HAL open science

# Modélisation de phénomènes variables à l'aide de la géométrie dynamique

Sophie Soury-Lavergne, Annie Bessot

**To cite this version:**

Sophie Soury-Lavergne, Annie Bessot. Modélisation de phénomènes variables à l'aide de la géométrie dynamique. Espace Mathématique Francophone 2012, Feb 2012, Genève, Suisse. pp.742-753. hal-00988743

**HAL Id: hal-00988743**

**https://hal.science/hal-00988743v1**

Submitted on 9 May 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MODELISATION DE PHENOMENES VARIABLES A L'AIDE DE LA GEOMETRIE DYNAMIQUE

Sophie SOURY-LAVERGNE* – Annie BESSOT**

**Résumé** – Au travers d'une ingénierie didactique, nous proposons une analyse d'un processus de modélisation s'incarnant dans une succession de modèles intermédiaires et dont la finalité est de produire un modèle calculable pour résoudre un problème de coïncidence de deux phénomènes périodiques. Nous tentons de dévoluer aux élèves une part du processus de modélisation en organisant un milieu pour la validation en référence à la réalité grâce à la géométrie dynamique.

**Mots-clefs** : modélisation, covariation, fonction périodique, variable indépendante, géométrie dynamique, milieu

**Abstract** – We present the analysis of a modelling process framed by a didactical engineering. It consists of a series of intermediate models producing a calculable model to solve a problem of two periodic phenomena coincidence. We try to delegate to the students a part of the modelling process. Therefore, with dynamic geometry, we organise a milieu for the validation of the models in reference to the reality.

**Keywords**: modelling, dynamic geometry, periodic function, independent variable

La modélisation prend une place de plus en plus importante dans les programmes de mathématiques de nombreux pays. Or les professeurs se trouvent démunis pour fabriquer des situations de modélisation absentes des manuels et pour gérer de telles situations en classe. Ainsi la rareté d'authentiques activités de modelisation décrite par Blum (2002) reste valable. De plus, l'entrée dans le processus de modélisation semble une étape difficile pour les élèves. Le projet de recherche MIRA[1] a eu pour objectif de concevoir une ingénierie didactique permettant de dévoluer aux élèves une part de responsabilité dans le processus de modélisation et proposant aux enseignants des situations. Mais que recouvre au juste l'expression « processus de modélisation » ?

## I. MODELES ET PROCESSUS DE MODELISATION

Un modèle est « une *machine* dont la mise en fonctionnement permet *de produire des connaissances* relatives au système modélisé » (Chevallard 1992, p. 77). Nous n'appelons pas modélisation le fait de travailler avec un modèle tout fait, « naturalisé » ou « habillé » par le réel (Blum 2002), c'est-à-dire une modélisation *« 'prétexte' qui consiste à plaquer un 'réel' qui servirait de support concret au modèle mathématique qu'on veut enseigner ou faire fonctionner »* (Legrand 2003, p. 34). Modelisation renvoit au processus de résolution de problème qui consiste à construire un modèle à partir d'une situation réelle (Blum et Niss 1991).

Ci-après un schéma, construit à partir des travaux de Coulange (1998) et Rodriguez (2007), résumant ce que nous considèrerons comme étant un processus de modélisation. Ce schéma découpe le processus de modélisation en quatre phases :

Phase 1. Passage du système extramathématique à un ou plusieurs modèles intermédiaires

* Institut français de l'Education – France – sophie.soury-lavergne@ens-lyon.fr
** Université Joseph Fourier Grenoble 1 – France – annie.bessot@imag.fr

[1] Participent au projet de recherche coopératif franco – vietnamienne financé par la région Rhône-Alpes (MIRA Mobilité International Rhône – Alpes) : Annie Bessot, Alain Birebent, Claude Comiti, Colette Laborde, Lê Thai Bao Thien Trung, Lê Thi Hoai Chau, Nguyen Chi Thanh, Nguyen Thi Nga, Sophie Soury Lavergne.

© Soury-Lavergne S., Bessot A (2012) Modélisation de phénomènes variables à l'aide de la géométrie dynamique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT5, pp. 742–753). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Phase 2. Passage des modèles intermédiaires à un modèle mathématique calculable permettant de reformuler les questions initiales en un problème mathématique.

Phase 3. Phase de calcul dans le modèle mathématique pour produire les réponses au problème mathématique.

Phase 4. Retour à la situation étudiée pour transformer les réponses au problème mathématique en des réponses aux questions initiales et les confronter à la réalité modélisée.

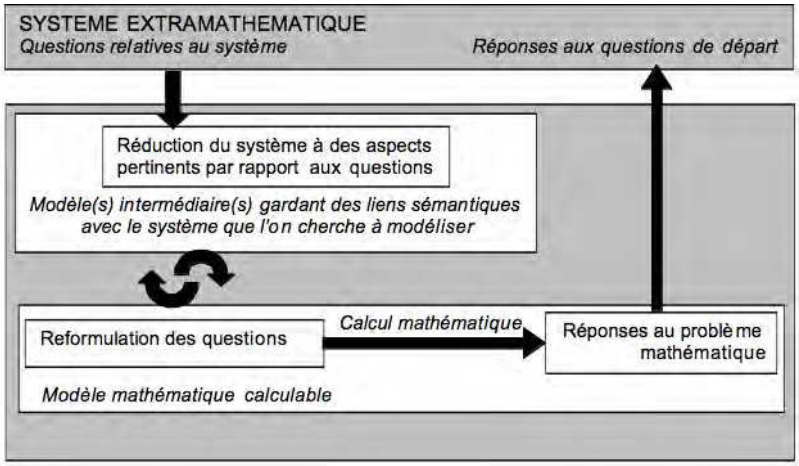



***Figure 1*** *– Schéma du processus de modélisation (d'après Coulange 1998)*

Notre proposition est d'accorder une attention particulière à la notion de modèle intermédiaire au cœur de la dynamique du processus de modélisation tel que nous l'avons représenté. En effet, l'évolution des recherches relatives à la modélisation mathématique consiste à mettre l'accent sur les modèles intermédiaires entre réalité et modèle mathématique calculable : modèle pseudo-concret (Henri 2001) ou modèle réel de la situation (Blum 2002) par exemple. Ces modèles intermédiaires entre la situation extramathématique et le modèle mathématique à construire représentent un premier niveau d'abstraction de la « réalité » ; ils évoluent au fur et à mesure du travail de modélisation pour être plus ou moins proche sémantiquement de la situation réelle considérée ou du modèle mathématique à construire. Ce qui caractérise un modèle intermédiaire n'est pas sa nature mathématique ou non mais d'abord son insuffisance pour répondre aux questions de départ et du coup son apparition puis son évolution dans le processus de modélisation.

## II. REDUCTION DU PROCESSUS DE MODELISATION DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU SECONDAIRE

Dans l'enseignement secondaire, il y a une propension à enseigner des modèles existants fournissant des éléments de savoir bien définis et négociables (Rodriguez 2007). L'organisation de réelles activités de modélisation dans les cours de mathématiques se heurte au cloisonnement disciplinaire des savoirs, caractéristique des institutions scolaires.

De plus comme l'écrit Chevallard :

> […] bien qu'acceptable dans son principe, cette activité, se référant nécessairement à une réalité extramathématique, pose problème aux mathématiciens, dans la mesure où elle introduit *donc du non mathématique dans un enseignement de mathématique*. (Chevallard 1989, p. 147. c'est l'auteur qui souligne).

A partir d'une analyse de manuels du Viêt Nam et de la France pour le secondaire, Nguyen Thi (2011) confirme la réduction de l'enseignement de la modélisation à l'enseignement de

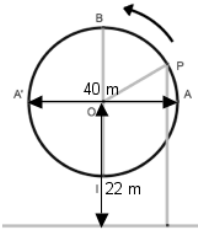
modèles tout faits se référant à une réalité extramathématique. Elle illustre cette réduction par deux versions d'un même problème représentatives d'énoncés de manuels.

Dans l'exercice à la façon vietnamienne (Figure 2), les modèles géométrique et algébrique sont donnés et ne sont pas à construire par les élèves. La figure géométrique est fournie ainsi que l'expression $\lambda = 22 - 20\cos\frac{\pi x}{2}$. Le recours au modèle géométrique n'est pas attendu institutionnellement pour répondre aux questions, son rôle est celui d'une simple illustration. Ce type d'exercice fait entrer l'élève dans le contrat didactique de la résolution d'équations trigonométriques.

Dans la version française (Figure 2), le modèle algébrique est lui aussi donné tout fait avec l'expression $h(t) = 22 - 20\cos\frac{\pi t}{2}$. La dernière question (question 4) sur la représentation graphique de la fonction *h(t)* ne sert pas à répondre au problème de départ, mais est un observable du contrat didactique en jeu dans cet exercice, celui de l'étude d'une fonction.

**À la façon vietnamienne**

Un parc d'attraction de Ho Chi Minh ville possède une grande roue de 40 m de diamètre dont l'axe de rotation est situé à 22 m du sol (voir figure). Au début du voyage, Minh s'assoit dans une cabine.




Quand la roue tourne régulièrement dans le même sens, la distance y (en mètre) au sol de la cabine de Minh, associée au point P, est calculée par la formule :

$$\lambda = 22 - 20\cos\frac{\pi x}{2}$$

où x est la durée en minute de la rotation du manège.

a) A quel instant Minh est-il à la position la plus basse ?

b) A quel instant est-il à la position la plus haute ?

c) Quand est-il distant du sol de 23 m pour la première fois ?

**À la façon française**

Un parc d'attraction de Ho Chi Minh ville possède une grande roue de 40 m de diamètre dont l'axe de rotation est situé à 22 m du sol. Au début du voyage, Minh s'assoit dans une cabine.

Quand la roue tourne régulièrement dans le même sens, la distance h (en mètre) au sol de la cabine de Minh est calculée par la formule :

$$h(t) = 22 - 20\cos\frac{\pi t}{2}.$$

où t est la durée en minute de la rotation du manège.

1) Quelle est la période T de la fonction $t \to h(t)$ ?

2) Quelle est la valeur maximale de h ? Sa valeur minimale ?

3) À l'instant t = 3 min, quelle est la distance au sol de la cabine de Minh ?

4) Représenter la fonction h dans un repère orthogonal, où l'on prendra pour unités : 1 cm pour 1 min en abscisse ; 1 cm pour 5 m en ordonnée.

***Figure 2*** *– Problème de manège : formulations conformes aux institutions scolaires Viêt Nam et France (Nguyen Thi 2011, p. 192).*

En conclusion de l'étude conduite par Nguyen Thi, il apparaît que dans les deux systèmes d'enseignement, à partir de la référence à une même réalité extramathématique, le modèle donné appartient au domaine des fonctions et est exprimé dans le registre algébrique (avec des ostensifs différents, propres à chacune des institutions : $y = f(x)$ pour le Viêt Nam et $t \to f(t)$ pour la France).

Notre question est alors relative à la possibilité de proposer une ingénierie didactique dans laquelle les différents modèles seront construits effectivement, apparaîtront comme nécessaires pour répondre aux questions posées, tout en restant compatibles avec les contraintes des institutions d'enseignement considérées.

## III. CHOIX POUR UNE INGENIERIE DIDACTIQUE SUR LA MODELISATION ET LES FONCTIONS PERIODIQUES

L'objectif est d'enseigner le processus même de modélisation et de l'articuler à un enseignement du concept de fonction périodique, les deux objectifs interagissant de façon dialectique.

Pour la conception de l'ingénierie, un principe est de respecter les contraintes des institutions d'enseignement (par exemple être conforme au programme de mathématiques). Le domaine extramathématique choisi privilégie une modélisation mathématique par les fonctions, les modèles fonctionnels étant majoritairement présents dans l'enseignement secondaire. De plus, la situation de covariation de grandeurs quantifiables peut être considérée comme une situation fondamentale pour la notion de fonction (Krysinska et al. 2009), notion au cœur des apprentissages mathématiques du secondaire.

### *1. Conception dynamique et conception statique de la notion de fonction*

Les recherches sur la notion de fonction distinguent deux conceptions de cette notion que l'on peut repérer comme se succédant dans l'histoire :

- la covariation de deux grandeurs. Nous parlerons de conception dynamique de la notion de fonction, décrite par Euler en 1755 :

> Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonction de ces dernières. (Euler 1755)

- la correspondance associant un nombre unique à un nombre donné. Nous parlerons de conception statique de la notion de fonction, définie par Hankel en 1870 de la façon suivante :

> On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit défini pour tout l'intervalle par la même loi en fonction de x, ni même que y soit défini par une expression mathématique explicite de x. (Hankel 1870)

La conception statique, basée sur la correspondance, s'est imposée dans l'enseignement actuel, obscurcissant les significations de variable et de fonction. Or, de nombreuses recherches montrent que les notions de variable et de dépendance (variable indépendante et variable dépendante), propres à la conception dynamique, posent problème aux élèves (Falcade 2002). Ces notions de variable et de dépendance prennent sens en particulier dans les situations de variation :

> En effet, le seul moyen de s'apercevoir qu'une chose dépend d'une autre est de les faire varier chacune à leur tour afin de constater quel effet a la variation mais tant et aussi longtemps qu'il n'y aura pas de variation, il sera presque impossible de savoir s'il y a dépendance. (René de Cotret 1988, p. 7)

C'est cette conception qui sera visée en premier lieu dans notre ingénierie.

### *2. La géométrie dynamique comme environnement privilégié pour la construction d'un modèle intermédiaire*

Une des hypothèses de travail est qu'un environnement de géométrie dynamique rend possible une première étape du processus de modélisation en produisant u modèle géométrique intermédiaire d'une situation de covariation de grandeurs.

En effet, les objets de la géométrie peuvent être considérés comme des émergents d'un processus de modélisation de la réalité spatiale et sont donc disponibles pour rendre compte de la co-variation de grandeurs spatiales.

Dans l'environnement de géométrie dynamique retenu, Cabri 2+, la modélisation de grandeurs variables se fait par la création de points qui se déplacent dans le plan. Un point M peut être libre dans le plan, contraint sur un objet géométrique ou ne pouvant bouger que par l'intermédiaire du déplacement d'un autre point P. *Dans ce dernier cas, nous disons que le point P pilote le point M.* Les points P et M mobiles à partir d'une origine fixe peuvent modéliser effectivement différentes grandeurs variables possibles, comme la longueur et le temps. Ils sont les prémisses aux notions de variables indépendante et dépendante. Cette modélisation géométrique garde perceptivement la trace matérielle du phénomène de variation (proximité sémantique) qui, en revanche, disparaît dans le symbolisme formel (rupture sémantique), ultime étape du processus de modélisation. Elle peut donc jouer le rôle d'une modélisation intermédiaire.

## 3. *Les situations clefs de l'ingénierie didactique*

Pour concevoir les situations de l'ingénierie, nous reprenons une idée de Burgermeister (2009) qui est de modifier des énoncés de problèmes scolaires, représentatifs d'un certain rapport institutionnel à la modélisation. Nous modifions ainsi le problème du manège (figure 2), pour aboutir à l'étude des coïncidences de deux phénomènes périodiques, problème de physique à l'origine de la méthode dite « des coïncidences »[2] (Nguyen Thi 2011). On ne peut pas répondre d'emblée aux questions initiales de coïncidence, le processus de modélisation devant aboutir à la production de réponses.

Le système extramathématique que l'on cherche à modéliser :

> Un parc d'attractions de Ho Chi Minh ville possède une grande roue. Au début du voyage, Minh s'assoit dans une cabine. Une lumière rouge éclaire par intermittence un endroit fixe du manège où passent les cabines. Si une cabine est éclairée, son occupant gagne un voyage gratuit. Ci-contre la photo d'une grande roue

***Figure 3*** *–Photo d'une grande roue*

L'étude que l'on veut mener sur le système :

> Le but du travail que nous allons faire ensemble est de chercher dans quelles conditions Minh peut gagner un voyage.

En d'autres termes, Minh gagne s'il y a coïncidence entre la position de sa cabine et l'éclairage de cette position par la lumière rouge.

Le schéma (figure 4) présente la logique des deux situations de notre ingénierie en ce qui concerne les étapes du processus de modélisation engagé.

---

[2] La méthode des coïncidences est une réponse au problème de détermination de la période inconnue d'un phénomène périodique : elle permet le calcul de cette période par l'étude des coïncidences du phénomène avec un second phénomène de *période connue.*

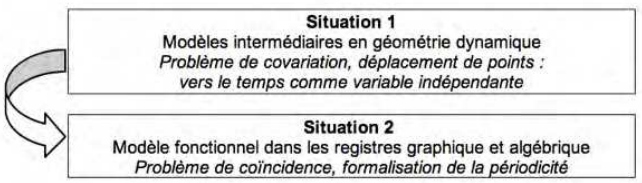



***Figure 4*** *– Schéma de l'ingénierie didactique*

Dans la première situation, découpée en 3 phases, nous cherchons à dévoluer aux élèves une part de responsabilité dans le processus de modélisation fonctionnelle d'une situation de covariation. L'enjeu est de construire un premier modèle intermédiaire sémantiquement proche de la réalité du manège et de le faire évoluer. La question de la représentation du déplacement d'une cabine sur le manège en fonction du temps devient, dans la géométrie dynamique, celle du déplacement d'un point sur un cercle piloté par un autre point. Cette question est initiée d'abord par la recherche d'une représentation du manège, de la cabine et du déplacement de la cabine. Cela revient à construire un cercle et un point se déplaçant sur le cercle par l'intermédiaire d'un autre point se déplaçant sur une droite (phase 1). Dans un second temps, le déplacement du point pilote sur une droite va modéliser l'écoulement linéaire du temps. On obtient alors une modélisation du déplacement de la cabine en fonction du temps, construite comme variable indépendante (phases 2 et 3).

La deuxième situation introduit la question des moments où la cabine est éclairée par la lumière rouge intermittente. Ce problème de coïncidence de deux phénomènes périodiques nécessite la formalisation des deux périodes comme outil de solution et fait évoluer le modèle intermédiaire construit précédemment vers un modèle fonctionnel calculable. L'analyse de cette deuxième situation n'est pas présentée (voir Nguyen Thi 2011).

## IV. D'UN MODELE « MECANIQUE » A UN MODELE « TEMPOREL »

Un préalable à la première situation est d'amorcer une genèse instrumentale[3] relative à certains outils et fonctionnalités essentielles de la géométrie dynamique, en particulier la commande « report de mesure » et le déplacement des points comme élément d'un milieu pour la validation. De même, la notion *de point piloté par un autre point* a aussi été explicitée : un point M, que l'on ne peut saisir directement à la souris et qui ne peut être déplacé que par le déplacement d'un autre point P, est dit piloté par le point P.

Nous présentons maintenant des éléments des analyses a priori et a posteriori, l'expérimentation finale ayant été réalisée au début de l'année scolaire 2010-2011. Cette expérimentation concerne 12 élèves (répartis en 6 binômes) d'une classe équivalente à la terminale française d'un lycée d'Hô Chi Minh ville.

### *1. Phase 1 : émergence de modèles mécaniques*

Les élèves ouvrent la figure Cabri ci-dessous (figure 5) et reçoivent la consigne suivante :

> Construire dans Cabri une figure géométrique représentant le manège et la cabine de Minh de façon à ce que le déplacement du point P pilote le mouvement de la cabine du manège.

[3] Le terme genèse instrumentale (Rabardel 1995) désigne le processus qui transforme un artefact (objet créé par l'homme pour assister son activité, comme par exemple la commande « report de mesure », en un instrument qui associe l'artefact à des schèmes d'usage de cet artefact dans une activité finalisée, ici l'utilisation du report de mesure pour obtenir un point M appartenant au cercle et ayant le comportement souhaité.

Dans cette première partie, il s'agit de faire entrer les élèves dans le processus de modélisation et donc de poser la question du choix des éléments de la pseudo réalité qu'il faut représenter. Nous faisons l'hypothèse que la grande roue du manège sera représentée par un cercle et la cabine par un point du cercle. Cependant, le statut du cercle changera au cours de la situation, au moment où il s'agira de représenter le déplacement de la cabine : de représentant de la roue il deviendra aussi trajectoire de la cabine. Le centre du cercle peut être choisi n'importe où dans le plan, sur la demi-droite ou pas, sauf au point P (dans la réalité, la roue ne se déplace pas). Son rayon pourra être choisi lui aussi librement, vraisemblablement de façon à ce que le cercle soit visible à l'écran.

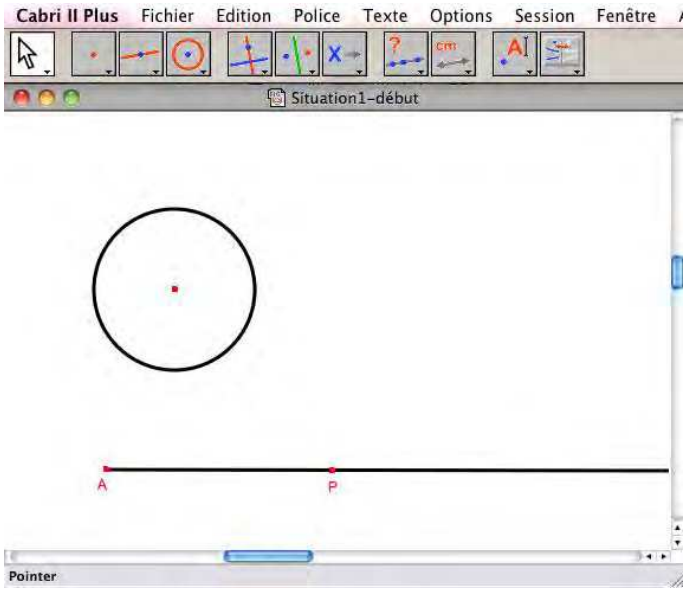



***Figure 5*** *– Figure Cabri au début de la première situation. Le point P se déplace sur la demi-droite.*

Le sol, présent sur la photo (figure 3), pourra ou non être représenté soit par la demi-droite présente à l'écran soit par un autre objet construit. La position respective du cercle et de la demi-droite donnée est elle-même libre (extérieure, tangente, sécante).

Les stratégies possibles pour qu'un point M-cabine tourne sur le cercle-roue grâce au déplacement d'un point sont de deux types. Certaines ont recours à la mesure de la distance AP, comme la stratégie « report de mesure », et d'autres n'y ont pas recours, par exemple la stratégie « stéréographique » (d'autres stratégies sont présentées dans (Soury-Lavergne 2010).

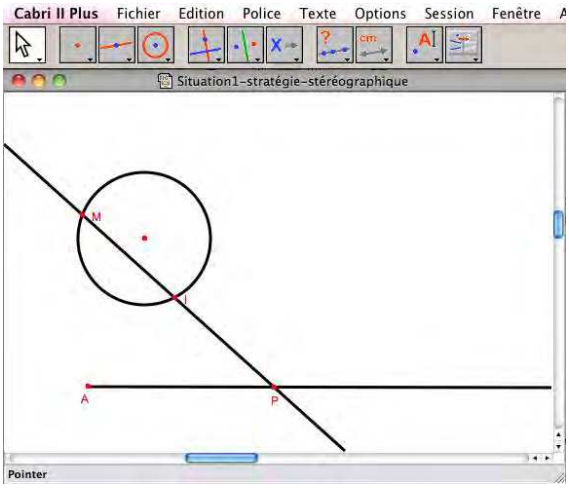



***Figure 6*** *– Modèle intermédiaire obtenu par la stratégie stéréographique.*

*Stratégie « stéréographique »* : construction d'un point fixe I sur le cercle, de la droite (PI) puis de l'intersection M de (PI) avec le cercle. Le point M ainsi construit est mobile sur le cercle et se déplace en fonction de P (figure 6).

*Stratégie « report de mesure »* : il s'agit de reporter la mesure de la distance AP sur le cercle. Pour cela, construire un point I sur le cercle, mesurer la distance AP, reporter la mesure AP sur le cercle à partir de I avec l'outil « report de mesure ».

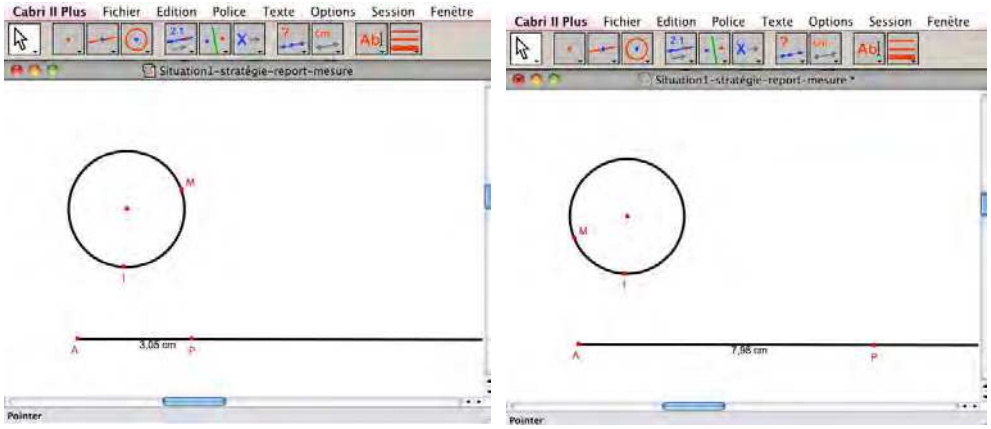



***Figure 7*** *– Deux états du modèle obtenu par la stratégie report de mesure.*

La situation organise un milieu pour la validation des modèles produits. En effet, l'analyse a priori montre que les stratégies autres que celle du report de mesure sont soit trop coûteuses, soit productrices de modèles non compatibles avec la réalité. Certains éléments du milieu permettent de rejeter ou d'accepter les différents modèles intermédiaires produits. Le comportement des modèles construits, obtenu par déplacement du point P doit être cohérent avec la réalité extramathématique du manège. Par exemple, la cabine peut faire autant de tours que l'on veut. *Le modèle obtenu avec la stratégie stéréographique ne permet ni plusieurs tours ni même un tour complet, il sera invalidé*. En revanche, le modèle obtenu par « report de mesure » est le seul qui respecte chacune des contraintes (stratégie optimale).

Un des principaux résultats issus de l'analyse a posteriori est que les six binômes commencent par la stratégie « stéréographique » qui apparaît donc comme une stratégie de base. Tous l'invalident par référence à la réalité. La stratégie « report de mesure » apparaît alors dans les stratégies de deux groupes sur six. Mais cette stratégie n'aboutit pas à cause de

difficultés instrumentales liée notamment à la nécessaire construction d'un point origine sur le cercle. Par exemple, un binôme reporte la mesure AP sur le cercle à partir d'un point qu'il nomme malencontreusement M et obtient un autre point qu'il ne nomme pas, sans doute par ce qu'il ne reconnaît pas ce point comme le représentant de la cabine. De plus, ce binôme ne valide pas sa construction (correcte) par le déplacement du point P, ce qui lui aurait permis du même coup d'identifier le point mobile représentant la cabine.

### 2. *Phase 2 : le temps discret comme variable indépendante*

Les élèves disposent d'une nouvelle figure Cabri (figure 8), dans laquelle apparaît le modèle issu du report de mesure institutionnalisé à la fin de la phase 1. Un point I « origine » a été punaisé sur le cercle, il s'agit d'un point fixe. Le sol n'est pas représenté et la demi-droite est placée à droite du cercle pour qu'il ne puisse pas y avoir confusion.

La consigne suivante leur est donnée :

A l'écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d'origine A, un point fixe I sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.

Placer sur la demi-droite [AP) le point $P_1$ correspondant à un tour de la cabine M, le point $P_2$ correspondant à 2 tours de la cabine M, le point $P_3$ correspondant à 3 tours de la cabine M.

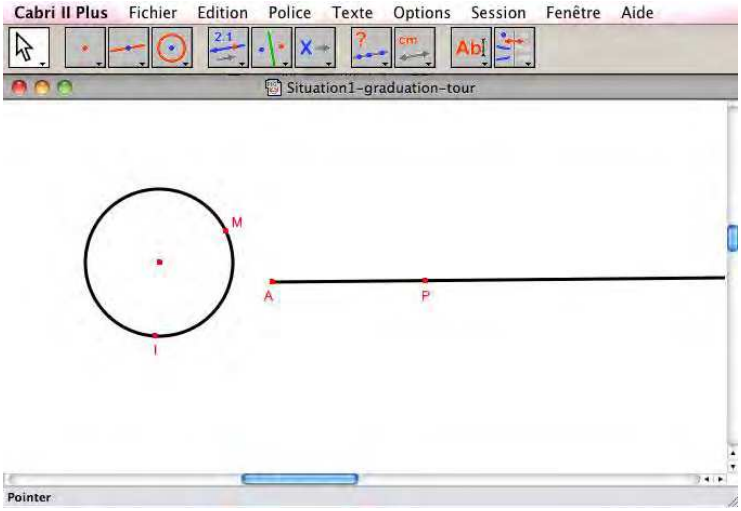



***Figure 8*** *– Modèle de la grande roue à l'ouverture de Cabri (lorsque P est en A, le point M est en I).*

La construction demandée correspond à la réalisation d'une graduation de [A,P), avec comme unité un « tour ». Avec la graduation en tours, le repérage du déplacement continu du point P devient discret. Cette unité « tour » peut être conçue comme une unité de longueur mais aussi comme un intervalle de temps, si l'on fait l'hypothèse implicite que chaque tour a la même durée (sans que le mouvement soit nécessairement uniforme). Elle conduit à une première modélisation discrète du temps qui le représente par une longueur, alors que, dans l'enseignement secondaire, que ce soit en mathématiques ou en physique, la représentation du temps est un donné préconstruit.

Les stratégies possibles pour le placement des points $P_1$, $P_2$ et $P_3$ se répartissent entre des stratégies d'ajustements perceptifs et des stratégies de construction, géométriques ou numériques. Les stratégies de construction des points $P_2$ et $P_3$ ne sont pas contraintes par la stratégie choisie pour $P_1$. Elles peuvent donc être différentes des stratégies que nous énonçons ci-dessous.

*Stratégie « ajustement perceptif »* : Positionner P en A (donc le point M est en I), puis déplacer P à partir de A sur la demi-droite [AP) pour que le point M se déplace sur le cercle

jusqu'à revenir à la position I. Construire alors un point $P_1$ sur [AP) et le faire glisser sur la demi-droite de façon à le superposer à P. Déplacer le point P pour le distinguer de $P_1$.

Cette stratégie permet de placer le point $P_1$ mais ne permet pas d'obtenir les points $P_2$ et $P_3$ sans diminuer la taille du cercle. *De plus, cette construction de $P_1$ n'est pas robuste par déplacement, en particulier si le rayon du cercle est modifié. Ainsi elle sera invalidée lors de la construction des points $P_2$ et $P_3$ à condition que la modification du cercle soit requise et possible.* Deux variables didactiques sont ainsi identifiées : la taille initiale du cercle, et la taille modifiable ou non du cercle. Dans la situation retenue, la taille du cercle est modifiable et son périmètre initial ne peut être reporté plus d'une fois à l'écran. On organise ainsi un milieu qui invalide la stratégie d'ajustement.

*Stratégie « report de mesure »* : Mesurer le périmètre du cercle, reporter à partir de I la mesure du périmètre sur [AP) avec report de mesure. Le point ainsi construit est $P_1$. Construire alors $P_2$ par symétrie de A par rapport à $P_1$, puis $P_3$ par symétrie de $P_1$ par rapport à $P_2$.

Cette stratégie est optimale. Elle produit une graduation dépendante du rayon du cercle choisi pour représenter la grande roue et reste valide lorsque le cercle change de périmètre. La modification du cercle permet d'introduire la notion de changement d'échelle, notion importante dans le processus de modélisation. En rapport avec la réalité, un changement de la taille du cercle revient à regarder le manège de plus loin ou de plus près.

Le point P variable sur un axe gradué en nombre de tours contribue ainsi à une première modélisation discrète du temps, un « temps-tour ».

De notre analyse a posteriori, il ressort que la stratégie « ajustement perceptif » est la stratégie initiale de deux binômes sur six, pour placer $P_1$. Ils essaient de marquer $P_2$ et $P_3$ de la même façon, mais le cercle disparaît de l'écran, les conduisant à changer de stratégie. Tous les binômes utilisent la commande report de mesure, mais seuls deux binômes aboutissent au modèle complet par la stratégie optimale. Trois autres binômes sont engagés dans des stratégies impliquant le report de mesure, construisent $P_1$, mais ne changent pas la taille du cercle et n'aboutissent pas à la graduation complète, vraisemblablement par faute de temps. Par exemple l'un de ces binômes anticipe : « La distance de A à $P_1$ correspond à un tour. On la mesure et la multiplie par 2 pour avoir la distance de A à $P_2$. ». Le dernier binôme reporte la mesure AP sur le cercle à partir de M, ce qui semble indiquer une incompréhension du rôle de M dans le modèle mécanique initial et de la nécessité d'une origine fixe.

A la fin de cette phase, l'enseignant institutionnalise la stratégie « report de mesure » et introduit le changement d'échelle.

### 3. *Phase 3 : passage au temps continu*

Les élèves reçoivent la consigne suivante :

> « On sait de plus qu'un tour complet de la grande roue dure 5 minutes.
>
> Placer le point U pour que quand P se déplace de A à U, M se déplace dans la première minute du voyage. »

L'introduction du numérique, par la donnée de la durée d'un voyage en minutes, conduit à la construction d'une seconde graduation de [AP). Elle correspond au temps continu mesuré en minutes, une minute correspondant à 1/5ème de la durée d'un tour en faisant l'hypothèse implicite du mouvement uniforme de la roue. La graduation discrète « temps-tour » est transformée en une graduation continue « temps-minute ».

Parmi les stratégies possibles pour le placement du point U, la stratégie d'ajustement perceptif est possible, bien que coûteuse, mais son invalidation dans la phase précédente la rend improbable. Les autres stratégies envisageables sont des divisions numériques ou géométriques qui opèrent sur le cercle ou sur le segment [$AP_1$] (quatre stratégies valides). Par effet du contrat résultant des institutionnalisations répétées du report de mesure, les stratégies numériques utilisant le report de mesure devraient être majoritaires, comme par exemple la stratégie *« diviser numériquement $AP_1$ »* : mesurer la distance $AP_1$, avec la calculatrice de Cabri diviser $AP_1$ par 5, reporter le résultat sur [AP) avec l'outil report de mesure, le point obtenu est U (voir Nguyen Thi ibid. pour plus de détails).

Pendant l'expérimentation, en quinze minutes, cinq binômes sur six sont arrivés à construire le point U, en divisant le périmètre du cercle ou la longueur $AP_1$ en 5, puis en reportant cette mesure sur la demi-droite. Le dernier binôme échoue : il reporte la mesure à partir du point mobile P et non à partir de A. Cette erreur récurrente est révélatrice d'une difficulté dans la genèse instrumentale de la commande « report de mesure » qui concerne plus généralement la nécessité d'une origine fixe pour la mesure, que ce soit dans Cabri ou ailleurs.

A la fin de cette séance, l'enseignant introduit explicitement la notion « d'axe du temps » :

> Quand P se déplace de A à U, M se déplace dans la première minute du voyage. […] On dit qu'on a construit un axe du temps en minutes.

## V. CONCLUSION

A l'issue de cette première situation, les élèves disposent d'un modèle fonctionnel de nature géométrique où le déplacement du point M représentant une cabine du manége varie sur un cercle en fonction du temps, variable indépendante. Il constitue le point de départ de la deuxième situation qui pose le problème de coïncidence entre deux phénomènes périodiques.

Ce modèle est l'aboutissement d'une succession de modèles intermédiaires :

- un premier modèle « mécanique » : un point sur une demi-droite pilote le déplacement d'un point sur le cercle.
- deux modèles « temporels » successifs : le point sur la demi-droite représente graphiquement une variable indépendante, d'abord discrète puis continue, formalisant ainsi un axe du temps gradué en minutes.

L'ingénierie vise la dévolution aux élèves de choix significatifs quant au processus de modélisation sans pour autant que cette prise en charge soit totale. En particulier, nous avons mis en place des conditions qui permettent une formalisation graphique du temps comme variable indépendante. Pour favoriser l'entrée dans le processus de modélisation, l'introduction d'informations numériques a été différée, défavorisant les stratégies de calcul au profit de modèles mécaniques issus de stratégies géométriques. L'introduction de données numériques provoque alors le passage d'un modèle temporel discret au modèle temporel continu.

Un des rôles de l'environnement de géométrie dynamique a été d'organiser un milieu pour la notion de fonction comme covariation de deux grandeurs (Falcade 2002). Ce milieu mis en place dans la première situation va permettre dans la seconde situation (non présentée ici) de prolonger le processus de modélisation vers un modèle fonctionnel de nature algébrique lié à la périodicité. Cependant la genèse instrumentale de la commande « report de mesure » a interféré dans le processus de modélisation initié dans la première situation en révélant un rapport incomplet au mesurage : la nécessité d'une origine fixe devra être problématisée dans

une reprise de l'ingénierie. Par contre, le déplacement propre à Cabri, notamment le déplacement d'un point piloté par un autre, a contribué tout au long du processus de modélisation à enrichir un milieu pour la validation des modèles intermédiaires dans leur rapport à la réalité.

## REFERENCES


Blum W., Niss M. (1991) Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to Other Subjects - State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 37-68.

Blum W. et. al. (2002) ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education - Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics* 51(1/2), 149-171.

Burgermeister P.-F. (2009) Modélisation mathématique de problèmes extramathématiques au lycée. Vers une praxéologie consistante de la modélisation. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone*, numéro spécial.

Chevallard Y. (1989) Arithmétique, algèbre, modélisation, étapes d'une recherche. *Publication de l'IREM d'Aix-Marseille*.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 73-112.

Coulange L. (1998) Les problèmes concrets à mettre en équation dans l'enseignement. *Petit x* 47, 33-58.

Euler L. (1755) *Opera Omnia ser.1*. vol. VIII. Editions A. Kazer & F. Rudio (1922).

Falcade R. (2002) L'environment Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction. *Petit x* 58, 47-81.

Hankel H. (1870) *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen.* Tübingen (Dissertation).

Krysinska M., Mercier A., Schneider M. (2009), Problème de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 29(3), 247-305.

Legrand M. (2003) Différents types de modélisation dans l'enseignement. Recueil des contributions présentées à la séance du *Comité Scientifique des IREM* le 26 novembre 2003. 34–-5.

Nguyen Thi N. (2011) *La périodicité dans les enseignements scientifiques en France et au Viêt Nam : une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier Grenoble 1 et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Rabardel P. (1995) *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

René de Cotret S. (1988) Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x* 17, 5-27.

Rodriguez R. (2007) *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S*. Thèse Université Joseph Fourier Grenoble 1.

Soury-Lavergne S. (2010) *Modélisation mathématique de phénomènes variables, dans l'enseignement, à l'aide de la géométrie dynamique*. Rapport MIRA Région Rhône-Alpes.