{x \in \text{Ob}\mathcal{C}} F(x) \otimes_k G(x)$$

par le sous-module engendré par les éléments

$$F(f)a \otimes b - a \otimes G(f)b \quad (\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y), \forall a \in F(x), \forall b \in G(y)).$$

**Propriétés 2.3.**

– Le produit tensoriel au dessus de  $\mathcal{C}$  définit un bifoncteur

$$- \otimes_{\mathcal{C}} - : \mathcal{C}^{\text{op}}\text{-mod} \times \mathcal{C}\text{-mod} \rightarrow k\text{-mod}$$

qui commute avec les colimites par rapport à chaque variable. En particulier, le bifoncteur  $- \otimes_{\mathcal{C}} -$  est exact à droite par rapport à chaque variable.

– On a les isomorphismes naturels suivants

$$(3) \quad P_{\mathcal{C}}^x \otimes_{\mathcal{C}} G \cong G(x) \text{ et } F \otimes_{\mathcal{C}} P_x^{\mathcal{C}} \cong F(x).$$

– Pour tout  $k$ -module  $M$ , et tout  $F$  dans  $\mathcal{C}^{\text{op}}\text{-mod}$ , notons  $\underline{\text{Hom}}(F, M)$  le  $\mathcal{C}$ -module donné par  $x \mapsto \text{Hom}_{k\text{-mod}}(F(x), M)$ . L'adjonction

$$\text{Hom}_k(F \otimes_{\mathcal{C}} G, M) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(G, \underline{\text{Hom}}(F, M))$$

caractérise le produit tensoriel à isomorphisme naturel près.

**2.3. Catégorie des complexes.** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne. On note  $\text{Ch}(\mathcal{A})$  la catégorie abélienne dont les objets sont les complexes de cochaînes d'objets de  $\mathcal{A}$  et les morphismes sont les morphismes de complexes. La catégorie  $\text{Ch}(\mathcal{A})$  contient les sous-catégories pleines  $\text{Ch}^b(\mathcal{A})$ ,  $\text{Ch}^-(\mathcal{A})$  et  $\text{Ch}^+(\mathcal{A})$  dont les objets sont, respectivement, les complexes de cochaînes bornés, bornés à gauche et bornés à droite. La notation  $\text{Ch}^*(\mathcal{A})$  désigne une de ces sous-catégories.

Soient  $X = (X^n, d_X^n)$  et  $Y = (Y^n, d_Y^n)$  deux complexes de  $\text{Ch}(\mathcal{A})$ . Le bifoncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, -) : \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow k\text{-mod}$  induit un bifoncteur

$$\text{Hom}(-, -) : \text{Ch}(\mathcal{A})^{\text{op}} \times \text{Ch}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ch}(k\text{-mod})$$

défini par

$$(\text{Hom}(X, Y))^n = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X^i, Y^{i+n})$$

et

$$d^n f = d_Y \circ f + (-1)^{n+1} f \circ d_X, \quad f \in \text{Hom}^n(X, Y).$$

Soit  $X = (X^n, d_X^n)$  un complexe de  $\text{Ch}(\mathcal{C}^{\text{op}}\text{-mod})$  et  $Y = (Y^n, d_Y^n)$  un complexe de  $\text{Ch}(\mathcal{C}\text{-mod})$ . Le bifoncteur  $-\otimes_{\mathcal{C}}- : \mathcal{C}^{\text{op}}\text{-mod} \times \mathcal{C}\text{-mod} \rightarrow k\text{-mod}$  induit un bifoncteur

$$-\otimes- : \text{Ch}(\mathcal{C}^{\text{op}}\text{-mod}) \times \text{Ch}(\mathcal{C}\text{-mod}) \rightarrow \text{Ch}(k\text{-mod})$$

défini par

$$(X \otimes Y)^n = \bigoplus_{p+q=n} X^p \otimes_{\mathcal{C}} Y^q \quad ,$$

les différentielles étant définies, pour  $a \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $x \in X^p(a)$  et  $y \in Y^q(a)$  par la formule

$$d^n x \otimes y = x \otimes d_Y^q y + (-1)^q d_X^p x \otimes y \quad .$$

#### 2.4. Les groupes d'extensions sur $\mathcal{C}$ . Le bifoncteur

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(-, -) : \mathcal{C}\text{-mod}^{\text{op}} \times \mathcal{C}\text{-mod} \rightarrow k\text{-mod}$$

commutant avec les limites par rapport à chaque variable, on définit les groupes d'extensions sur  $\mathcal{C}$ , notés  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^*(-, -)$ , comme étant les dérivés à droite du bifoncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(-, -)$ . Si  $F$  et  $G$  sont deux  $\mathcal{C}$ -module à gauche, on obtient  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^*(F, G)$  soit en choisissant une résolution projective  $\mathcal{P}_*$  de  $F$  et en calculant la cohomologie du complexe de cochaîne  $\text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(\mathcal{P}_*, G)$ , soit en choisissant une résolution injective  $\mathcal{I}^*$  de  $G$  et en calculant la cohomologie du complexe de cochaîne  $\text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(F, \mathcal{I}^*)$ .

#### 2.5. Les groupes de torsion sur $\mathcal{C}$ . Le bifoncteur

$$-\otimes_{\mathcal{C}}- : \mathcal{C}^{\text{op}}\text{-mod} \times \mathcal{C}\text{-mod} \rightarrow k\text{-mod}$$

étant exact à droite par rapport à chaque variable, on définit les groupes de torsion sur  $\mathcal{C}$ , notés  $\text{Tor}_*^{\mathcal{C}}(-, -)$ , comme étant les dérivés à gauche du produit tensoriel au dessus de  $\mathcal{C}$ . Pour un  $\mathcal{C}$ -module à droite  $F$  et un  $\mathcal{C}$ -module à gauche  $G$ , on obtient  $\text{Tor}_*^{\mathcal{C}}(F, G)$  soit en choisissant une résolution projective  $\mathcal{P}_*$  de  $F$  et en calculant l'homologie du complexe de chaînes  $\mathcal{P}_* \otimes_{\mathcal{C}} G$  soit en choisissant une résolution projective  $Q_*$  de  $G$  et en calculant l'homologie du complexe de chaînes  $F \otimes_{\mathcal{C}} Q_*$ .

### 3. BIFONCTEUR DE YONEDA ET SOUS-CATÉGORIE ÉPIRÉFLEXIVE

On garde les notations introduites dans la section précédente, et l'on y ajoute les suivantes.

**Notations 3.1.** Soit  $B(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow k\text{-mod}$  un bifoncteur. Soient  $F$  et  $G$  deux  $\mathcal{C}$ -modules à gauche et à droite, respectivement. On note

- $B_a$  le  $\mathcal{C}$ -module à gauche  $B(a, -)$ .
- $B^a$  le  $\mathcal{C}$ -module à droite  $B(-, a)$ .
- $\mathcal{H}om(F, B)$  le  $\mathcal{C}$ -module (à droite)  $a \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(F, B_a)$ .
- $\mathcal{H}om(B, F)$  le  $\mathcal{C}$ -module (à gauche)  $a \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(B_a, F)$ .
- $B \otimes_{\mathcal{C}} F$  le  $\mathcal{C}$ -module (à gauche)  $a \mapsto B^a \otimes_{\mathcal{C}} F$ .
- $G \otimes_{\mathcal{C}} B$  le  $\mathcal{C}$ -module (à droite)  $a \mapsto G \otimes_{\mathcal{C}} B_a$ .

On note  $\underline{\underline{\mathcal{C}}}$  le bifoncteur

$$(x, y) \mapsto k[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)].$$

On a les égalités  $\underline{\underline{\mathcal{C}}}_a = P_a^{\mathcal{C}}$  et  $\underline{\underline{\mathcal{C}}}^a = P_{\mathcal{C}}^a$ .

**Définition 3.2.** Un bifoncteur de Yoneda pour  $\mathcal{C}$  est un bifoncteur  $T : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow k\text{-mod}$  muni d'une surjection

$$\mu : \underline{\underline{\mathcal{C}}} \longrightarrow T$$

telle que le morphisme canonique entre éléments de  $(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C})\text{-mod}$

$$\varphi : [(a, b) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(T_b, T_a)] \rightarrow [(a, b) \mapsto T(a, b)]$$

défini par  $\varphi_{(a,b)}(F) = F_b(\mu_{b,b}(\mathbf{1}_b))$  soit un isomorphisme.

**Exemples 3.3.**

(1) Le bifoncteur

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathcal{C}}} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} &\rightarrow k\text{-mod} \\ (x, y) &\mapsto k[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)] \end{aligned}$$

est un bifoncteur de Yoneda.

(2) Si la catégorie  $\mathcal{C}$  est  $k$ -linéaire. On note  $L_{\mathcal{C}}$  le bifoncteur

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} &\rightarrow k\text{-mod} \\ (x, y) &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \end{aligned}$$

Le bifoncteur  $L_{\mathcal{C}}$  muni de la surjection

$$\begin{aligned} \mu_{x,y} : k[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)] &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \\ [f] &\mapsto f \end{aligned}$$

est un bifoncteur de Yoneda.

**Proposition 3.4.** *Soit  $T$  un bifoncteur de Yoneda.*

(1) *Le bifoncteur  $T^{op} : (a, b) \mapsto T(b, a)$  est un bifoncteur de Yoneda pour  $\mathcal{C}^{op}$ .*

(2) *Le morphisme canonique entre éléments de  $(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C})\text{-mod}$*

$$\psi : [(a, b) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(T_b, T_a)] \rightarrow [(a, b) \mapsto T^b \otimes_{\mathcal{C}} T_a]$$

*défini par  $\psi_{(a,b)}(F) = \mu_{b,b}(\mathbf{1}_b) \otimes F_b(\mu_{b,b}(\mathbf{1}_b))$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.*

(1) Le morphisme canonique

$$\varphi^{op} : [(a, b) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(T^b, T^a)] \rightarrow [(a, b) \mapsto T(b, a)]$$

défini par :  $\varphi_{(a,b)}^{op}(F) = F_b(\mu_{b,b}(\mathbf{1}_b))$  est injectif.

Soit  $\lambda \in T(b, a)$ . L'hypothèse sur  $T$  implique qu'il existe une unique transformation naturelle  $F : T_a \rightarrow T_b$  telle que



$F_b(\mu_{b,b}(\mathbf{1}_b)) = \lambda$ . On définit une transformation naturelle  $\tilde{F} : T^b \rightarrow T^a$  de la façon suivante : pour  $x$  dans  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_x : T^b(x) &\rightarrow T^a(x) \\ \lambda &\mapsto \varphi_{(x,a)} \circ F^* \circ \varphi_{(x,b)}^{-1}(\lambda). \end{aligned}$$

L'égalité  $\varphi^{op}(\tilde{F}) = \lambda$  implique la surjectivité de  $\varphi^{op}$ .

(2) Le morphisme  $\psi$  de la proposition est la composition

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(T_b, T_a) \rightarrow T(a, b) \rightarrow P_{\mathcal{C}}^b \otimes_{\mathcal{C}} T_a \xrightarrow{\mu} T^b \otimes_{\mathcal{C}} T_a.$$

Les deux premiers sont des isomorphismes. Le troisième est surjectif car le produit tensoriel est exact à droite. Une transformation naturelle  $F : T(b, -) \rightarrow T(a, -)$  est uniquement déterminée par  $F_b(\mu_{b,b}(\mathbf{1}_b))$ , donc  $\psi$  est aussi injectif.

□

**Notations 3.5.** On note  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$  la plus petite sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}\text{-mod}$  contenant les  $T_a$  et stable par limites et colimites. Cette notation sera justifiée par le corollaire 3.8.

**Exemple 3.6.**

- (1)  $\underline{\underline{\mathcal{C}}}\text{-mod} = \mathcal{C}\text{-mod}$ .
- (2)  $\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{op}\text{-mod} = \mathcal{C}^{op}\text{-mod}$ .
- (3) Si  $\mathcal{C}$  est  $k$ -linéaire alors  $\mathcal{C}_{L\mathcal{C}}\text{-mod}$  est la sous-catégorie pleine des foncteurs  $k$ -linéaires de  $\mathcal{C}\text{-mod}$ .

**Proposition 3.7.** Soient  $F$  et  $G$  deux objets de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$  et  $\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod}$  respectivement.

- (1)  $\mathcal{H}om(T, F) \cong F$
- (2)  $T \otimes_{\mathcal{C}} F \cong F$
- (3)  $G \otimes_{\mathcal{C}} T \cong G$

*Démonstration.*

- (1) Écrivons  $F = \text{colim} T_{a_i}$ . Soient

$$\text{Hom}(P_a^{\mathcal{C}}, T_{a_i}) \xrightarrow{d_i} \text{colim} \text{Hom}(P_a^{\mathcal{C}}, T_{a_i})$$

$$\text{Hom}(T_a, T_{a_i}) \xrightarrow{c_i} \text{colim} \text{Hom}(T_a, T_{a_i})$$

$$T_{a_i} \xrightarrow{t_{a_i}} \text{colim} T_{a_i}$$

des cocônes universels. On obtient le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \text{Hom}(P_a^{\mathcal{C}}, \text{colim} T_{a_i}) \\
 & & & \nearrow^{t_{a_i^*}} & \\
 \text{Hom}(P_a^{\mathcal{C}}, T_{a_i}) & \xrightarrow{d_i} & \text{colim Hom}(P_a^{\mathcal{C}}, T_{a_i}) & & \\
 \uparrow \mu^* & & \uparrow \alpha & & \uparrow \mu^* \\
 \text{Hom}(T_a, T_{a_i}) & \xrightarrow{c_i} & \text{colim Hom}(T_a, T_{a_i}) & \searrow^{\beta} & \\
 & & \searrow^{t_{a_i^*}} & & \text{Hom}(T_a, \text{colim} T_{a_i})
 \end{array}$$

dans lequel  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont donnés par la propriété universelle. Montrons que  $\beta$  est un isomorphisme. Le morphisme  $\mu^* : \text{Hom}(T_a, T_{a_i}) \rightarrow \text{Hom}(P_a^{\mathcal{C}}, T_{a_i})$  est un isomorphisme. Il suit que  $\alpha$  est aussi un isomorphisme. Le projectif standard  $P_a^{\mathcal{C}}$  commute avec les colimites, (*i.e.*  $\gamma$  est un isomorphisme) donc le cocône  $\text{Hom}(P_a^{\mathcal{C}}, T_{a_i}) \xrightarrow{t_{a_i^*}} \text{Hom}(P_a^{\mathcal{C}}, \text{colim} T_{a_i})$  est aussi universel. Dans le diagramme, le carré, les deux triangles et le grand trapèze commutent. On obtient les égalités

$$\mu^* \beta c_i = \mu^* t_{a_i^*} = t_{a_i^*} \mu^* = \gamma d_i \mu^* = \gamma \alpha c_i \quad .$$

Le cocône  $\{c_i\}$  étant universel, et  $\gamma \alpha$  étant un isomorphisme, il s'ensuit que  $\mu^* \beta$  est un isomorphisme, et donc que  $\mu^*$  est surjectif (c'est donc un isomorphisme). On en déduit que le cocône du bas  $t_{a_i^*}$  est universel et que  $\beta$  est un isomorphisme. Finalement on obtient des isomorphismes

$$\text{Hom}(T_a, \text{colim} T_{a_i}) \cong \text{colim Hom}(T_a, T_{a_i}) \cong F(a).$$

- (2) Le produit tensoriel au dessus de  $\mathcal{C}$  commute avec les colimites. Il suffit donc de montrer la propriété 2 pour  $T_a$ . C'est une conséquence de la proposition 3.4.

□

**Corollaire 3.8.** *Les  $\mathcal{C}$ -modules  $T_a$  forment un système de générateurs projectifs de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ . On les appelle dans la suite projectifs  $T$ -standards.*

*Démonstration.* D'après la première propriété de Yoneda, le foncteur

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_T\text{-mod}}(T_a, -)$$

de  $(\mathcal{C}_T\text{-mod})\text{-mod}$  est exact. Il s'ensuit que  $T_a$  est projectif. Soit  $F$  un objet de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ . Soit  $\lambda \in F(a)$ . Il existe une transformation naturelle unique  $\rho_\lambda : T_a \rightarrow F$  telle que  $(\rho_\lambda)_a(\mu(\mathbf{1}_a)) = \lambda$ . La transformation

naturelle

$$\bigoplus_{a, \lambda \in F(a)} \rho_\lambda : \bigoplus_{a, \lambda \in F(a)} T_a \rightarrow F$$

est un épimorphisme. Il s'ensuit que les  $T_a$  forment un système de générateurs de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ .  $\square$

**Définition 3.9.** Soit  $B$  une catégorie et  $A$  une sous-catégorie pleine. On dit que  $A$  est épiréflexive si l'inclusion de  $i : A \rightarrow B$  admet un adjoint à gauche  $t : B \rightarrow A$  tel que l'unité de l'adjonction est un épimorphisme.

**Proposition 3.10.** *Il y a une bijection (à isomorphisme près) entre les sous-catégories épiréflexives de  $\mathcal{C}\text{-mod}$  et les bifoncteurs de Yoneda sur  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* Soit  $T$  un bifoncteur de Yoneda. Montrons que la sous-catégorie pleine  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$  de  $\mathcal{C}\text{-mod}$  est épiréflexive. Le foncteur  $t : \mathcal{C}\text{-mod} \rightarrow \mathcal{C}_T\text{-mod}$ , associant à un  $\mathcal{C}$ -module  $F$  pour lequel on a une égalité  $F = \text{colim} P_{a_i}^{\mathcal{C}}$  le  $\mathcal{C}_T$ -module  $t(F) = \text{colim} T_{a_i}$ , est un adjoint à gauche de l'inclusion  $i : \mathcal{C}_T\text{-mod} \hookrightarrow \mathcal{C}\text{-mod}$ . En effet, pour tout objet  $G$  de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ , on a un isomorphisme naturel

$$\text{Hom}(t(F), G) \cong \text{Hom}(F, G)$$

obtenu de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\text{colim} T_{a_i}, G) &\cong \lim \text{Hom}(T_{a_i}, G) \\ &\cong \lim \text{Hom}(P_{a_i}^{\mathcal{C}}, G) \cong \text{Hom}(\text{colim} P_{a_i}^{\mathcal{C}}, G). \end{aligned}$$

Inversement, si  $\mathcal{H}$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}\text{-mod}$  pour laquelle le foncteur inclusion  $i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}\text{-mod}$  admet un adjoint à gauche  $t$ , le bifoncteur

$$T : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow k\text{-mod}$$

défini par

$$T(a, b) = t(P_a^{\mathcal{C}})(b)$$

est un bifoncteur de Yoneda, comme le montrent les égalités

$$\begin{aligned} \text{Hom}(T_a, T_b) &= \text{Hom}(tP_a^{\mathcal{C}}, tP_b^{\mathcal{C}}) \\ &= \text{Hom}(P_a^{\mathcal{C}}, i(tP_b^{\mathcal{C}})) = t(P_b^{\mathcal{C}})(a) = T(b, a). \end{aligned}$$

$\square$

#### 4. FONCTEUR DE DUALITÉ

Dans cette section, on fixe un bifoncteur de Yoneda  $T$  sur  $\mathcal{C}$ . On rappelle que  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$  est la plus petite sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}\text{-mod}$  contenant les  $T_a$  et stable par limites et colimites. C'est une catégorie abélienne avec assez de projectifs. Les projectifs  $T_a$  dits  $T$ -standards forment un système de générateurs de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ .

**4.1. Définitions.** Soit  $R$  un anneau unitaire,  $M$  un  $R$ -module à gauche. Le dual de  $M$  est le  $R$ -module (à droite)  $M' := \text{Hom}_{R\text{-mod}}(M, R)$ . Le foncteur de dualité  $D$  défini ci-dessous est une généralisation de l'opérateur de dualité  $M \mapsto M'$  où  $R$  est remplacé par une petite catégorie  $\mathcal{C}$ .

On note

$$D : (\mathcal{C}\text{-mod})^{op} \rightarrow \mathcal{C}^{op}\text{-mod}$$

le foncteur qui, à un  $\mathcal{C}$ -module à gauche  $F$ , associe le  $\mathcal{C}$ -module à droite

$$DF := \mathcal{H}om(F, T).$$

On réfère aux notations 3.1 pour la définition de  $\mathcal{H}om(F, T)$  *i.e.* pour  $x$  un objet de  $\mathcal{C}$ , l'égalité

$$DF(x) = \text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(F, T_x)$$

où  $T_x$  est le foncteur  $T(x, -)$  définit  $\mathcal{H}om(F, T)$  sur les objets.

Le foncteur de dualité  $D$  s'étend à la catégorie  $\text{Ch}(\mathcal{C}\text{-mod})^{op}$  de la façon suivante. À un complexe  $X = (X^n, d_X^n)$  de  $\text{Ch}(\mathcal{C}\text{-mod})$ , le foncteur

$$D : \text{Ch}(\mathcal{C}\text{-mod})^{op} \rightarrow \text{Ch}(\mathcal{C}^{op}\text{-mod})$$

associe le complexe  $D(X)$  défini par

$$D(X)^n = D(X^{-n}) \quad \text{et} \quad d_{D(X)}^n = (-1)^{n+1} D(d_X^{-(n+1)}).$$

#### 4.2. Comportement de $D$ sur les projectifs de $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ .

**Exemple 4.1.** Pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{C}$ , on a un isomorphisme naturel

$$D(T_a) \cong T^a.$$

En effet, on a des isomorphismes naturels, le dernier d'entre eux, étant conséquence des propriétés de Yoneda,

$$D(T_a)(x) = \text{Hom}_{\mathcal{C}\text{-mod}}(T_a, T_x) \cong T_x(a) = T^a(x)$$

pour tout  $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ . L'égalité  $D(T_a) = T^a$  s'ensuit.

L'exemple précédent et le fait que  $D$  commute aux limites impliquent que le foncteur  $D$  se restreint à un foncteur

$$D : (\mathcal{C}_T\text{-mod})^{op} \rightarrow \mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod}.$$

**Définition 4.2.** Un objet de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$  est de type fini s'il est quotient d'une somme finie de projectifs  $T$ -standards.

**Lemme 4.3.** Soit  $P$  un projectif de type fini de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ . L'objet  $D(P)$  de  $\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod}$  est projectif de type fini.

*Démonstration.* Si  $P$  est un projectif de type fini alors  $P$  est un facteur direct dans une somme finie de projectifs  $T$ -standards  $F$ , *i.e.* il existe un  $\mathcal{C}$ -module  $Q$  tel que  $P \oplus Q = F$ . Par additivité du foncteur  $D$ , il suffit de montrer le lemme pour  $P = T_a$ , cas correspondant à l'exemple 4.1.  $\square$

**Notations 4.4.** On note  $Proj(\mathcal{C}_T\text{-mod})$  la sous-catégorie pleine des projectifs de type fini de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ .

**Proposition 4.5.** *La restriction*

$$D : Proj(\mathcal{C}_T\text{-mod})^{op} \rightarrow Proj(\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod})$$

*est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* Soient  $P$  et  $Q$  deux objets projectifs de type fini de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$  alors l'application

$$(\star) \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}_T\text{-mod}}(P, Q) \xrightarrow{D} \text{Hom}_{\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod}}(D(Q), D(P))$$

est un isomorphisme naturel en ses deux variables. En effet, par additivité de  $D$ , il suffit de vérifier  $(\star)$  pour  $P = T_a$  et  $Q = T_b$ . Dans ce cas, l'affirmation est conséquence des isomorphismes naturels

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_T\text{-mod}}(T_a, T_b) \cong T(b, a) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod}}(T^b, T^a).$$

Le foncteur  $D$  possède un inverse, que l'on note  $D_{T^{op}}$ , défini, pour un objet  $G$  de  $\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod}$ , par  $D_{T^{op}}G = \text{Hom}(G, T^{op})$ . En effet la composition

$$P(x) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}_T\text{-mod}}(T_x, P) \xrightarrow{D} \text{Hom}_{\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod}}(DP, T^x) \cong D_{T^{op}} \circ DP(x)$$

définit un isomorphisme  $I \cong D_{T^{op}} \circ D$ .  $\square$

On définit une application naturelle

$$\phi_G : D(F) \otimes_{\mathcal{C}} G \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_T\text{-mod}}(F, G)$$

de la façon suivante : soit  $x \in \text{Ob}\mathcal{C}$ , alors  $\phi$  est la composition

$$\begin{aligned} D(F)(x) \otimes G(x) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}_T\text{-mod}}(F, T_x) \otimes \text{Hom}_{\mathcal{C}_T\text{-mod}}(T_x, G) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}_T\text{-mod}}(F, G) . \end{aligned}$$

Soient  $R$  un anneau unitaire,  $M$  un  $R$ -module à droite et  $N$  un  $R$ -module à gauche. Si  $M$  est un projectif de type fini, alors on a l'isomorphisme naturel

$$(4) \quad \text{Hom}_{R\text{-mod}}(M, N) \cong M' \otimes_R N.$$

La proposition suivante généralise ce dernier isomorphisme en remplaçant  $R$  par une petite catégorie  $\mathcal{C}$ .

**Proposition 4.6.** *Soit  $P$  un objet projectif de type fini de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ , alors la transformation naturelle entre foncteurs de  $(\mathcal{C}_T\text{-mod})\text{-mod}$*

$$(5) \quad D(P) \otimes_{\mathcal{C}} - \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}_T\text{-mod}}(P, -).$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Pour  $P = T_a$ , c'est une conséquence des propriétés de Yoneda. En effet on a les isomorphismes suivants

$$D(T_a) \cong T^a \text{ et } \text{Hom}_{\mathcal{C}_T\text{-mod}}(T_a, G) \cong G(a) \cong T^a \otimes_{\mathcal{C}} G.$$

Si  $P$  est facteur direct dans une somme finie de projectifs  $T$ -standard, la proposition se déduit de l'additivité de  $D$ .  $\square$

### 4.3. Comportement de $D$ sur les complexes de projectifs et foncteur dérivé de $D$ .

**Proposition 4.7.** *Soient  $X = (X^n, d_X^n)$  un complexe de projectifs de type fini de  $\text{Ch}^b(\mathcal{C}_T\text{-mod})$  et  $Y = (Y^n, d_Y^n)$  un complexe de  $\text{Ch}(\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod})$ , alors on a un isomorphisme naturel*

$$\text{Hom}(X, Y) \cong D(X) \otimes Y.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence de l'isomorphisme de la proposition 4.6 et de la compatibilité des différentielles avec cet isomorphisme.  $\square$

On rappelle que la catégorie homotopique  $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$  est la catégorie obtenue à partir de  $\text{Ch}^*(\mathcal{A})$  en identifiant les morphismes homotopiquement équivalents, c'est-à-dire en posant

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Y) := H^0(\text{Hom}(X, Y)),$$

et que la catégorie dérivée  $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$  est la catégorie triangulée obtenue à partir de la catégorie homotopique  $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$  en inversant les quasi-isomorphismes.

Les bifoncteurs  $\text{Hom}(-, -)$  et  $- \otimes -$  induisent les bifoncteurs dérivés (voir [Borel, page 91 et 98])

$$R\text{Hom} : \mathcal{D}^-(\mathcal{C}\text{-mod})^{op} \times \mathcal{D}(\mathcal{C}\text{-mod}) \rightarrow \mathcal{D}(k\text{-mod}),$$

et

$$- \overset{L}{\otimes} - : \mathcal{D}^-(\mathcal{C}^{op}\text{-mod}) \times \mathcal{D}^-(\mathcal{C}\text{-mod}) \rightarrow \mathcal{D}(k\text{-mod}).$$

Le foncteur  $D$  admet un foncteur dérivé

$$RD : \mathcal{D}^-(\mathcal{C}_T\text{-mod})^{op} \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod}).$$

Pour calculer le dual dérivé d'un complexe  $X$  de  $\mathcal{D}^-(\mathcal{C}_T\text{-mod})$ , on choisit une résolution projective de  $X$  et l'on applique le foncteur  $D$ . Soit  $F$  un objet de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$  et  $x$  un objet de  $\mathcal{C}$ . On a l'égalité :

$$H^i(RD(F))(x) = \text{Ext}_{\mathcal{C}_T}^i(F, T_x).$$

Dans la suite, on pose  $D^i(X) = H^i(RD(X))$ .

**Définition 4.8.** On dit qu'un complexe  $X$  de  $\mathcal{D}(\mathcal{C}_T\text{-mod})$  est parfait s'il est quasi-isomorphe à un complexe borné de projectifs de type fini.

**Proposition 4.9.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux complexes de  $\mathcal{D}^-(\mathcal{C}_T\text{-mod})$ . Si  $X$  est parfait, alors on a un isomorphisme naturel*

$$R\text{Hom}(X, Y) \cong RD(X) \overset{L}{\otimes} Y.$$

*Démonstration.* Soit  $P$  un complexe de projectifs de type fini de  $\text{Ch}^b(\mathcal{C}_T\text{-mod})$  quasi-isomorphe à  $X$ , alors on a des isomorphismes

$$R\text{Hom}(X, Y) = \text{Hom}(P, Y) \cong D(P) \otimes Y = RD(X) \overset{L}{\otimes} Y.$$

□

**4.4. Illustration : dualité de Serre.** Soit  $k$  un corps. Pour un  $k$ -espace vectoriel  $V$  on pose  $V' := \text{Hom}_k(V, k)$ .

**Définition 4.10.** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie  $k$ -linéaire. Une dualité de Serre pour  $\mathcal{A}$  est un endofoncteur  $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  muni d'un isomorphisme naturel

$$\Phi_{a,b} : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(b, Sa) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, b)'$$

pour tous objets  $a, b$  de  $\mathcal{A}$ . [Comparer à [RV02]]

**Remarque 4.11.**

- (1) Le foncteur  $S$  est une dualité de Serre pour  $\mathcal{A}$  si, et seulement si, l'objet  $Sx$  est un objet représentant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(x, -)^*$  de  $\mathcal{A}\text{-mod}$  pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{A}$ .
- (2) Le plongement de Yoneda

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A}^{op}\text{-mod} \\ c &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, c) \end{aligned}$$

est pleinement fidèle. D'où l'unicité d'une dualité de Serre à isomorphisme près.

- (3) Le lemme de Yoneda donne un isomorphisme naturel

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}^{op}\text{-mod}}(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Sa), \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, -)') \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, Sa)'$$

On appelle classe fondamentale l'élément  $\Phi_a \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, Sa)'$  correspondant à l'isomorphisme  $\Phi_{a,b}$ . L'isomorphisme  $\Phi_{a,b}$  est l'adjoint à gauche (au sens de la théorie des formes bilinéaires) de la forme bilinéaire

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, b) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(b, Sa) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(a, Sa) \xrightarrow{\Phi_a} k.$$

Soit  $T$  un bifoncteur de Yoneda sur  $\mathcal{C}$ . On suppose que la catégorie  $\mathcal{C}$  est  $k$ -linéaire.

**Notations 4.12.**

- On note  $\mathcal{D}_{\text{parf}}(\mathcal{C}_T\text{-mod})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{D}(\mathcal{C}_T\text{-mod})$  dont les objets sont les complexes parfaits.
- On note  $F'$  la postcomposition de  $F$  par l'opération de dualité  $V \mapsto V' := \text{Hom}_k(V, k)$ .

**Proposition 4.13.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux complexes de  $\mathcal{D}_{\text{parf}}(\mathcal{C}_T\text{-mod})$ . On a un isomorphisme naturel*

$$R\text{Hom}(X, Y)' \cong R\text{Hom}(Y, RD(X)').$$

*En particulier, le foncteur  $RD(-)'$  est une dualité de Serre pour  $\mathcal{D}_{\text{parf}}(\mathcal{C}_T\text{-mod})$ .*

*Démonstration.* Soit  $P$  un complexe de projectifs de type fini de  $\text{Ch}^b(\mathcal{C}_T\text{-mod})$  quasi-isomorphe à  $X$ , alors on a des isomorphismes

$$R\text{Hom}(X, Y)' \cong (D(P) \otimes Y)' \cong \text{Hom}(Y, D(P)').$$

Le deuxième isomorphisme est une conséquence de l'adjonction caractérisant le produit tensoriel. Le foncteur  $F \mapsto F'$  est exact, donc  $D(P)'$  est une résolution injective bornée de  $D(X)'$ . On en déduit un isomorphisme

$$R\text{Hom}(X, Y)' \cong R\text{Hom}(Y, RD(X)').$$

□

## 5. FONCTEURS À DUALITÉ

Soit  $T$  un bifoncteur de Yoneda pour  $\mathcal{C}$ . On introduit la notion de foncteur à dualité dans  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ . Cette notion se mesure par l'action du foncteur de dualité

$$D : (\mathcal{C}_T\text{-mod})^{op} \rightarrow \mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod}$$

sur certains objets de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ .

### 5.1. Définitions et premières propriétés.

**Définition 5.1.** On dit qu'un  $\mathcal{C}_T$ -module est de type  $FP_\infty$  (resp. de type  $FP$ ) s'il admet une résolution (resp. une résolution finie) par des projectifs de type fini de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ .

**Définition 5.2.** Soit  $F$  un  $\mathcal{C}_T$ -module à gauche. On dit qu'il est de dimension cohomologique  $n$  si pour tout  $\mathcal{C}_T$ -module  $G$ , et pour tout  $m > n$ , on a l'égalité  $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^m(F, G) = 0$ , et s'il existe un  $\mathcal{C}$ -module  $G$  tel que l'on ait  $\text{Ext}_{\mathcal{C}_T}^n(F, G) \neq 0$ .

**Notations 5.3.** Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$  et  $n$  un entier. On note  $X[n]$  le complexe de  $\mathcal{D}(\mathcal{C}_T\text{-mod})$  défini par  $X[n]^i = 0$  si  $i \neq n$  et  $X[n]^n = X$ .

**Définition 5.4.** On appelle foncteur d'Eilenberg-Mac Lane de degré  $n$  un objet  $F$  de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$  tel que l'on ait un isomorphisme

$$RD(F) \cong D^n(F)[n]$$

dans  $\mathcal{D}^+(\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod})$  (On rappelle que  $D^n(F) = H^n(RDF)$ ).

**Théorème 5.5.** *Soit  $F$  un  $\mathcal{C}_T$ -module de type  $FP$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes*



(1) *Il existe un entier  $n$  tel que  $F$  est d'Eilenberg-Mac Lane de degré  $n$ .*

(2) *Il existe un entier  $n$  tel que*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_T}^i(F, T_x) = 0$$

*pour tout  $i \neq n$  et  $x \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ .*

(3) *Il existe un entier  $n$  et un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_T}^i(F, -) \cong \mathrm{Tor}_{n-i}^{\mathcal{C}_T}(D^n(F), -).$$

*L'entier  $n$  est la dimension cohomologique de  $F$  dans la catégorie  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ .*

*Démonstration.* L'équivalence  $1 \Leftrightarrow 2$  est claire. Montrons que  $3 \Rightarrow 2$ . Soit  $x$  un objet de  $\mathcal{C}$ . Spécialisant l'isomorphisme de 3 à  $T_x$ , on obtient

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_T}^i(F, T_x) \cong \mathrm{Tor}_{n-i}^{\mathcal{C}_T}(D^n(F), T_x).$$

Comme  $T_x$  est projectif dans  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$ , on a pour  $i \neq n$  une égalité  $\mathrm{Tor}_{n-i}^{\mathcal{C}_T}(D^n(F), T_x) = 0$ . Montrons  $1 \Rightarrow 3$ . Le  $\mathcal{C}_T$ -module  $F$  est de type  $FP$  donc  $F$  est parfait, de plus  $RD(F) \cong D^n(F)[n]$ . La proposition 4.9 donne

$$R\mathrm{Hom}(F, -) \cong D^n(F)[n] \overset{L}{\otimes} -.$$

En prenant la cohomologie, on obtient un isomorphisme  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_T}^i(F, -) \cong \mathrm{Tor}_{n-i}^{\mathcal{C}_T}(D^n(F), -)$ .  $\square$

**Définition 5.6.** On appelle foncteur à dualité un foncteur qui satisfait une des conditions du théorème.

**Remarque 5.7.** Si  $k$  est un corps, la troisième condition du théorème est équivalente à la suivante.

(3') *Il existe un entier  $n$  et un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_T}^i(F, -)' \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}_T}^{n-i}(-, D^n(F)').$$

**Proposition 5.8.** *Soit  $F$  un foncteur à dualité de  $\mathcal{C}_T\text{-mod}$  de dimension cohomologique  $n$ . Le foncteur  $D^n(F)$  est un foncteur à dualité de  $\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod}$  et  $F$  est son module dualisant.*

*Démonstration.* L'équivalence

$$D_T : \mathrm{Proj}(\mathcal{C}_T\text{-mod})^{op} \rightarrow \mathrm{Proj}(\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod})$$

de la proposition 4.5 avec inverse le foncteur

$$D_{T^{op}} : \mathrm{Proj}(\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod}) \rightarrow \mathrm{Proj}(\mathcal{C}_T\text{-mod})^{op}$$

passé au quotient et on obtient alors l'équivalence

$$RD_T : \mathcal{K}^b(\mathrm{Proj}(\mathcal{C}_T\text{-mod}))^{op} \rightarrow \mathcal{K}^b(\mathrm{Proj}(\mathcal{C}_{T^{op}}\text{-mod}))$$

au niveau des catégories homotopiques. La composition à gauche et à droite respectivement par les équivalences

$$\mathcal{D}_{\text{parf}}(\mathcal{C}_T\text{-mod}) \cong \mathcal{K}^b(\text{Proj}(\mathcal{C}_T\text{-mod}))$$

$$\mathcal{K}^b(\text{Proj}(\mathcal{C}_{T^{\text{op}}}\text{-mod})) \cong \mathcal{D}_{\text{parf}}(\mathcal{C}_{T^{\text{op}}}\text{-mod})$$

fournit l'équivalence de catégories

$$RD_T : \mathcal{D}_{\text{parf}}(\mathcal{C}_T\text{-mod}) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{parf}}(\mathcal{C}_{T^{\text{op}}}\text{-mod})$$

avec inverse le foncteur  $RD_{T^{\text{op}}}$ . L'isomorphisme  $RD_{T^{\text{op}}}(RD_T F) \cong F$  implique  $RD_{T^{\text{op}}}(D^n F) \cong F[n]$ . Il s'ensuit que  $D^n(F)$  est un foncteur à dualité de  $\mathcal{C}_{T^{\text{op}}}\text{-mod}$  et que  $F$  est son module dualisant.  $\square$

## 6. ILLUSTRATION : FONCTEURS POLYNOMIAUX STRICTS

Nous illustrons ces notions en homologie des foncteurs polynomiaux stricts au sens de Friedlander et Suslin [FS97]. L'étude des groupes d'extensions s'est bien développée ses dernières années voir par exemple [Touzé2]. Pour un corps fini  $k$ , soit  $\text{Rep } \Gamma_k^d$  la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts de degré  $d$ . La catégorie  $\text{Rep } \Gamma_k^d$  est équipée d'une dualité de Ringel  $\theta$  introduite par M. Chałupnik [Chałupnik] et A. Touzé [Touzé1] : le foncteur dualité de Ringel  $\theta := R\mathcal{H}om(\Lambda^d, -) : \mathcal{D}^b(\text{Rep } \Gamma_k^d) \rightarrow \mathcal{D}^b(\text{Rep } \Gamma_k^d)$  est une équivalence de catégorie avec inverse le foncteur  $\theta^{-1} : X \mapsto \theta(X^\#)^\#$  (voir [Chałupnik, corollaire 2.4], [Touzé1, théorème 3.8], [Krause, théorème 4.9]).

H. Krause dans [Krause] montre que l'équivalence  $\theta^{-2}$  est un foncteur de Serre pour  $\mathcal{D}_{\text{parf}}(\text{Rep } \Gamma_k^d)$ .

Ce phénomène de dualité de Serre pour la catégorie  $\text{Rep } \Gamma_k^d$  rentre dans le cadre général de la dualité présentée dans cet article. D'une part, notre théorie de dualité permet d'équiper directement la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts  $\text{Rep } \Gamma_k^d$  d'un foncteur de dualité  $D$  qui fournit à son tour un foncteur dualité de Serre  $RD(-)'$  de  $\mathcal{D}_{\text{parf}}(\text{Rep } \Gamma_k^d)$ . D'autre part, on déduit de l'unicité d'un foncteur de Serre que  $RD(-)'$  et le foncteur de Serre décrit par Krause coïncident *i.e.* l'équivalence de catégorie  $\theta^{-2}$  est isomorphe à  $RD(-)'$ .

**6.1. Dualité de Serre pour  $\text{Rep } \Gamma_k^d$ .** On utilise les notations de [Krause]. On réfère à [Pirashvili] pour plus de détails sur les foncteurs polynomiaux stricts.

Soit  $\mathbf{P}_k$  la catégorie des  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $\Gamma^d : \mathbf{P}_k \rightarrow \mathbf{P}_k$  le foncteur puissance divisée défini par

$$\Gamma^d(V) = \left( V^{\otimes d} \right)^{\mathfrak{S}_d}$$

[le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_d$  agissant par permutation des facteurs du produit tensoriel]. On note  $\Gamma^d \mathbf{P}_k$  la catégorie dont les objets sont les  $k$ -espaces vectoriels de dimension finie, dont les morphismes sont définis

par

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{P}_k}(V, W) = \Gamma^d \mathrm{Hom}_k(V, W) \quad (\forall V, W \in \mathcal{P}_k)$$

et dont la composition des morphismes est définie *via* l'identification

$$\Gamma^d \mathrm{Hom}_k(V, W) = \mathrm{Hom}_k \left( V^{\otimes d}, W^{\otimes d} \right)^{\mathfrak{S}_d}.$$

La catégorie des foncteurs polynomiaux stricts de degré  $d$  est la catégorie des foncteurs  $k$ -linéaires de  $\Gamma^d \mathcal{P}_k$  dans la catégorie des  $k$ -modules. Notons  $\mathrm{Rep} \Gamma_k^d$  cette catégorie et  $\mathrm{Rep}^{op} \Gamma_k^d$  la catégorie des foncteurs contravariant  $k$ -linéaires de  $\Gamma^d \mathcal{P}_k$  dans la catégorie des  $k$ -modules.

Par exemple, les foncteurs classiques de puissance tensorielle  $\otimes^d$ , de puissance symétrique  $S^d$ , de puissance extérieure  $\Lambda^d$  et de puissance divisée  $\Gamma^d$  sont des foncteurs polynomiaux stricts de degré  $d$ .

La catégorie  $\mathrm{Rep} \Gamma_k^d$  est la sous-catégorie épiréflexive de  $\Gamma^d \mathcal{P}_k\text{-mod}$  associée au bifoncteur de Yoneda  $L_{\Gamma^d \mathcal{P}_k}$  défini dans l'exemple 3.3. C'est une catégorie abélienne. Les projectifs standards  $\Gamma^{d,V} = \mathrm{Hom}_{\Gamma^d \mathcal{P}_k}(V, -)$  forment un système de générateurs projectifs de  $\mathrm{Rep} \Gamma_k^d$ . On rappelle qu'on dispose d'un foncteur de dualité

$$\begin{aligned} D : (\mathrm{Rep} \Gamma_k^d)^{op} &\rightarrow \mathrm{Rep}^{op} \Gamma_k^d \\ F &\mapsto \mathcal{H}om(F, L_{\Gamma^d \mathcal{P}_k}). \end{aligned}$$

**Proposition 6.1.** *Le foncteur  $RD(-)'$  est une dualité de Serre pour  $\mathcal{D}_{\mathrm{parf}}(\mathrm{Rep} \Gamma_k^d)$ .*

*Démonstration.* C'est une réécriture de la proposition 4.13 dans le contexte des foncteurs polynomiaux stricts.  $\square$

**Notations 6.2.** Soient  $F$  un objet  $\mathrm{Rep} \Gamma_k^d$  et  $V$  un objet de  $\mathcal{P}_k$ .

- On note  $\Lambda^{d,V}$  la précomposition de  $\Lambda^d$  par  $\mathrm{Hom}(V, -)$ .
- On note  $\#$  le foncteur dualité de Kuhn

$$\begin{aligned} \# : (\mathrm{Rep} \Gamma_k^d)^{op} &\rightarrow (\mathrm{Rep} \Gamma_k^d) \\ F &\mapsto F^\# \end{aligned}$$

défini par  $F^\#(V) = F(V)'$ .

- On note  $\mathcal{H}om(\Lambda^d, -)$  le foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om(\Lambda^d, -) : \mathrm{Rep} \Gamma_k^d &\rightarrow \mathrm{Rep} \Gamma_k^d \\ F &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep} \Gamma_k^d}(\Lambda^d, F) \end{aligned}$$

où  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep} \Gamma_k^d}(\Lambda^d, F)$  est le foncteur  $V \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep} \Gamma_k^d}(\Lambda^{d,V}, F)$ .

**Théorème 6.3** ([Touzé1, théorème 3.8], [Krause, théorème 4.9]). *Le foncteur dualité de Ringel*

$$\theta := R\mathcal{H}om(\Lambda^d, -) : \mathcal{D}^b(\mathrm{Rep} \Gamma_k^d) \rightarrow \mathcal{D}^b(\mathrm{Rep} \Gamma_k^d)$$

*est une équivalence de catégorie avec quasi-inverse le foncteur  $\theta^{-1} : X \mapsto \theta(X^\#)^\#$ .*

**Proposition 6.4.** *Les endofoncteurs  $RD(-)'$  et  $\theta^{-2}$  de  $\mathcal{D}_{\mathrm{parf}}(\mathrm{Rep} \Gamma_k^d)$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* H.Krause montre que le foncteur  $\theta^{-2}$  est une dualité de Serre pour  $\mathcal{D}_{\text{parf}}(\text{Rep } \Gamma_k^d)$  (voir [Krause, corollaire 5.5]). La proposition suit de l'unicité d'un foncteur dualité de Serre (voir remarque 4.11).  $\square$

**6.2. Exemple d'un foncteur à dualité dans  $\text{Rep } \Gamma_k^d$ .** Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p$ . Soient  $r$  et  $s$  deux entiers positifs. On pose  $d = sp^r$ . Le foncteur twist de Frobenius

$$I^{(r)} : V \mapsto V^r = k \langle v^{\otimes p^r}, v \in V \rangle \subset S^{p^r}(V)$$

est un foncteur polynomial strict de degré  $p^r$ . La précomposition par  $I^{(r)}$  d'un foncteur polynomial strict  $F$  de degré  $s$  définit un foncteur polynomial strict  $I^{(r)} \circ F$  de degré  $sp^r$ . On pose  $F^{(r)} := I^{(r)} \circ F$ .

Soit  $\mathfrak{s} = (s_1, \dots, s_k)$  une partition de  $s$ . Pour  $X = S$  (resp.  $X = \Gamma, X = \Lambda$ ), on pose  $X^{\mathfrak{s}} = \otimes_{i=1}^k X^{s_i}$ . On rappelle que  $X^{\mathfrak{s}}$  est alors un foncteur polynomial strict de degré  $s$ .

**Proposition 6.5.** *Soit  $\mathfrak{s} = (s_1, \dots, s_k)$  une partition de  $s$ . Alors le foncteur  $\Gamma^{\mathfrak{s}(r)}$  est à dualité. En particulier*

$$RD(\Gamma^{\mathfrak{s}(r)})' \cong S^{\mathfrak{s}(r)}[2s(p^r - 1)]$$

et on a l'isomorphisme naturel

$$\text{Ext}_{\text{Rep } \Gamma_k^d}^i(\Gamma^{\mathfrak{s}(r)}, -)' \cong \text{Ext}_{\text{Rep } \Gamma_k^d}^{2s(p^r-1)-i}(-, S^{\mathfrak{s}(r)}).$$

*Démonstration.* Pour la preuve de la proposition, on utilise les propriétés suivantes de la dualité de Ringel  $\theta$  (voir théorème 6.3) pour les foncteurs polynomiaux stricts étudiée dans l'article [Touzé1].

- (1) On a des isomorphismes  $\theta(S^{\mathfrak{s}}) \cong \Lambda^{\mathfrak{s}}$  et  $\theta(\Lambda^{\mathfrak{s}}) \cong \Gamma^{\mathfrak{s}}$  (voir [Touzé1, lemme 3.6]).
- (2) Soit  $C \in \mathcal{D}^b(\text{Rep } \Gamma_k^d)$ . On a les isomorphismes naturels

$$\theta^n(C \circ I^{(r)}) \cong (\theta^n(C) \circ I^{(r)}) [dn(p^r - 1)]$$

et

$$\theta^n(I^{(r)} \circ C) \cong (I^{(r)} \circ \theta^n(C)) [dn(p^r - 1)]$$

(voir [Touzé1, proposition 6.6]).

La proposition 6.4 et la définition de l'inverse de  $\theta$  du théorème 6.3 donnent

$$RD(\Gamma^{\mathfrak{s}} \circ I^{(r)})' \cong \theta^{-2}(\Gamma^{\mathfrak{s}} \circ I^{(r)}) \cong \theta^2(\Gamma^{\mathfrak{s}} \circ I^{(r)})^{\#}.$$

Les propriétés ci-dessus de  $\theta$  et les égalités  $(F \circ G)^{\#} = F^{\#} \circ G^{\#}$ ,  $\Gamma^{\mathfrak{s}\#} = S^{\mathfrak{s}}$  et  $I^{(r)\#} = I^{(r)}$  permettent de réécrire cet isomorphisme sous la forme

$$RD(\Gamma^{\mathfrak{s}} \circ I^{(r)})' \cong (\theta^2(S^{\mathfrak{s}}) \circ I^{(r)})^{\#}[2s(p^r - 1)] \cong S^{\mathfrak{s}} \circ I^{(r)}[2s(p^r - 1)].$$

Le foncteur  $\Gamma^{\mathfrak{s}} \circ I^{(r)}$  étant d'Eilenberg-Mac Lane de degré  $2s(p^r - 1)$ , l'isomorphisme entre les groupes d'extensions suit du théorème 5.5.  $\square$

## 7. LES IMMEUBLES DE TITS SONT DES CATÉGORIES À DUALITÉ

Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie. Dans cette section  $k$  est le groupe abélien  $\mathbb{Z}$ . On rappelle que  $\mathcal{C}\text{-mod}$  est la catégorie des foncteurs covariants de  $\mathcal{C}$  dans la catégorie des groupes abéliens. Le foncteur de dualité

$$D : (\mathcal{C}\text{-mod})^{op} \rightarrow \mathcal{C}^{op}\text{-mod}$$

qui associe à un  $\mathcal{C}$ -module à gauche  $F$  le  $\mathcal{C}$ -module à droite  $\mathcal{H}om(F, \underline{\mathbb{Z}})$  envoie un projectif standard  $P_x^{\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{C}\text{-mod}$  vers le projectif standard  $P_{\mathcal{C}}^x$  de  $\mathcal{C}^{op}\text{-mod}$ . Un foncteur  $F$  de  $\mathcal{C}\text{-mod}$  est à dualité si  $RDF \cong D^n(F)[n]$  dans  $\mathcal{D}^+(\mathcal{C}^{op}\text{-mod})$  pour un certain entier  $n$  *i.e.* étant donnée une résolution projective de type  $FP$  de  $F$ , la cohomologie du complexe de projectifs obtenue après l'application du foncteur de dualité  $D$  est concentrée en le degré  $n$ . Dans cette section on s'intéresse aux petites catégories  $\mathcal{C}$  telles que le foncteur constant  $\underline{\mathbb{Z}}$  est à dualité. Notre résultat principal est le corollaire 7.18 où on montre que les immeubles de Tits sphériques sont des catégories à dualité.

### 7.1. Définitions et premières propriétés.

**Définition 7.1.** Une petite catégorie  $\mathcal{C}$  est à dualité si le  $\mathcal{C}$ -module  $\underline{\mathbb{Z}}$  est à dualité. Dans ce cas on a un isomorphisme naturel

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^i(\underline{\mathbb{Z}}, -) \cong \text{Tor}_{n-i}^{\mathcal{C}}(D^n(\underline{\mathbb{Z}}), -)$$

pour un certain entier  $n$ . On appelle le  $\mathcal{C}$ -modules à droite  $D^n(\underline{\mathbb{Z}})$  le dualisant de  $\mathcal{C}$ .

**Exemple 7.2.** Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie  $x \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} y$ . Le complexe de  $\mathcal{C}$ -modules à gauche suivant

$$(6) \quad 0 \longrightarrow P_y^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\alpha^* - \beta^*} P_x^{\mathcal{C}}$$

est une résolution projective finie du module trivial  $\underline{\mathbb{Z}}$ . Appliquant le foncteur de dualité  $D$ , on obtient le complexe

$$(7) \quad P_{\mathcal{C}}^y \xleftarrow{\alpha_* - \beta_*} P_{\mathcal{C}}^x \longleftarrow 0.$$

On vérifie que c'est une résolution projective finie du module (à droite) trivial  $\underline{\mathbb{Z}}$ . Il s'ensuit que  $\underline{\mathbb{Z}}$  est à dualité et  $D(\underline{\mathbb{Z}}) \cong \underline{\mathbb{Z}}[1]$ .

**Exemple 7.3.** Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie suivante

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 1 \\ & & \downarrow b & \begin{array}{c} \nearrow c \\ \searrow d \end{array} & \downarrow e \\ 4 & \searrow a & & & \\ & & 2 & & 3 \end{array}$$

Le complexe de  $\mathcal{C}$ -modules suivant

$$0 \rightarrow P_2^{\mathcal{C}} \oplus P_2^{\mathcal{C}} \oplus P_3^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\phi} P_0^{\mathcal{C}} \oplus P_1^{\mathcal{C}} \oplus P_4^{\mathcal{C}}$$

où  $\phi$  est donné par la matrice  $\begin{pmatrix} b^* & b^* & d^* \\ -c^* & 0 & -e^* \\ 0 & -a^* & 0 \end{pmatrix}$  est une résolution projective de  $\mathbb{Z}$ . On applique le foncteur de dualité  $D$  à cette résolution, on obtient le complexe

$$P_{\mathcal{C}}^2 \oplus P_{\mathcal{C}}^2 \oplus P_{\mathcal{C}}^3 \xleftarrow{\phi^*} P_{\mathcal{C}}^0 \oplus P_{\mathcal{C}}^1 \oplus P_{\mathcal{C}}^4 \leftarrow 0$$

et on vérifie que c'est une résolution projective du  $\mathcal{C}$ -module à droite  $D^1(\mathbb{Z})$ , donné sur les objets par

$$D^1(\mathbb{Z})(0) = D^1(\mathbb{Z})(1) = D^1(\mathbb{Z})(2) = \mathbb{Z}^2 \text{ et } D^1(\mathbb{Z})(3) = D^1(\mathbb{Z})(4) = \mathbb{Z}.$$

Pour voir qu'une petite catégorie  $\mathcal{C}$  est à dualité, il suffit de calculer pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  les groupes d'extensions

$$\text{Ext}_{\mathcal{C}}^*(\mathbb{Z}, P_x^{\mathcal{C}}).$$

Si ces groupes sont nuls sauf pour un certain degré  $n$  (qui ne dépend pas de  $x$ ) alors la catégorie est à dualité. Le but de ce qui suit est de simplifier les calculs de ces groupes.

**Rappels 7.4** (Cohomologie d'une petite catégorie). La cohomologie d'une petite catégorie  $\mathcal{C}$  à coefficient dans un foncteur  $F$  est défini par

$$H^*(\mathcal{C}; F) := \text{Ext}_{\mathcal{C}}^*(\mathbb{Z}, F).$$

On définit le complexe  $\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}}$  par

$$\mathcal{B}_n^{\mathcal{C}} = \bigoplus_{x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \in \mathcal{N}_n \mathcal{C}} P_{x_n}^{\mathcal{C}},$$

( $\mathcal{N}_n \mathcal{C}$  désigne l'ensemble des chaînes de morphismes de  $\mathcal{C}$  de longueur  $n$ ) et pour  $[x_n \xrightarrow{f} a]_{x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{\alpha} x_n} \in \mathcal{B}_n^{\mathcal{C}}(a)$

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}}}^n [x_n \xrightarrow{f} a]_{x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{\alpha} x_n} &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [x_n \rightarrow a]_{x_0 \rightarrow \dots \rightarrow \hat{x}_i \rightarrow \dots \rightarrow x_n} \\ &+ (-1)^n [x_{n-1} \xrightarrow{f \circ \alpha} a]_{x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1}} \in \mathcal{B}_{n-1}^{\mathcal{C}}(a), \end{aligned}$$

où  $a \in \text{Ob} \mathcal{C}$  et  $x_0 \rightarrow \dots \rightarrow \hat{x}_i \rightarrow \dots \rightarrow x_n$  est la chaîne de morphismes de longueur  $n-1$  obtenue de  $x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$  en remplaçant la sous chaîne  $x_{i-1} \rightarrow x_i \rightarrow x_{i+1}$  par sa composition. Le complexe  $\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}}$  est une résolution projective du module trivial  $\mathbb{Z}$  et on a  $H^*(\mathcal{C}; F) = H^*(\text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}}, F))$ .

Soit  $i : \mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}$  le foncteur inclusion d'une sous-catégorie  $\mathcal{C}'$  dans  $\mathcal{C}$ . La cohomologie relative à coefficient dans un foncteur  $F$  est définie par

$$H^*(\mathcal{C}, \mathcal{C}'; F) := H^*(\text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}}, F) / \text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}'}, F \circ i))$$

et fournit une suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H^i(\mathcal{C}; F) \rightarrow H^i(\mathcal{C}'; F \circ i) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{C}, \mathcal{C}'; F) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{C}; F) \rightarrow \dots$$

**Notations 7.5.** Soient  $x$  et  $y$  deux objets de  $\mathcal{C}$  (pas forcément un ensemble ordonné), on dit que  $x \leq y$  s'il existe un morphisme de  $x$  vers  $y$  dans  $\mathcal{C}$ . On dit que  $x$  et  $y$  sont joignables s'il existe un objet  $z$  tel que  $x \leq z \geq y$ .

- On note  $\tilde{\mathcal{C}}_x$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  dont les objets sont joignables à  $x$ .
- On note  $\mathcal{C}_x$  la sous-catégorie pleine de  $\tilde{\mathcal{C}}_x$  des objets  $\not\leq x$ .
- On note  $\mathcal{C}_{\leq x}$  (resp.  $\mathcal{C}_{< x}$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  dont les objets sont  $\leq x$  (resp.  $< x$ ).

**Proposition 7.6.** Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie et  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Alors

$$H^*(\mathcal{C}; P_x^{\mathcal{C}}) \cong H^*(\tilde{\mathcal{C}}_x; P_x^{\tilde{\mathcal{C}}_x}).$$

*Démonstration.*

Il y a une suite exacte de  $\mathcal{C}$ -modules  $0 \rightarrow \mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x} \rightarrow \mathcal{B}_*^{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{B}_*^{\mathcal{C}}/\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x} \rightarrow 0$ . Comme  $\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}}/\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x}$  est projective, en appliquant le foncteur  $\text{Hom}(-, P_x^{\mathcal{C}})$ , on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}}/\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x}, P_x^{\mathcal{C}}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}}, P_x^{\mathcal{C}}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x}, P_x^{\mathcal{C}}) \rightarrow 0.$$

Pour  $i \in \mathbb{N}$ , on a

$$\text{Hom}(\mathcal{B}_i^{\mathcal{C}}/\mathcal{B}_i^{\tilde{\mathcal{C}}_x}, P_x^{\mathcal{C}}) \cong \prod_{x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_i \notin \mathcal{N}_i \tilde{\mathcal{C}}_x} P_x^{\mathcal{C}}(x_i) = 0,$$

d'où l'isomorphisme  $\text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}}; P_x^{\mathcal{C}}) \cong \text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x}; P_x^{\mathcal{C}})$ .  $\square$

**Proposition 7.7.** Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie et  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . Alors

$$(8) \quad H^*(\mathcal{C}; P_x^{\mathcal{C}}) \cong H^*(\tilde{\mathcal{C}}_x, \mathcal{C}_x; P_x^{\tilde{\mathcal{C}}_x}).$$

*Démonstration.* La démonstration est analogue à la précédente. Il y a une suite exacte de  $\mathcal{C}$ -modules  $0 \rightarrow \mathcal{B}_*^{\mathcal{C}_x} \rightarrow \mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x} \rightarrow \mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x}/\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}_x} \rightarrow 0$ . Appliquons le foncteur  $\text{Hom}(-, P_x^{\mathcal{C}})$ , on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x}/\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}_x}, P_x^{\mathcal{C}}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x}, P_x^{\mathcal{C}}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}_x}, P_x^{\mathcal{C}}) \rightarrow 0.$$

Pour  $i \in \mathbb{N}$ , on a

$$\text{Hom}(\mathcal{B}_i^{\mathcal{C}_x}, P_x^{\mathcal{C}}) \cong \prod_{x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_i \in \mathcal{N}_i \mathcal{C}_x} P_x^{\mathcal{C}}(x_i) = 0,$$

d'où l'isomorphisme  $\text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x}/\mathcal{B}_*^{\mathcal{C}_x}; P_x^{\mathcal{C}}) \cong \text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x}; P_x^{\mathcal{C}})$ .  $\square$

**7.2. Ensembles ordonnés.** Dans ce paragraphe, on donne une condition pour qu'un ensemble ordonné simplicial soit une catégorie à dualité.

**Rappels 7.8** (Complexes simpliciaux). Un complexe simplicial sur un ensemble de sommets  $V$  est une collection  $\Delta$  de sous-ensembles finis non vides de  $V$  telle que  $\{v\} \in \Delta$  pour tout  $v \in V$  et tout sous-ensemble non vide de  $A \in \Delta$  est dans  $\Delta$ . On appelle simplexe un élément de  $\Delta$ . La dimension d'un simplexe  $F$  est définie par  $\dim F = |F| - 1$ . La dimension de  $\Delta$  est le maximum des dimensions de ses éléments.

Soit  $A$  un simplexe d'un complexe simplicial  $\Delta$ , le link de  $A$  est le sous complexe simplicial des simplexes  $B$  joignables à  $A$  et disjoints de  $A$  :

$$\text{link}_A = \{B; A \cup B \in \Delta \text{ et } A \cap B = \emptyset\}.$$

Un ensemble ordonné est une catégorie telle que, entre deux objets, il y a au plus un morphisme. À tout complexe simplicial  $\Delta$ , on associe un ensemble ordonné, qu'on note  $P(\Delta)$ , dont les objets sont les simplexes de  $\Delta$  et les morphismes sont les inclusions. Un ensemble ordonné  $P$  est dit simplicial s'il existe un complexe simplicial  $\Delta$  tel que  $P \cong P(\Delta)$ . Le joint simplicial de deux complexes simpliciaux  $\Delta$  et  $\Delta'$  est le complexe simplicial

$$\Delta * \Delta' = \{A \cup B; A \in \Delta, B \in \Delta'\} \cup \Delta \cup \Delta'.$$

Soit  $P = P(\Delta)$  et  $Q = P(\Delta')$  deux ensembles ordonnés simpliciaux. On appelle joint simplicial l'ensemble ordonné simplicial  $P * Q := P(\Delta \cup \Delta')$ . On note  $|\Delta|$  la réalisation topologique d'un complexe simplicial  $\Delta$ . La subdivision barycentrique d'un ensemble ordonné  $P$  est un ensemble ordonné simplicial qu'on note  $\Delta(P)$ . La réalisation topologique de  $P$  est celle de  $\Delta(P)$ .

Pour  $\mathcal{C}$  un ensemble ordonné, la proposition 7.7 prend la forme simple suivante :

**Proposition 7.9.** *Si  $\mathcal{C}$  est un ensemble ordonné, alors l'isomorphisme (8) prend la forme simple*

$$(9) \quad \mathrm{H}^*(\mathcal{C}; P_x^{\mathcal{C}}) \cong \mathrm{H}^*(\tilde{\mathcal{C}}_x, \mathcal{C}_x; \mathbb{Z}).$$

*Si, de plus,  $\tilde{\mathcal{C}}_x$  est contractile alors*

$$(10) \quad \mathrm{H}^*(\mathcal{C}, P_x^{\mathcal{C}}) \cong \tilde{\mathrm{H}}^{*-1}(\mathcal{C}_x; \mathbb{Z}).$$

*Démonstration.* Soit  $\underline{\mathbb{Z}}^{\mathcal{C}_x}$  le  $\tilde{\mathcal{C}}_x$ -module, défini par  $\underline{\mathbb{Z}}^{\mathcal{C}_x}(a) = \mathbb{Z}$  si  $a \in \text{Ob}(\mathcal{C}_x)$  et 0 sinon. Si  $\mathcal{C}$  est un ensemble ordonné *i.e.* il y a au plus un morphisme entre deux objets, alors on a la suite exacte de  $\tilde{\mathcal{C}}_x$ -modules :

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}^{\mathcal{C}_x} \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow P_x^{\tilde{\mathcal{C}}_x} \rightarrow 0.$$

Appliquons le foncteur  $\text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x} / \mathcal{B}_*^{\mathcal{C}_x}, -)$ , on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x} / \mathcal{B}_*^{\mathcal{C}_x}, \underline{\mathbb{Z}}^{\mathcal{C}_x}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x} / \mathcal{B}_*^{\mathcal{C}_x}, \underline{\mathbb{Z}}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x} / \mathcal{B}_*^{\mathcal{C}_x}, P_x^{\tilde{\mathcal{C}}_x}) \rightarrow 0.$$



Pour  $i \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{B}_i^{\tilde{\mathcal{C}}_x} / \mathcal{B}_i^{\mathcal{C}_x}, \underline{\mathbb{Z}}^{\mathcal{C}_x}) \cong \prod_{x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_i \notin \mathcal{N}_i \mathcal{C}_x} \underline{\mathbb{Z}}^{\mathcal{C}_x}(x_i) = 0,$$

d'où l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x} / \mathcal{B}_*^{\mathcal{C}_x}, \underline{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(\mathcal{B}_*^{\tilde{\mathcal{C}}_x} / \mathcal{B}_*^{\mathcal{C}_x}, P_x^{\tilde{\mathcal{C}}_x}).$$

L'isomorphisme (9) suit en passant à la cohomologie. La suite exacte longue de cohomologie réduite associée à la paire  $(\tilde{\mathcal{C}}_x, \mathcal{C}_x)$  donne le deuxième isomorphisme.  $\square$

**Exemple 7.10.** Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble ordonné suivant

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 1 \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ 2 & & 3 \end{array}$$

alors

$$\tilde{\mathcal{P}}_0 = \tilde{\mathcal{P}}_1 = \mathcal{P}, \mathcal{P}_0 = 1 \text{ et } \mathcal{P}_1 = 0.$$

On est dans la situation où  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$  sont contractiles, donc

$$H^1(\tilde{\mathcal{P}}_0, \mathcal{P}_0; \mathbb{Z}) = H^1(\tilde{\mathcal{P}}_1, \mathcal{P}_1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \text{ et } H^0(\tilde{\mathcal{P}}_0, \mathcal{P}_0; \mathbb{Z}) = H^0(\tilde{\mathcal{P}}_1, \mathcal{P}_1; \mathbb{Z}) = 0.$$

De plus, on a

$$\tilde{\mathcal{P}}_2 = \begin{array}{ccc} 0 & & 1 \\ \downarrow & \searrow & \\ 2 & & \end{array} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{P}}_3 = \begin{array}{ccc} 0 & & 1 \\ & \searrow & \downarrow \\ & & 3 \end{array}$$

$\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$  consistent en deux points 0 et 1. On est dans la situation où  $\tilde{\mathcal{P}}_2$  et  $\tilde{\mathcal{P}}_3$  sont contractiles. On trouve que

$$H^1(\tilde{\mathcal{P}}_2, \mathcal{P}_2; \mathbb{Z}) = H^1(\tilde{\mathcal{P}}_3, \mathcal{P}_3; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \text{ et } H^0(\tilde{\mathcal{P}}_2, \mathcal{P}_2; \mathbb{Z}) = H^0(\tilde{\mathcal{P}}_3, \mathcal{P}_3; \mathbb{Z}) = 0.$$

La catégorie  $\mathcal{P}$  est à dualité et le dualisant  $D^1(\underline{\mathbb{Z}})$  est le module trivial  $\underline{\mathbb{Z}}$ .

**Lemme 7.11.** Si  $\mathcal{P}$  est un ensemble ordonné simplicial alors

$$\tilde{\mathcal{P}}_x \cong \mathcal{P}_{\leq x} * \mathrm{link}_x \text{ et } \mathcal{P}_x \cong \mathcal{P}_{< x} * \mathrm{link}_x.$$

*Démonstration.* Soit  $\Delta$  un complexe simplicial tel que  $\mathcal{P} \cong P(\Delta)$ . On peut voir via cet isomorphisme les objets de  $\mathcal{P}$  comme des ensembles finis et les morphismes comme des inclusions. Soit  $z$  un objet de  $\tilde{\mathcal{P}}_x$ , vu comme un ensemble fini, on peut le voir comme la réunion disjointe de  $z \cap x$  et  $z \setminus x$ . Les isomorphismes du lemme sont construits en associant à  $z$  l'objet  $(z \cap x) \cup (z \setminus x)$  de  $\mathcal{P}_{\leq x} * \mathrm{link}_x$ .  $\square$

**Théorème 7.12.** *Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble ordonné simplicial fini. S'il existe un entier  $n$  tel que pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{P}$ ,*

$$\tilde{H}^i(\text{link}_x) = 0 \text{ pour } i \neq n - \dim(x) - 1,$$

*alors  $\mathcal{P}$  est à dualité.*

*Démonstration.* Le lemme précédent montre que  $\tilde{\mathcal{P}}_x$  est contractile pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{P}$ . On a alors

$$H^*(\mathcal{P}, P_x^{\mathcal{P}}) = \tilde{H}^{*-1}(\mathcal{P}_{<x} * \text{link}_x; \mathbb{Z}).$$

Or, pour un ensemble ordonné simplicial,  $\mathcal{P}_{<x}$  est (co)homologiquement une sphère de dimension  $\dim x - 1$ . Si  $\tilde{H}^i(\text{link}_x) = 0$  pour  $i \neq n - \dim(x) - 1$  alors la cohomologie réduite de  $\mathcal{P}_x$  est concentrée en dimension  $n - 1$ . Il suit que  $H^i(\mathcal{P}, P_x^{\mathcal{P}}) = 0$  pour  $i \neq n$ . L'hypothèse que  $\mathcal{P}$  est fini assure que  $\underline{\mathbb{Z}}$  est de type  $FP$  et la proposition 5.5 permet de conclure.  $\square$

Le lemme clé suivant dû à Munkres, nous permet d'écrire une version topologique du théorème 7.12.

**Lemme 7.13.** *Soit  $\Delta$  un complexe simplicial et  $x$  un simplexe de  $\Delta$ . Alors*

$$H^i(|\Delta|, |\Delta| - x) \cong \tilde{H}^{i - \dim(x) - 1}(\text{link}_x).$$

*Démonstration.* Voir [Munkres1, lemme 3.3 page 116].  $\square$

**Théorème 7.14.** *Soit  $\Delta$  un complexe simplicial fini de dimension  $n$ , alors  $P(\Delta)$  est une catégorie à dualité si et seulement si la cohomologie locale de  $|\Delta|$  en tout point est concentrée en degré  $n$ . Dans ce cas :*

$$\text{Ext}_{P(\Delta)}^i(\underline{\mathbb{Z}}, -) \cong \text{Tor}_{n-i}^{P(\Delta)}(D^n(\underline{\mathbb{Z}}), -)$$

où  $D^n(\underline{\mathbb{Z}})$  est le foncteur défini sur les objets par

$$D^n(\underline{\mathbb{Z}})(x) = H^i(|\Delta|, |\Delta| - x).$$

### 7.3. Application : immeubles sphériques.

**Définition 7.15.** Un immeuble sphérique est un complexe simplicial qui est l'union de sous-complexes  $\Sigma_i$  vérifiant

- (1) Chaque  $\Sigma_i$  est un complexe de Coxeter fini.
- (2) Pour tous simplexes  $A, B \in \Delta$ , il existe un appartement  $\Sigma_i$  contenant  $A$  et  $B$ .
- (3) Si  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont deux appartements contenant  $A$  et  $B$ , il existe un isomorphisme  $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  fixant  $A$  et  $B$ .

**Théorème 7.16** ([AB08, théorème 4.73 page 197]). *Si  $\Delta$  est un immeuble sphérique de dimension  $n$ , alors  $|\Delta|$  a le type d'homotopie d'un bouquet de  $n$ -sphères.*

**Proposition 7.17** ([AB08, proposition 4.9 page 176]). *Si  $\Delta$  est un immeuble sphérique, alors  $\text{link}_A$  est un immeuble sphérique pour tout  $A \in \Delta$ .*

Pour un immeuble sphérique de dimension  $n$ ,  $|\text{link}_A|$  a le même type d'homotopie qu'un bouquet de sphères de dimension  $n - \dim(A) - 1$ . On déduit du théorème 7.12 :

**Corollaire 7.18.** *Soit  $\Delta$  un immeuble sphérique fini, alors l'ensemble ordonné simplicial  $P(\Delta)$  est une catégorie à dualité.*

**7.4. Dualité de Poincaré pour une variété.** Dans cet exemple, on retrouve la dualité classique de Poincaré pour une variété cohomologique compacte et triangulée. On rappelle qu'une variété cohomologique de dimension  $n$  est un espace topologique  $X$  tel que pour tout point  $x \in X$ , les groupes de cohomologie locale  $H^i(X, X - x)$  sont nuls pour  $i \neq n$  et  $H^n(X, X - x) = \mathbb{Z}$ . Soit  $\Delta$  une triangulation finie d'une variété cohomologique de dimension  $n$ . Le théorème précédent montre que  $P(\Delta)$  est une catégorie à dualité. Le dualisant  $D^n(\mathbb{Z})$  est égal à  $\mathbb{Z}$  en tout objet  $x$  de  $P(\Delta)$ .

**Rappels 7.19.**

– On a les isomorphismes suivant

$$H^*(|\Delta|, \mathbb{Z}) \cong \text{Ext}_{P(\Delta)}^*(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \text{Ext}_{P(\Delta)^{op}}^*(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

et

$$H_*(|\Delta|, \mathbb{Z}) \cong \text{Tor}_*^{P(\Delta)}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \text{Tor}_*^{P(\Delta)^{op}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}).$$

– La variété  $|\Delta|$  est orientable si et seulement si  $H_n(|\Delta|, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ .

**Proposition 7.20.** *La variété  $|\Delta|$  est orientable si et seulement si le dualisant  $D^n(\mathbb{Z})$  est le  $P(\Delta)^{op}$ -module trivial  $\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Supposons  $|\Delta|$  orientable. La proposition 5.8 donne

$$\text{Ext}_{P(\Delta)^{op}}^0(D(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong \text{Tor}_n^{P(\Delta)^{op}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}).$$

L'orientabilité de  $|\Delta|$  est équivalente à  $\text{Tor}_n^{P(\Delta)^{op}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  et par suite  $\text{Hom}_{P(\Delta)^{op}\text{-mod}}(D^n(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  et donc  $D^n(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ . Inversement si  $D^n(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  alors l'isomorphisme de dualité  $\text{Ext}_{P(\Delta)}^i(\mathbb{Z}, -) \cong \text{Tor}_{n-i}^{P(\Delta)}(D^n(\mathbb{Z}), -)$  implique  $\text{Tor}_n^{P(\Delta)}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Proposition 7.21.** *Soit  $X$  une variété cohomologique compacte et triangulée de dimension  $n$ . Si  $X$  est orientable alors*

$$H_*(X, \mathbb{Z}) \cong H^{n-*}(X, \mathbb{Z}).$$

*Démonstration.* Si la variété est orientable alors le dualisant  $D^n(\mathbb{Z})$  est le  $P(\Delta)^{op}$ -module trivial  $\mathbb{Z}$ . On obtient

$$\text{Ext}_{P(\Delta)}^i(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \text{Tor}_{n-i}^{P(\Delta)}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}).$$

On retrouve ainsi la dualité de Poincaré.  $\square$

**7.5. Groupe fondamental d'une variété asphérique.** Soit  $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur entre deux petites catégories. On suppose que  $\mathcal{C}$  est une catégorie à dualité et les fibres  $\varphi|_{-}$  sont contractiles. Par le théorème A de Quillen ([Quillen]),  $\varphi$  est une équivalence d'homotopie. Soit  $\text{Res}_\varphi : \mathcal{D}\text{-mod} \rightarrow \mathcal{C}\text{-mod}$  (resp.  $\text{Res}_{\varphi^{op}} : \mathcal{D}^{op}\text{-mod} \rightarrow \mathcal{C}^{op}\text{-mod}$ ) le foncteur de précomposition avec  $\varphi$  (resp.  $\varphi^{op}$ ). On note  $\text{LK}_\varphi$  (resp.  $\text{LK}_{\varphi^{op}}$ ) l'adjoint à gauche de  $\text{Res}_\varphi$  (resp.  $\text{Res}_{\varphi^{op}}$ ). Les  $\varphi|_d$  sont contractiles pour tout  $d \in \text{Ob}(\mathcal{D})$  donc

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}}^*(\mathbb{Z}, F) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^*(\mathbb{Z}, \text{Res}_\varphi F).$$

L'extension de Kan à gauche  $\text{LK}_\varphi$  envoie une résolution de type  $FP$  du  $\mathcal{C}$ -module trivial  $\mathbb{Z}$  sur une résolution de type  $FP$  du  $\mathcal{D}$ -module trivial  $\mathbb{Z}$ . Soit  $d \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ , alors on a  $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^*(\mathbb{Z}, P_d) \cong \text{Ext}_{\mathcal{C}}^*(\mathbb{Z}, \text{Res}_\varphi P_d)$ . Le fait que  $\mathcal{C}$  est à dualité donne  $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^i(\mathbb{Z}, P_d) \cong \text{Tor}_{n-i}^{\mathcal{C}}(D, \text{Res}_\varphi P_d)$ , où  $D$  est le  $\mathcal{C}$ -module dualisant de  $\mathcal{C}$ . En utilisant la propriété  $\text{LK}_{\varphi^{op}}(F) \otimes_{\mathcal{D}} G \cong F \otimes_{\mathcal{C}} \text{Res}_\varphi G$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Tor}_{n-i}^{\mathcal{C}}(D, \text{Res}_\varphi P_d) &\cong \mathbb{L}_{n-i} \text{LK}_{\varphi^{op}}(D)(d) \\ &\cong \text{Tor}_{n-i}^{d|\varphi}(D, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

où  $\mathbb{L}$  désigne la dérivé à gauche. Si  $\text{Tor}_{n-i}^{d|\varphi}(D, \mathbb{Z}) = 0$  pour tout  $i \neq n$  alors  $\mathcal{D}$  est une catégorie à dualité.

Soit  $\tilde{\pi}_1(\mathcal{C})$  le groupoïde obtenu à partir de  $\mathcal{C}$  en inversant tout les morphismes. La catégorie  $\tilde{\pi}_1(\mathcal{C})$  est équivalente au groupe d'automorphisme, qu'on note  $\pi_1(\mathcal{C})$ , d'un de ses objets. Ce groupe est isomorphe au groupe fondamental de  $\mathcal{C}$  (voir [Quillen]). Supposons que  $\mathcal{C}$  est un  $\text{K}(\pi_1(\mathcal{C}); 1)$  alors le foncteur canonique  $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \pi_1(\mathcal{C})$  (on considère  $\pi_1(\mathcal{C})$  comme une catégorie à un seul objet  $\bullet$ ) est une équivalence d'homotopie et les fibres  $\pi|_{\bullet}$  et  $\bullet|_{\pi}$  sont contractiles. Si, de plus,  $\mathcal{C}$  est l'ensemble ordonné simplicial associé à une triangulation d'une variété cohomologique orientable alors le dualisant  $D$  est le  $\mathcal{C}$ -module trivial  $\mathbb{Z}$ . Dans ce cas, on a  $\text{Tor}_{n-i}^{\bullet|\pi}(D, \mathbb{Z}) = 0$  pour tout  $i \neq n$ . Il suit que  $\pi_1(\mathcal{C})$  est un groupe à dualité de Poincaré (un cas particulier de [Brown, exemple 1 page 222]).

## RÉFÉRENCES

- [AB08] P. Abramenko & KS. Brown - « Buildings Theory and Application », *Springer*. (2008).
- [Brown] KS. Brown - « Cohomology of groups », *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York. **87** (1982).
- [BE73] R. Bieri & B. Eckmann - « Groups with homological duality generalizing Poincaré duality », *Invent Math.* **20** (1973), 103-124.
- [Borel] A. Borel & al - « Algebraic D-Modules », *Perspectives in Math. Academic Press. Florida* (1987).
- [Chałupnik] M. Chałupnik - « Koszul duality and extensions of exponential functors », *Adv. Math.* **218** (2008), no. 3, 969-982.

- [FS97] EM. Friedlander & A. Suslin - « Cohomology of finite group schemes over a field », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 2, p. 209-270.
- [Krause] H. Krause - « Koszul, Ringel and Serre duality for strict polynomial functors », *Compositio Mathematica.* **149** (2013), p. 996-1018.
- [Maclane] S. Mac Lane - « Homology », *Springer-Verlag.* (1975).
- [Munkres1] JR. Munkres - « Topological results in combinatorics », *Michigan Math. J.* **31** (1984), no. 1, p. 113-128.
- [Munkres2] JR. Munkres - « Elements of Algebraic Topology », *Addison-Wesley.* (1984).
- [Pirashvili] T.Pirashvili - « Introduction to functor homology », *Rational representation, the Steenrod algebra and functor homology. Panoramas et synthèses.* **16** (2003).
- [Quillen] D. Quillen - « Higher algebraic K-theory I », *Lecture Notes in Math. Springer. Berlin.* **341** (1973), .
- [RV02] I. Reiten & M. Van Den Bergh - « Noetherian hereditary category satisfying Serre duality », *Journal of the American Mathematical Society.* **15** (2002), no. 2, p. 295-366.
- [Touzé1] A. Touzé - « Ringel duality and derivatives of non-additive functors », *Journal of Pure and Applied Algebra.* **217** (2013), p. 1642-1673
- [Touzé2] A. Touzé - « Bar complexes and extentions of classical exponential functors », *arXiv :1012.2724v4 [math.RT].* (2013).