



HAL
open science

Sous-espaces de Mouvements Articulés ou Contraints et leurs Signatures

Bastien Jacquet, Roland Angst, Marc Pollefeys

► **To cite this version:**

Bastien Jacquet, Roland Angst, Marc Pollefeys. Sous-espaces de Mouvements Articulés ou Contraints et leurs Signatures. Reconnaissance de formes et intelligence artificielle (RFIA) 2014, Jun 2014, France. hal-00988593

HAL Id: hal-00988593

<https://hal.science/hal-00988593>

Submitted on 8 May 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sous-espaces de Mouvements Articulés ou Contraints et leurs Signatures

Bastien Jacquet¹

Roland Angst¹²

Marc Pollefeys¹

¹ ETH Zürich, Suisse
{bjacquet,marc.pollefeys}@inf.ethz.ch

² Stanford University, CA, USA
rangst@stanford.edu

Résumé

Les objets articulés ou à trajectoires contraintes représentent une grande part des objets de notre quotidien. La détection automatique de ces restrictions de mouvement entre objets et l'extraction des paramètres correspondant est donc importante, p. ex. pour augmenter une reconstruction 3D statique avec des paramètres dynamiques tels qu'axes de rotation, ou directions possibles de translation de certains objets. C'est pourquoi nous présentons ici une nouvelle théorie pour analyser le déplacement relatif de deux objets à trajectoire contrainte. L'analyse est basée sur les sous-espaces linéaires engendrés par les matrices relatives de déplacement. De plus, nous définissons une signature qui caractérise complètement la catégorie de contraintes encodée dans ces déplacements relatifs. Ce cadre théorique montre de nouvelles propriétés algébriques, comme la contrainte de bas-rang pour deux rotations consécutives autour de deux axes fixes. Enfin, pour chaque catégorie de contraintes prédite par la signature, cet article montre comment calculer tous les paramètres des contraintes par des manipulations simples d'algèbre linéaire. Notre approche est validée sur plusieurs jeux de données réelles, comme, parmi d'autre, un tableau roulant rotatif ou une roue roulant sur le sol.

Mots Clef

sous-espace de mouvement, analyse de mouvement 3D, intersection de sous espace.

1 Introduction

Les techniques de Structure à partir du Mouvement (SfM) dans un cadre rigide sont désormais matures et obtiennent des reconstructions 3D convaincantes et fidèles, et on sait capturer des modèles 3D en intérieur grâce à des capteurs de profondeur bon marché. Malheureusement, les techniques sus-mentionnées perdent les objets ou parties d'objets mobiles et leurs relations dynamiques : elles reconstruisent uniquement les différents objets ou scènes rigides et immobile, attachés et inclus au fond statique. Pourtant l'observation de mouvements articulés - ou contraints d'une quelconque manière - informe énormément sur les relations entre les objets et plus encore sur le type d'objet que cela peut être. Dans cet article, nous nous concentrons sur de tels mouvements et l'objectif principal est de détecter automatiquement le type d'articulation ou de contraintes entre deux objets pour en extraire toutes les caractéristiques pertinentes. La figure Fig. 1 montre un exemple d'extraction automatique des paramètres caractérisant un pneu roulant sur le sol.

Pour parvenir à ce but, nous analysons les transformation rigides relatives entre deux objets. Notons que l'obtention de ces transformation n'est pas l'objectif principal de ces travaux, elles peuvent être obtenues par des méthodes exist-

Abstract

Articulated objects represent an important class of objects in our everyday environment. Automatic detection of the type of articulated or otherwise restricted motion and extraction of the corresponding motion parameters are therefore of high value, p. ex. in order to augment an otherwise static 3D reconstruction with dynamic semantics, such as rotation axes and allowable translation directions for certain rigid parts or objects. Hence, in this paper, a novel theory to analyse relative transformations between two motion-restricted parts will be presented. The analysis is based on linear subspaces spanned by relative transformations. Moreover, a signature for relative transformations will be introduced which uniquely specifies the type of restricted motion encoded in these relative transformations. This theoretic framework enables the derivation of novel algebraic constraints, such as low-rank constraints for subsequent rotations around two fixed axes for example. Lastly, given the type of restricted motion as predicted by the signature, the paper shows how to extract all the motion parameters with matrix manipulations from linear algebra. Our theory is verified on several real data sets, such as a rotating blackboard or a wheel rolling on the floor amongst others.

Keywords

motion subspace, 3D motion analysis, subspace intersection.

tantes : alignement (ICP) de nuage de points scannés, ou SfM traditionnel purement basé sur des images, comme ici. Cet article montrera que les transformations relatives peuvent être arrangées en une unique *matrice du mouvement* qui contient toute l'information pour déterminer quel type de contrainte est présente et aussi pour extraire les caractéristiques pertinentes du mouvement.

Contribution : Notre contribution principale est l'introduction d'une dénommée *signature* pour les déplacements relatifs de deux objets. Cette signature est une fonction de la *matrice du mouvement* qui est entièrement définie en considérant les transformations relatives observées comme des échantillons d'un sous-espace vectoriel. La *signature* décrit de manière unique le type de mouvement contraint, et les différentes signatures représentent un large catalogue de mouvements contraints qui relient chaque types de mouvement avec les contraintes algébriques satisfaites par celui-ci. En plus d'établir les propriétés de cette *signature*, nous montrons aussi comment tout les paramètres du mouvement contraint peuvent être calculés simplement comme solutions d'équations linéaires. Au delà de reprendre les cas déjà étudiés de mouvements articulés (comme les rotation autour d'un point ou axe fixe), nos calculs établissent un cadre unifié qui couvre avec exactement les mêmes outils de nouveaux types de mouvement contraints, tels le

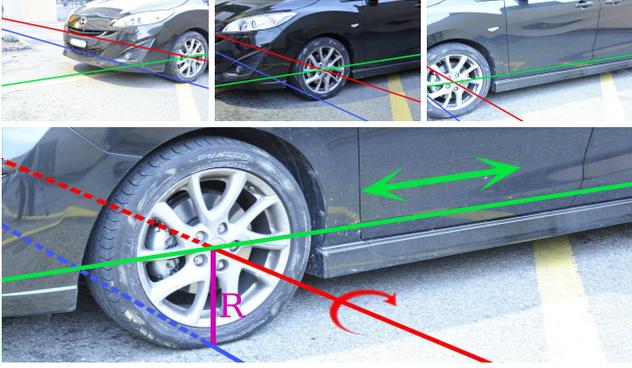


FIGURE 1 – Le cadre présenté ici permet l'extraction automatique de l'axe de rotation (en rouge) et de la direction de translation (en vert) à partir des transformations rigides du pneu roulant sur la route. De plus, le rayon de la roue (en violet) et la ligne de contact avec le sol (en bleu) peuvent aussi être inférés.

mouvement de rotation autour de deux axes fixes ne s'intersectant pas ou autour d'un axe d'orientation fixe mais se translatant (roue). Comme nous verront dans les expériences, ces nouveaux types de mouvement contraints sont en pratique très pertinents car très répandus et utiles. Notons que dans les cas où chaque objet ne peut pas être directement observé (p. ex. à cause d'occultations), le mouvement observé peut être une composition complexe de mouvements individuels simples. Point exceptionnel de notre analyse, notre méthode permet de détecter et décomposer une telle séquence dans le cas par exemple de deux rotations consécutives suivies d'une translation planaire, permettant de conjecturer précisément le mouvement de parties intermédiaires.

2 Travaux antérieurs

Nous discutons surtout les travaux antérieurs sur les mouvements articulés et la représentation de sous-espace pour le SfM car notre méthode est basée sur ces travaux. Nous renvoyons à [10, 1] et leurs références pour le cas général du SfM rigide.

L'analyse de mouvements articulés a été un sujet actif depuis plusieurs années, motivée en vision par ordinateur et en infographie par l'approximation du mouvement humain [14, 6, 21, 16], tandis qu'en robotique la force directrice fut d'apprendre aux robots à interagir avec l'environnement humain [12, 17]. Plus précisément, O'Brien *et al.* [14] mesurèrent les transformations relatives entre parties articulées avec un système de capture de mouvement magnétique. Imaginons deux parties tournant autour d'un point fixe et commun de rotation, ce point est fixe pour la transformation relative et peut être déterminé linéairement. Cette observation est en fait le concept récurrent majeur de la plupart des travaux précédents qui diffèrent cependant dans les méthodes pour adapter un modèle aux observations. Par exemple, le travail récent de Chang et Zwicker [4] propose de minimiser une énergie pour aligner les cartes de profondeur d'objets articulés. En reconstruction 3D non rigide ou articulé à partir de trajectoires de points, Paladini *et al.* [15] ont proposé un algorithme d'optimisation non convexe avec projection sur la variété de Stiefel pour assurer des matrices de camera valides. Le travail de Fayad *et al.* [8] pose le problème du SfM articulé avec des correspondances de points comme une optimisation discrète-continue qu'ils optimisent en alternant graph-cut discret et optimisation continue. Plaçant de même la reconstruction de trajectoires articulés comme un problème d'optimisation non linéaire et non convexe,

Ross *et al.* [16] introduisent un modèle graphique probabiliste pour ces mouvements articulés. La formulation de Sturm *et al.* [17], basée sur la sélection de modèle est une des quelques approches qui considèrent aussi les liaisons translation 1D. Cependant, les mouvements contraints plus complexes, comme la succession rotation puis translation, ne sont pas abordés. Notons que, contrairement à l'approche algébrique de notre travail, ces approches insistent sur l'optimisation d'une fonction objectif ad-hoc, au lieu de considérer les contraintes algébriques impliquées par ces mouvements restreints.

Contrairement à notre analyse des transformations relative, plusieurs approches récentes sont basées sur des contraintes d'intersection de sous-espaces [19, 21, 7, 5]. Dans ces approches, chaque partie articulée est associée au sous-espace 4D engendré par les trajectoires des points suivis [18] de cette partie. Comme montré dans [19, 21], l'intersection des sous-espaces de trajectoires utilise là encore l'hypothèse d'un point de liaison, fixe relativement aux deux parties. Notons que les mêmes intersections de sous-espaces peuvent être utilisées pour faire de la segmentation de mouvement [20]. Bien que cela mène à des contraintes efficaces pour des mouvements simples autour d'un point fixe unique, nous présentons, dans les sections suivantes, une formulation algébrique pour l'analyse des mouvements relatifs entre objets qui va clairement au delà de l'état de l'art actuel et démontrons ainsi de nouvelles contraintes algébriques apparaissant pour des mouvements contraints plus complexes et néanmoins répandus. La représentation vectorisée des transformations relatives que nous introduisons est aussi reliée aux travaux récents autour du SfM rigide par factorisation [2, 3]. Cette suite de travaux a établi la relation entre les sous-espaces de trajectoires observés dans les images et les sous-espace engendrés par les transformations rigides.

3 Notations

La séquence d'entiers de 1 à F est notée $[F] = \{1, \dots, F\}$. La concaténation de vecteurs lignes ou colonnes de même dimension en une matrice est notée avec une flèche \Downarrow_f , c.-à.-d. $[\Downarrow_f \mathbf{t}_f^T]$ est la matrice résultant de la concaténation des vecteurs $(\mathbf{t}_f)_{f \in [F]}$ comme lignes d'une matrice. L'indexation de Matlab est utilisée pour dénoter des sous-blocs d'une matrice, p. ex. $M_{:,1:9}$ dénote les 9 premières colonnes de la matrice M . Une base du complément orthogonal des colonnes de \mathbf{A} est noté $[\mathbf{A}]_{\perp}$, c.-à.-d. $\mathbf{A}^T [\mathbf{A}]_{\perp} = \mathbf{0}$. L'espace vectoriel engendré par les colonnes d'une matrice \mathbf{M} est noté $\text{Vect}(\mathbf{M})$. La vectorisation d'une matrice \mathbf{A} est notée $\text{vec}(\mathbf{A})$. Cette opération concatène les colonnes de \mathbf{A} en dessous les une des autres en un seul vecteur colonnes. La représentation des rotations en notation axe-angle sera très importante au sein de notre analyse. Concrètement, la matrice de rotation autour de l'axe \mathbf{a} d'un angle α s'écrit ainsi (formule de Rodrigues) :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha} = \cos \alpha \mathbf{I}_3 + (1 - \cos \alpha) \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \sin \alpha [\mathbf{a}]_{\times}, \quad (1)$$

où $[\mathbf{a}]_{\times}$ dénote la matrice de produit vectoriel, c.-à.-d. $[\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{b}$ est le produit vectoriel entre les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} .

4 Sous-espace de déplacements

En tant qu'élément de SE_3 , le groupe des isométries directes de \mathbb{R}^3 , une transformation rigide à l'image $f \in [F]$

$$\mathcal{T}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_f & \mathbf{t}_f \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Type de contrainte	Signature	Formule des transformations relatives \mathcal{T}_f avec $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{3 \times d}$
Translation à d -dimensions pure	$(0, d)$	$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{T}\tilde{\mathbf{t}}_f \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$
Rotation autour d'un axe et translation à d dimensions	$(2, d)$	$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{a}, \alpha_f} & \mathbf{t} - \mathbf{R}_{\mathbf{a}, \alpha_f} \mathbf{t} + \mathbf{T}\tilde{\mathbf{t}}_f \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$
Rotations autour de deux axes et translation à d dimensions	$(8, d)$	$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{b}, \beta_f} & \mathbf{t}_b + \mathbf{T}\tilde{\mathbf{t}}_f \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{t}_b + \mathbf{t}_a \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{a}, \alpha_f} & -\mathbf{t}_a \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$
Rotations arbitraires et translation à d dimensions	$(9, d)$	$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_f & \mathbf{t} - \mathbf{R}_f \mathbf{t} + \mathbf{T}\tilde{\mathbf{t}}_f \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$

TABLE 1 – Liste de signatures possibles : La dimension d de la translation dynamique $\mathbf{T}\tilde{\mathbf{t}}_f$ peut être zéro. Les rotations autour de deux axes s'intersectant sont décrite en choisissant $\mathbf{t}_b = \mathbf{t}_a$. Notons que les axes \mathbf{a} et \mathbf{b} ne sont pas nécessairement orthogonaux.

a 3 degrés de liberté non-linéaires et 3 linéaires. Ce groupe des isométries directes est lui même absolument non linéaire, mais on peut s'intéresser au sous-espace vectoriel engendré par SE_3 dans l'espace *linéaire* de plus grande dimension \mathbb{R}^{16} . Nous allons voir que cela rend l'analyse de mouvements contraints particulièrement simple. Ainsi, les transformations rigides seront considérées comme points dans \mathbb{R}^{13} , c.-à.-d. $(\text{vec}(\mathbf{R}_f)^T, \mathbf{t}_f^T, 1)$ et F transformations rigides engendrent un sous-espace affine 12D de \mathbb{R}^F qui est engendré par les colonnes de la matrice

$$\left[\downarrow_f \left(\text{vec}(\mathbf{R}_f)^T, \mathbf{t}_f^T, 1 \right) \right]. \quad (3)$$

Cette représentation des mouvements rigides comme sous-espaces affine de \mathbb{R}^F est déjà apparue dans [2] dont le défi principal était de trouver la matrice dans Eq. (3) avec un algorithme de factorisation, c.-à.-d. il s'agissait de SfM basé sur la factorisation des données de trajectoire des points. En revanche, ce travail-ci analyse les mouvements contraints et considère que les transformations entre deux parties \mathcal{T}_f pour chaque image $f \in [F]$ sont fournies. L'objectif est ensuite d'extraire tous les aspects du mouvement contraint en analysant la structure des sous-espaces de la matrice dans Eq. (3). Ces aspects incluent de déterminer le type d'articulation ou de mouvement contraint et tous les paramètres y afférant, p. ex. l'orientation et la localisation des axes de rotation entre autres choses. Une telle analyse est en fait simplifiée en considérant $\mathcal{T}_f - \mathbf{I}_4$ au lieu de \mathcal{T}_f car ainsi le '1 homogène' disparaît et cela permet de raisonner à propos de sous-espaces 12D *linéaires* de \mathbb{R}^F . Notons que $\mathcal{T}_f - \mathbf{I}_4$ est connu en physique du solide comme le tenseur des déformations d'une partie par rapport à l'autre, linéaire dans notre cas rigide. Ainsi, chaque transformation rigide sera associée à un vecteur $(\text{vec}(\mathbf{R}_f - \mathbf{I}_3)^T, \mathbf{t}_f^T) \in \mathbb{R}^{12}$ et F mouvements rigides généraux engendreront donc un sous-espace de \mathbb{R}^F à 12 dimensions, engendré par les colonnes de la *matrice du mouvement*

$$\mathbf{M} = \left[\downarrow_f \left(\text{vec}(\mathbf{R}_f - \mathbf{I}_3)^T, \mathbf{t}_f^T \right) \right] \in \mathbb{R}^{F \times 12}. \quad (4)$$

5 Signatures d'un mouvement

L'observation majeure est que des mouvements contraints n'engendrent généralement pas tout l'espace 12D susmentionné. En effet, nous montrerons dans la suite que chaque type de mouvement donne lieu à une structure de sous-espace de faible dimension spécifique, qui permet de distinguer entre ces mouvements simplement en considérant la matrice \mathbf{M} . Plus concrètement, nous proposons un couple d'entiers nommé *signature* pour caractériser cette structure de sous-espace de faible dimension d'un mouvement contraint. Cette signature est définie comme une fonction de la matrice \mathbf{M} de la manière suivante $\text{sig}(\mathbf{M}) = (\text{Rang}(\mathbf{M}_{:,1:9}), \text{Rang}(\mathbf{M}) - \text{Rang}(\mathbf{M}_{:,1:9}))$.

La signature $\text{sig}(\mathbf{M})$ détermine de manière univoque le type de mouvement encodé dans \mathbf{M} (voir la liste dans Tab. 1). Le premier entier de $\text{sig}(\mathbf{M}) = (r, d)$ détermine entièrement le nombre d'axes de rotation fixes impliqués dans le mouvement tandis que le second spécifie la dimension d du sous-espace dans lequel l'objet se translate au cours du temps. La Sec. 7 expliquera plus précisément ce que nous entendons par translation pour un mouvement contraint. La Tab. 1 résume les résultats de l'analyse, en se basant sur notre cadre unifié, pour des mouvements articulés ou juste contraints alors que la Tab. 2 montre plusieurs exemples intuitifs d'instances particulières de tels mouvements gérés par notre approche. De plus, une fois que la signature est calculée et le type de mouvement ainsi déterminé, tous les aspects du mouvement peuvent être extraits en analysant finement la structure du noyau de \mathbf{M} (voir Sec. 8).

Il sera important de différencier deux sous-espaces déterminés par \mathbf{M} : d'une part le sous-espace translationnel engendré par les colonnes de la partie translationnelle $\mathbf{M}_{:,10:12}$ et, d'autre part, le sous-espace rotationnel engendré par la partie rotationnelle de la matrice du mouvement $\mathbf{M}_{:,1:9}$. Notons que le second entier de la signature encode la dimension d du sous-espace translationnel qui n'est pas déjà contenu dans le sous-espace rotationnel. Il n'est pas évident de comprendre pourquoi le sous-espace translationnel induit par les rotations est entièrement contenu dans le sous-espace rotationnel en l'absence de translation dynamique, c.-à.-d. quand $d = 0$. Et cela est spécialement surprenant pour le cas de rotations autour de deux axes fixes. Nous allons justement en expliquer la raison dans la section suivante. Tout d'abord, en Sec. 6, les translations dynamiques (c.-à.-d. variant au cours du temps) seront ignorées, c'est-à-dire $d = 0$ et après avoir ainsi amené la formulation adéquate, nous traiterons le cas $d \neq 0$ dans la Sec. 7. Le cas trivial des translations pures ($r = 0$) n'est pas détaillé.

6 Articulations sans translation

Dans cette partie, la signature de rotations autour d'un, deux ou trois axes fixes sera calculée dans l'hypothèse où l'articulation ne se translate pas, c.-à.-d. $d = 0$. Plus spécifiquement, nous calculerons les deux entiers de la signature pour chaque type de mouvement contraint. Pour faire cela, nous procéderons en deux étapes : d'abord, la dimension du sous-espace rotationnel $\text{Vect}(\mathbf{M}_{:,1:9})$ sera obtenue ; ensuite, nous montrerons que le sous-espace translationnel $\text{Vect}(\mathbf{M}_{:,10:12})$ est entièrement contenu à l'intérieur du sous-espace rotationnel, la signature de forme $(r, 0)$ encodant exactement cette propriété. En prévision des articulations avec translations, en Sec. 7, cette propriété sera montré en exhibant une matrice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{9 \times 3}$ telle que

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{F \times 3}. \quad (5)$$

Exemple	Description	Signature	Contraintes additionnelles
	Mouvement planaire, c.-à.-d. objet rigide translaté dans un plan orthogonal à son axe de rotation.	(2, 2)	Axe de rotation et direction de translation sont orthogonaux.
	Un pneu roulant au sol : le pneu tourne autour d'un axe d'orientation fixe mais se translatant perpendiculairement à son orientation.	(2, 1)	Axe de rotation et direction de translation sont orthogonaux. Angle de rotation α_f et longueur de translation $\tilde{\mathbf{t}}_f$ linéairement liés.
	Un tableau rotatif sur roues : le support subit un mouvement planaire, tandis que le tableau lui-même tourne autour d'un axe parallèle au sol.	(8, 2)	Axes de rotations s'intersectant, et orthogonaux, c.-à.-d. $\mathbf{t}_a = \mathbf{t}_b$, $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0$.

TABLE 2 – Exemples de mouvement contraints illustrant la formulation présentée.

6.1 Rotations autour d'un axe

Une rotation autour d'un axe \mathbf{a} , localisé en un point \mathbf{t} d'un angle α_f variant selon l'image, s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_f & \mathbf{t}_f \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} & \mathbf{t} - \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

ce qui peut être compris comme amener l'origine du système de coordonnées sur l'axe pour ensuite appliquer la rotation et enfin retourner au système de coordonnées originel. L'observation de la représentation axe-angle

$$\mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} - \mathbf{I}_3 = (1 - \cos \alpha_f)(\mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mathbf{I}_3) + \sin \alpha_f [\mathbf{a}]_{\times} \quad (7)$$

montre que le sous-espace rotationnel est seulement de dimension 2. Il est engendré par les colonnes de $[\downarrow_f (1 - \cos \alpha_f, \sin \alpha_f)] \in \mathbb{R}^{F \times 2}$ puisque

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{:,1:9} &= [\downarrow_f \text{vec}(\mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} - \mathbf{I}_3)]^T \\ &= [\downarrow_f (1 - \cos \alpha_f, \sin \alpha_f)] \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{a}\mathbf{a}^T - \mathbf{I}_3) \\ \text{vec}([\mathbf{a}]_{\times})^T \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (8)$$

Cela explique le premier entier de la signature dans le cas d'une rotation autour d'un axe.

Il reste à montrer que la partie translationnelle due à la rotation est entièrement incluse dans ce sous-espace rotationnel. Or, par choix de \mathbf{t} sur l'axe de la rotation et donc point fixe, on a

$$[\mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} - \mathbf{I}_3, \quad \mathbf{t} - \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} \mathbf{t}] \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

et l'application d'une propriété du produit de Kronecker¹ donne l'équation $\mathbf{M}[\mathbf{X}^T, \mathbf{I}_3]^T = \mathbf{0}_{F \times 3}$ avec $\mathbf{X} = \mathbf{t} \otimes \mathbf{I}_3$. Ceci montre en particulier que le sous-espace translationnel $\text{Vect}(\mathbf{M}_{:,10:12})$ est une combinaison linéaire du sous-espace rotationnel $\text{Vect}(\mathbf{M}_{:,1:9})$ et est donc entièrement inclus dans ce dernier.

6.2 Rotations autour de deux axes

L'application séquentielle de rotations autour de deux axes fixes \mathbf{a} localisé en \mathbf{t}_a et \mathbf{b} localisé en \mathbf{t}_b , qui ne s'intersectent pas nécessairement, s'écrit ainsi :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_f & \mathbf{t}_f \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{b},\beta_f} & \mathbf{t}_b - \mathbf{R}_{\mathbf{b},\beta_f} \mathbf{t}_b \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} & \mathbf{t}_a - \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} \mathbf{t}_a \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Comme \mathbf{a} et \mathbf{b} sont vecteurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f}$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{b},\beta_f}$ respectivement,

$$\forall f \in F, \quad \mathbf{b}^T \mathbf{R}_{\mathbf{b},\beta_f} \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} \mathbf{a} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} \quad \text{est constant.} \quad (10)$$

Donc $\mathbf{M}_{:,1:9}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{0}_{F \times 1}$, ce qui montre que dans ce cas le rang est au plus 8. En utilisant la représentation angle-axes, on montre facilement que ce rang est exactement 8.

1. Pour toute matrice de dimension compatible, on a : $\text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{B}) = [\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A}] \text{vec}(\mathbf{Y})$.

Pour ce cas, $\mathbf{t}_f = \mathbf{t}_b + \mathbf{R}_{\mathbf{b},\beta_f}(-\mathbf{t}_b + \mathbf{t}_a - \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} \mathbf{t}_a)$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{:,10:12} &= [\downarrow_f - \text{vec}(\mathbf{R}_{\mathbf{b},\beta_f} - \mathbf{I}_3)]^T [\mathbf{t}_b \otimes \mathbf{I}_3] \\ &\quad - \text{vec}(\mathbf{R}_{\mathbf{b},\beta_f}(\mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} - \mathbf{I}_3))^T [\mathbf{t}_a \otimes \mathbf{I}_3]. \end{aligned} \quad (11)$$

On peut aisément montrer (p. ex. en insérant la représentation angle-axes pour chaque rotation)

que, à la fois $\text{Vect}([\downarrow_f - \text{vec}(\mathbf{R}_{\mathbf{b},\beta_f} - \mathbf{I}_3)]^T)$ et

$\text{Vect}([\downarrow_f - \text{vec}(\mathbf{R}_{\mathbf{b},\beta_f}(\mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} - \mathbf{I}_3))^T])$ sont inclus

dans $\text{Vect}(\mathbf{M}_{:,1:9})$. En conclusion, il existe ici aussi une matrice \mathbf{X} telle que Eq. (5) soit vérifiée. Nous renvoyons au matériel supplémentaire pour les calculs détaillés et la formule explicite pour \mathbf{X} , car on ne gagne aucune compréhension par les manipulations d'algèbre nécessaires.

6.3 Rotations autour de trois axes

Nous faisons maintenant l'hypothèse d'une articulation rotule, c.-à.-d. les trois axes s'intersectent en un seul point \mathbf{t} . Les rotations successives autour de trois axes fixes en position générale engendrent évidemment toutes les rotations possibles. Le sous-espace rotationnel est donc à 9 dimensions. De plus, comme \mathbf{t} est toujours point fixe, les mêmes calculs qu'en Sec. 6.1 montrent que Eq. (5) est valide avec $\mathbf{X} = \mathbf{t} \otimes \mathbf{I}_3$.

7 Articulations avec translation

La prise en compte des translations dynamiques $\hat{\mathbf{t}}_f$ dans le mouvement restreint entre deux objets mène à des formules légèrement plus complexes. Par exemple, la rotation autour d'un axe pouvant se translater au cours du temps est modélisée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_f & \mathbf{t}_f \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \hat{\mathbf{t}}_f \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} & \mathbf{t} - \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Faisons l'hypothèse que la translation dynamique $\hat{\mathbf{t}}_f$ est restreinte à un espace à d dimensions, c.-à.-d. $\hat{\mathbf{t}}_f = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{t}}_f$ avec $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{3 \times d}$. Étant données les transformations relatives $[\mathbf{R}_f, \mathbf{t}_f]$, nous voulons extraire non seulement les paramètres de rotation (p. ex. axes de rotation et leur positions) mais aussi le sous-espace de dimension réduite engendré par les translations, c.-à.-d. $\text{Vect}(\mathbf{T})$.

Revenons à l'exemple précédent et notons que, ni $\mathbf{t} + \hat{\mathbf{t}}_f - \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} \mathbf{t}$ ni les translations des transformations relatives inverses $-\mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f}^T(\mathbf{t} + \hat{\mathbf{t}}_f) + \mathbf{t}$ ne sont de dimension réduite, bien que $\hat{\mathbf{t}}_f$ puissent l'être. Si l'on connaissait la position \mathbf{t} de l'articulation, on pourrait appliquer un changement de coordonnées plaçant l'origine en \mathbf{t} . Dès lors, \mathbf{t} serait égal à zéro et la dimension réduite de $\text{Vect}(\hat{\mathbf{t}}_f)$ se lirait dans $\text{Vect}(\mathbf{t}_f)$. Cependant, la position de l'articulation est

a priori inconnue, mais on peut néanmoins reformuler les translations à l'aide de $[\mathbf{R}_f - \mathbf{I}_3] \mathbf{t} + \mathbf{t}_f = \hat{\mathbf{t}}_f$.

Si $\hat{\mathbf{t}}_f = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{t}}_f$ avec $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{3 \times d}$, on a

$$[\Rightarrow_f [\mathbf{R}_f - \mathbf{I}_3] \mathbf{t} + \mathbf{t}_f] = [\Rightarrow_f \hat{\mathbf{t}}_f] = \mathbf{T} [\Rightarrow_f \tilde{\mathbf{t}}_f]. \quad (13)$$

Une façon de résoudre ce problème de rang réduit est d'utiliser les contraintes des sous-déterminants, polynomiales en les coefficients de \mathbf{T} . Cela mène à des équations polynomiales tri-variées de degré $d + 1$. Résoudre un tel système d'équations multivariées est un problème délicat, c'est pourquoi nous évitons ici ce problème en prolongeant la formule obtenue Eq. (5). Cela a le bénéfice supplémentaire de fournir un seul et unique cadre unifié pour tous les cas listés en Tab. 1. Comme on le voit dans Eq. (12), les translations dynamiques $\hat{\mathbf{t}}_f$ sont simplement ajoutées comme un décalage aux translations qui existerait sans ces translations dynamiques. Ainsi, en utilisant les matrices $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{9 \times 3}$ obtenues en Sec. 6, on voit que

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = [\Downarrow_f \hat{\mathbf{t}}_f^T] = [\Downarrow_f \tilde{\mathbf{t}}_f^T] \mathbf{T}^T. \quad (14)$$

La composante des translations $\mathbf{M}_{:,10:12}$ qui est linéairement indépendante de la partie rotationnelle $\mathbf{M}_{:,1:9}$ est donc entièrement due à la translation dynamique. Donc, le second entier de la signature vaut d car les translations dynamique sont restreintes à un sous-espace à d dimensions. En conclusion, comme la matrice \mathbf{T} est constante au cours du temps, on obtient l'équation suivante qui sera cruciale pour l'extraction des paramètres du mouvement (voir Sec. 8.2)

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} [\mathbf{T}]_{\perp} = [\Downarrow_f \tilde{\mathbf{t}}_f^T] \mathbf{T}^T [\mathbf{T}]_{\perp} = \mathbf{0}_{F \times 3-d}. \quad (15)$$

Remarque : Translations planaires et translations le long d'une ligne sont des concepts relatifs. En pratique, considérer les transformations relatives inverses \mathcal{T}_f^{-1} peut ne pas révéler la structure à peu de dimensions de $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{3 \times d}$ contenue dans les translations, alors que \mathcal{T}_f le révélerait. Ainsi, pour être en sécurité, les deux ensembles de transformations doivent être analysés.

8 Extraction des paramètres

Ayant montré que la signature renvoie de manière unique le type de contrainte du mouvement, on peut choisir une méthode appropriée d'extraction des paramètres en fonction de la signature de la matrice du mouvement \mathbf{M} . Dans la suite, nous décrivons brièvement comment ces paramètres peuvent être extraits en résolvant simplement quelques systèmes linéaires.

8.1 Axes de rotation et Angles

Si la signature indique une rotation autour d'un axe fixe (c.-à.-d. si le premier entier vaut 2), on résout le système linéaire $\mathbf{M}_{:,1:9} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{I}_3) = \mathbf{0}_{F \times 3}$ pour obtenir l'axe \mathbf{a} . Cela se base sur le fait que l'axe \mathbf{a} est vecteur propre avec valeur propre 1 de chaque $\mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f}$.

La méthode pour les rotations autour de deux axes de directions fixes se base sur l'Eq. (10), c.-à.-d. le fait que $\mathbf{b}^T \mathbf{R}_{\mathbf{b},\beta_f} \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} \mathbf{a} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$ est indépendant de f . Ainsi, le seul vecteur annulant $\mathbf{M}_{:,1:9}$ à droite est de forme $\mathbf{n} = \text{vec}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$. Donc, si la signature prédit des rotations autour de deux axes fixes (c.-à.-d. premier entier égal à 8), le noyau unidimensionnel $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^9$ de $\mathbf{M}_{:,1:9}$ est d'abord calculé, puis réarrangé en une matrice $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, et enfin la décomposition de rang 1 de cette matrice réarrangée \mathbf{N}

révèle les deux axes $\mathbf{N} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T$. L'extraction des angles se base sur Eq. (1) qui permet d'écrire pour tout vecteur \mathbf{c}

$$\mathbf{a}^T [\mathbf{c}]_{\times} \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha} \mathbf{c} = \sin \alpha (1 - (\mathbf{c}^T \mathbf{a})^2) \quad (16)$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha} \mathbf{c} = \cos \alpha (1 - (\mathbf{c}^T \mathbf{a})^2) + (\mathbf{c}^T \mathbf{a})^2. \quad (17)$$

Pour l'extraction des α_f dans le cas à un seul axe, Eq. (16) et Eq. (17) donnent directement $\cos \alpha_f$ et $\sin \alpha_f$ respectivement en choisissant \mathbf{c} orthogonal à \mathbf{a} .

Pour les cas à deux axes, \mathbf{c} est choisi égal à \mathbf{a} puis \mathbf{b} , ce qui donne, observant $\mathbf{R}_f = \mathbf{R}_{\mathbf{b},\beta_f} \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f}$:

$$\mathbf{b}^T \mathbf{R}_f \mathbf{b} = \cos \alpha_f (1 - (\mathbf{b}^T \mathbf{a})^2) + (\mathbf{b}^T \mathbf{a})^2 \quad (18)$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{R}_f \mathbf{a} = \cos \beta_f (1 - (\mathbf{a}^T \mathbf{b})^2) + (\mathbf{a}^T \mathbf{b})^2 \quad (19)$$

$$\mathbf{b}^T [\mathbf{a}]_{\times} \mathbf{R}_f \mathbf{a} = \sin \beta_f (1 - (\mathbf{a}^T \mathbf{b})^2) \quad (20)$$

$$\mathbf{a}^T [\mathbf{b}]_{\times} \mathbf{R}_f^T \mathbf{b} = -\sin \alpha_f (1 - (\mathbf{b}^T \mathbf{a})^2), \quad (21)$$

d'où α_f et β_f peuvent être facilement calculés.

8.2 Translations

L'extraction des paramètres de translation est basée sur nos calculs en Sec. 7. Tout particulièrement l'Eq. (15) est importante puisqu'elle permet de récupérer une base \mathbf{T} pour les translations dynamiques en analysant le noyau de \mathbf{M} . Dans les détails, nous calculons le noyau \mathbf{N} de \mathbf{M} , c.-à.-d. $\mathbf{M}\mathbf{N} = \mathbf{0}$, p. ex. par décomposition en valeurs singulières de \mathbf{M} . Ensuite l'espace vectoriel engendré par les colonnes de \mathbf{N} restreintes à leurs trois dernières coordonnées encode une base du complément orthogonal $[\mathbf{T}]_{\perp}$, c.-à.-d. $\text{Vect}(\mathbf{N}_{10:12,:}) = \text{Vect}([\mathbf{T}]_{\perp})$. Ce complément orthogonal détermine complètement le sous-espace de translation dynamique. Notons que la dimension du noyau de \mathbf{M} peut être plus grande que la dimension $3 - d$ du complément orthogonal $[\mathbf{T}]_{\perp}$ puisque la partie rotationnelle $\mathbf{M}_{:,1:9}$ peut ne pas être de rang plein. Cependant, la partie du noyau due à la partie rotationnelle n'interfère pas avec les trois dernières lignes de \mathbf{N} , entièrement déterminées par $[\mathbf{T}]_{\perp}$. Toutefois, le noyau dû à la partie rotationnelle seul pourrait être éliminé en calculant une décomposition en valeurs singulières réduite (révélant le rang) de $\mathbf{M}_{:,1:9} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ et en calculant ensuite le noyau $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{12 \times 3-d}$ de $[\mathbf{U}, \mathbf{M}_{:,10:12}]$ dont la dimension égalera alors celle de $\text{Vect}([\mathbf{T}]_{\perp})$. Un fois \mathbf{T} connu, la décomposition des translations observées \mathbf{t}_f en parties plus significatives se réduit à un système linéaire d'équations. Par exemple, les translations observées en tournant autour de deux axes valent

$$\mathbf{t}_f = \mathbf{t}_b + \mathbf{R}_{\mathbf{b},\beta_f} (-\mathbf{t}_b + \mathbf{t}_a - \mathbf{R}_{\mathbf{a},\alpha_f} \mathbf{t}_a) + \mathbf{T} \tilde{\mathbf{t}}_f, \quad (22)$$

ce qui est linéaire en nos inconnues \mathbf{t}_a , \mathbf{t}_b , et $\tilde{\mathbf{t}}_f$. Avec suffisamment d'observations, ces inconnues peuvent être calculées aux moindres carrés, par exemple. En fait, comme \mathbf{t}_a et \mathbf{t}_b sont seulement définis à une translation près le long de \mathbf{a} et \mathbf{b} , respectivement, la position des axes peut être paramétrée par $\mathbf{t}_a = [\mathbf{a}]_{\perp} \tilde{\mathbf{t}}_a$ et $\mathbf{t}_b = [\mathbf{b}]_{\perp} \tilde{\mathbf{t}}_b$.

Notons que dans certains cas, la position de l'axe de rotation n'est pas bien définie. En particulier, la position \mathbf{t}_a d'un axe \mathbf{a} n'est pas définie de manière unique si $\mathbf{a}^T \mathbf{T} = \mathbf{0}$ et $d = 2$ puisque dans ce cas, un déplacement de l'axe est absorbé par la translation dynamique $\mathbf{T} \tilde{\mathbf{t}}_f$. La classe importante des mouvements planaires tombe dans cette catégorie. Cependant de tels cas ne posent aucuns problèmes à notre algorithme, la matrice du système linéaire résultant ayant simplement un noyau bidimensionnel.

9 Validation expérimentale

Puisque notre méthode est entièrement basée sur les mouvements relatifs de deux objets, expliquons d'abord comment nous obtenons ceux-ci en utilisant uniquement les



FIGURE 2 – Exemple de calcul de l'axe de rotation \mathbf{a} de l'écran d'un ordinateur portable. Voir Sec. 9.1.

données images. Comme dit en introduction, toute méthode extrayant ces mouvements peut aussi bien être utilisée. Nous sommes partis du SfM rigide de [10] avec des appareils photo intrinsèquement calibrés. Des points caractéristiques sont extraits et mis en correspondance entre images et un RANSAC [9] extrait les transformations rigides à partir des relations entre deux et trois vues. Dans le cas d'une caméra statique qui observe un objet subissant un mouvement contraint (expérience en Sec. 9.2 et Sec. 9.3), la caméra agit en fait comme la deuxième partie, nous donnant directement le déplacement de l'objet. Dans le cas d'une caméra mobile (expérience en Sec. 9.1), une reconstruction 3D initiale est obtenue de deux vues ou plus avec les objets immobiles, fixant aussi l'ambiguïté d'échelle entre objets. Un RANSAC 3-points séquentiel extrait ensuite toutes les transformations rigides avec un support suffisant entre ce modèle 3D initial et chaque nouvelle vue. Les transformations obtenues sont séparées en deux groupes selon les distances entre les points supportant ces transformations.

L'estimation robuste du rang en présence de bruit est un problème en soi, pour ces travaux, de bons résultats ont été obtenus en utilisant simplement le nombre de valeurs singulières supérieures à un seuil σ , avec $\sigma = 1/40$ pour tous nos jeux d'essais.

9.1 Charnière

Une séquence de 23 images de l'ouverture de l'écran d'un ordinateur ont été prises avec une caméra mobile. Des points ont été suivis à la fois sur l'écran et sur la partie clavier. Le mouvement correspond à une rotation autour d'un axe fixe, et la signature vaut effectivement $(2, 0)$. Ce type d'articulation a déjà été beaucoup étudié et nous voulons juste souligner que notre cadre général s'applique ici sans problème. Malgré la caméra mobile, nous calculons précisément l'orientation \mathbf{a} et la position \mathbf{t} de l'axe de rotation avec notre méthode (voir Fig. 2). Les paramètres du mouvement extraits peuvent être utilisés pour créer ou interpoler des configurations nouvelles non observées.

9.2 Mouvement planaire plus rotation selon deux axes

Pour ce jeu de données, une caméra fixe pris 27 images d'un tableau roulant rotatif. Des points ont été mis en correspondance exclusivement sur la partie noire du tableau. Ces points subissent un mouvement complexe puisque le support est sur roulettes et peut donc tourner et se translater au sol selon un mouvement planaire. De plus, la partie noire peut être tournée selon un axe horizontal, donnant une signature $(8, 2)$ que les approches existantes ne pouvaient pas gérer. Notre méthode extrait avec succès les deux axes de rotations \mathbf{a} et \mathbf{b} et le sous-espace à 2 dimensions de translation $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$. Comme une partie du mouvement est planaire, la position \mathbf{t}_b de \mathbf{b} est indéfinie (ici arbitrairement visualisé au barycentre des points extraits). Notons bien que ce n'est pas un défaut de notre méthode mais bien une ambiguïté intrinsèque des mouvements planaires. Comme vu en Fig. 3, la position \mathbf{t}_a du premier axe \mathbf{a} est correctement calculée. En outre, bien que nous n'ayons pas forcé l'orthogonalité des axes (ni $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0$, ni $\mathbf{b}^T \mathbf{T} = \mathbf{0}^T$), les angles trouvés, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 90.0345^\circ$ et $\angle(\mathbf{b}, [\mathbf{T}]_{\perp}) = 0.0510^\circ$, sont des indicateurs clairs de

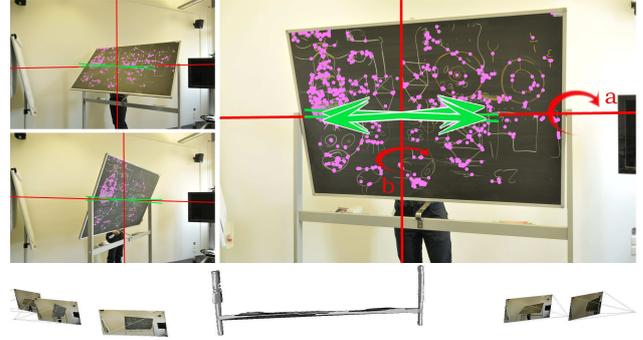


FIGURE 3 – Haut : Les deux axes de rotation extraits, \mathbf{a} suivie par une rotation planaire, sont affichés en rouge et les directions de translation \mathbf{T} (parallèles au sol) en vert. Bas : Reconstruction par la silhouette du support, voir Sec. 9.2.

la précision de nos estimations. En application supplémentaire, une fois les deux rotations démêlées, nous pouvons artificiellement former le mouvement d'une partie intermédiaire virtuelle, ne subissant pas $\mathbf{R}_{\mathbf{a}, \alpha_f}$, c.-à.-d. dans notre cas sans la rotation selon l'axe horizontal. Ce mouvement décomposé intermédiaire, non observé mais "halluciné", ajouté à des images de silhouette obtenue par suppression du fond permettent de reconstruire l'enveloppe visuelle du support, comme montré en Fig. 3. Notez bien qu'aucun point n'ont été suivi sur ce support et que sa forme est uniquement déduite des silhouettes et du mouvement intermédiaire calculé.

9.3 Rotation puis translation 1D

Ce jeu de données contient une roue de voiture roulant en ligne droite. Des points du pneu sont mis en correspondance entre 21 images prises par une caméra statique. Bien que ce mouvement ait des similarités avec la charnière, la translation dynamique 1D entraîne une signature $(2, 1)$ qui rend ce mouvement contraint non trivial. La Fig. 1 en montre les paramètres du mouvement extraits.

Avec les angles α_f et translations $\mathbf{T}_{\tilde{t}_f}$ extraits, on peut vérifier l'existence d'une relation linéaire $\tilde{t}_f = \alpha_f R$ qui nous donne le rayon R de la roue, s'il n'y a pas eu glissement, et qui permet de visualiser la ligne de contact avec la route, contenant les points fixes de ce mouvement.

10 Conclusions et futurs travaux

Dans cet article, nous avons analysé les mouvements relatifs de deux objets non indépendants. Les transformations relatives vectorisées forment la matrice du mouvement dont on a défini la signature, caractérisant exactement le type de mouvement contraint. Ajouté à une analyse attentive de la structure du noyau de cette matrice du mouvement, nous avons introduit un cadre analytique général pour les mouvements articulés ou contraints entre deux objets. Ce cadre analytique est appliqué avec succès à plusieurs jeux de données non triviaux, mettant en évidence la gestion unifiée des mouvements articulés connus comme de nouveaux mouvements contraints.

Nous souhaitons aussi explorer la sélection robuste de modèles et le calcul robuste de rang pour la matrice du mouvement pour permettre la correction d'erreur de SfM, spécialement dans les cas quasi-dégénérés ou ambigus.

Remerciements

Ces travaux ont été financés par la Bourse ERC "4DVideo" N. 210806 et par la Fondation Suisse Nationale pour la Science comme projet N. 143422.

R. Angst est récipiendaire de la *Google Europe Fellowship in Computer Vision*, et ces travaux sont en partie financés par cette bourse.

Références

- [1] S. Agarwal, N. Snavely, I. Simon, S. M. Seitz, and R. Szeliski. Building rome in a day. In *ICCV*, 2009.
- [2] R. Angst and M. Pollefeys. Static multi-camera factorization using rigid motion. In *ICCV*, 2009.
- [3] R. Angst and M. Pollefeys. 5d motion subspaces for planar motions. In *ECCV*, 2010.
- [4] W. Chang and M. Zwicker. Global registration of dynamic range scans for articulated model reconstruction. *ACM Transactions on Graphics*, 2011.
- [5] N. da Silva and J. Costeira. Subspace segmentation with outliers : A grassmannian approach to the maximum consensus subspace. In *CVPR*, 2008.
- [6] E. de Aguiar, C. Theobalt, and H.-P. Seidel. Automatic learning of articulated skeletons from 3d marker trajectories. In *ISVC*, 2006.
- [7] E. Elhamifar and R. Vidal. Sparse subspace clustering : Algorithm, theory, and applications. *CoRR*, abs/1203.1005, 2012.
- [8] J. Fayad, C. Russell, and L. de Agapito. Automated articulated structure and 3d shape recovery from point correspondences. In *ICCV*, 2011.
- [9] M. A. Fischler and R. C. Bolles. Random sample consensus : A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, pages 381–395, 1981.
- [10] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge University Press, 2004.
- [11] B. Jacquet, R. Angst, and M. Pollefeys. Articulated and restricted motion subspaces and their signatures : Supplemental material. In *CVPR*, 2013.
- [12] D. Katz and O. Brock. Interactive segmentation of articulated objects in 3d. In *Workshop on Mobile Manipulation at ICRA*, 2011.
- [13] A. G. Kirk, J. F. O’Brien, and D. A. Forsyth. Skeletal parameter estimation from optical motion capture data. In *CVPR*, 2005.
- [14] J. F. O’Brien, R. E. Bodenheimer, G. J. Brostow, and J. K. Hodgins. Automatic joint parameter estimation from magnetic motion capture data. In *Graphics Interface*. Canadian Human-Computer Communications Society, 2000.
- [15] M. Paladini, A. D. Bue, J. M. F. Xavier, L. de Agapito, M. Stosic, and M. Dodig. Optimal metric projections for deformable and articulated structure-from-motion. *IJCV*, 2012.
- [16] D. A. Ross, D. Tarlow, and R. S. Zemel. Learning articulated structure and motion. *IJCV*, 2010.
- [17] J. Sturm, C. Stachniss, and W. Burgard. A probabilistic framework for learning kinematic models of articulated objects. *J. Artif. Intell. Res. (JAIR)*, 2011.
- [18] C. Tomasi and T. Kanade. Shape and motion from image streams under orthography : a factorization method. *IJCV*, 1992.
- [19] P. A. Tresadern and I. D. Reid. Articulated structure from motion by factorization. In *CVPR*, 2005.
- [20] R. Tron and R. Vidal. A benchmark for the comparison of 3-d motion segmentation algorithms. In *CVPR*, 2007.
- [21] J. Yan and M. Pollefeys. A factorization-based approach for articulated nonrigid shape, motion and kinematic chain recovery from video. *IEEE TPAMI*, 2008.