



**HAL**  
open science

## Simplexité et probabilités subjectives

Pierre Bessière

► **To cite this version:**

Pierre Bessière. Simplexité et probabilités subjectives. Alain Berthoz et Jean-Luc Petit. COMPLEXITÉ-SIMPLEXITÉ, Collège de France, pp.125 - 130, 2014, 9782722603301. hal-00986576

**HAL Id: hal-00986576**

**<https://hal.science/hal-00986576>**

Submitted on 5 Jun 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Simplexité et probabilités subjectives

Pierre Bessière

CNRS – LPPA – Collège de France

11, place Marcelin Berthelot

75005 Paris

Pierre.Bessiere@College-de-France.fr

## *Logique, probabilité et simplexité<sup>1</sup>*

En deçà du langage et de toute activité intellectuelle verbalisable, existe l'immense domaine cognitif de la sensori-motricité. Jusqu'à quel point agir et percevoir supposent-ils de « comprendre » ou même plus simplement de se « représenter » le monde ? Telle est l'une des préoccupations fondamentales des recherches sur la sensori-motricité. Question élémentaire dont les échos, pourtant, résonnent depuis bien longtemps entre diverses disciplines des sciences cognitives : philosophie, logique, linguistique, éthologie, neurosciences, psychologie, intelligence artificielle ou robotique.

La « représentation » par des systèmes formels calculable fondé sur la logique est dominante et a rencontré un fabuleux succès au cours des 2 derniers siècles en tant que paradigme de la modélisation scientifique et computationnelle. Ce paradigme est actuellement contesté par la proposition que les probabilités subjectives, vu comme une extension de la logique, puissent être mieux adaptées à « l'appréhension » par un système sensori-moteur de son interaction avec le monde. Ce paradigme émergent de l'action, la perception, la décision, l'inférence et l'apprentissage apporte-t-il de la simplexité à la cognition sensori-motrice ?

---

<sup>1</sup> Une partie de ce chapitre est un résumé des articles [Bessiere et al., 1999a & 1999b] parus dans *Intellectica*.

## *Formalisation logique*<sup>2</sup>

Concevoir la théorie formelle logique d'un certain phénomène consiste à produire un système de manipulation de signes obéissant à des règles purement syntaxiques et dont le comportement présente des analogies intéressantes avec le phénomène étudié. Un tel système de manipulation de signes est appelé *système formel*. L'analogie entre le système de manipulation de signes et le phénomène est donnée par une *interprétation* qui met en relation les signes utilisés et les objets et ensemble d'objets étudiés. Nous appellerons dans la suite cette approche « F+I » (Formalisation + Interprétation).

La caractéristique la plus fondamentale et la plus intéressante des *systèmes formels* est qu'ils peuvent exister et fonctionner par eux-mêmes, indépendamment du phénomène qu'ils sont censés représenter. On peut produire de manière systématique, à partir de suites de signes et à partir de règles syntaxiques, de nouvelles suites de signes. Point besoin pour cela d'attacher aucune espèce de signification à aucun des signes. Point besoin de savoir de quoi on parle pour pouvoir en parler avec certitude ! Cette caractéristique permet d'assurer qu'en donnant le même système formel à deux mathématiciens (ou à deux machines), ils (elles) seront capables de produire les mêmes suites de signes. Voilà qui assure ce qu'on appelle communément la rigueur d'une théorie. Voilà mise en pratique et en équation l'ambition aristotélicienne et leibnizienne de la *lingua rationalis*<sup>3</sup> afin de voir inéluctablement se mettre d'accord les différents « raisonneurs » partant des mêmes prémisses.

On peut envisager de produire et d'étudier des systèmes purement formels en dehors de toute analogie avec une quelconque autre réalité. Cependant, l'intérêt de ce « jeu » syntaxique n'est pleinement révélé que par la donnée d'une *interprétation*, quand les objets et ensemble d'objets étudiés peuvent être dénotés par des signes, les règles de manipulation de signes mises en correspondance avec des opérations sur ces objets et ces classes, et les chaînes de signes produites interprétées en terme de prédictions (ou d'explications) sur le comportement

---

<sup>2</sup> Un livre introductif au problème de la formalisation est [Hofstadter, 1979], un livre de référence sur les fondements épistémologique est [Piaget, 1967] et un ouvrage de référence mathématique est [kleene, 1967]. Pour une introduction à la notion et aux difficultés rencontrées avec la notion d'interprétation on pourra se référer à [Apostel, 1967a et 1967b], [Searle, 1981] et [Harnad, 1989 et 1990]. Des références beaucoup plus complètes peuvent être trouvées dans [Bessière et al., 1999a]

<sup>3</sup> voir [Knecht, 1981]

du phénomène étudié. Alors, et alors seulement, nous aurons une théorie formelle de notre phénomène.

L'*interprétation* est une notion mathématique bien définie. Elle peut même être, elle-même, formalisée comme le prouvent les travaux de Tarski et Carnap sur la sémantique extensionnelle et la théorie des modèles. Une *interprétation* est définie par :

- l'ensemble des objets du phénomène modélisé appelé domaine de discours  $\delta$  ;
- une application de C (l'ensemble des symboles de constante du système formel) dans  $\delta$ , qui associe à chaque symbole de constante un objet de  $\delta$  ;
- une application de P (ensemble des symboles de prédicat du système formel) dans l'ensemble des relations sur  $\delta$  (classes d'objets) qui associe à chaque symbole de prédicat n-aire une relation n-aire sur  $\delta$ .

La notion d'*interprétation* suppose donc l'existence d'un domaine de discours  $\delta$ . L'existence de ce domaine de discours postule implicitement que le phénomène modélisé ait une structure ensembliste et que cette structure soit « accessible » aux « utilisateurs » du système formel. Il faut, en effet, que ces utilisateurs puissent définir rigoureusement (mathématiquement) les objets de  $\delta$ , les ensembles d'objets de  $\delta$  et les ensembles d'ensembles d'objets de  $\delta$  (une relation n-aire est un ensemble d'ensembles à n éléments d'objets de  $\delta$ ). De façon duale<sup>4</sup>, il faut que ces utilisateurs puissent définir des valeurs de vérité pour toute relation entre éléments de  $\delta$  correspondant à un prédicat défini dans le système formel. S'ils ont cette capacité, alors, les utilisateurs du système formel pourront se servir de sa mécanique syntaxique pour démontrer des « théorèmes » qui seront, sans doute, pour eux interprétables comme des « vérités » dans le domaine de discours et pour le phénomène modélisé.

L'opération consistant, pour chaque utilisateur du système formel, à « projeter » sur le phénomène cette structure ensembliste est appelée *catégorisation*.

Si l'interprétation est une notion mathématique parfaitement définie, la *catégorisation*, elle, est une notion cognitive qui prend en compte nécessairement les capacités perceptives,

---

<sup>4</sup> Cette dualité est à mettre en parallèle avec celle entre « Théorie des modèles » et « Théorie de la démonstration » [Kleene67].

intellectuelles et motrices de l'utilisateur considéré. Adopter cette définition de l'interprétation, et notamment le concept de domaine de discours, c'est admettre que cette catégorisation soit possible. Non seulement qu'elle soit possible, mais qu'elle puisse être mise en œuvre avec toute la rigueur nécessaire, afin de définir mathématiquement les limites des ensembles correspondant aux symboles de constantes et de prédicats du système formel.

Le célèbre tableau de Magritte « Ceci n'est pas une pipe » montre la difficulté à répondre à une question en apparence simple : qu'est ce qu'une pipe ? En fait la difficulté de répondre provient de ce que la question même est ambiguë. Elle n'a guère de sens en soi : c'est le contexte qui lui donne un sens. « Ceci » n'est certainement pas une pipe si vous voulez la fumer, mais que répondrez-vous si on vous la montre en vous demandant ce que c'est ? Si une pipe est brisée en deux, pourrez-vous la fumer ? Certainement pas, serait-elle moins « pipe » pour autant ? En combien de morceaux faudrait-il qu'elle soit brisée pour perdre sa qualité de pipe ? Les magnifiques et brûlants narguilés qu'on vous propose dans les ruelles d'Istanbul, sont-ils des pipes ? Sans doute, si vous ressentez une nécessité de fumer. Certainement pas s'il s'agit d'en ranger un dans votre poche. En définitive, il est impossible à un être sensori-moteur de rester constant quant à son propre jugement de ce qu'est une pipe.

L'ensemble des pipes n'est pas clairement défini. « Ceci n'est pas une pipe » va donc nous entraîner très loin en remettant en cause les fondements même de la formalisation, à savoir la capacité à catégoriser. En effet, le concept d'appartenance à un ensemble est parfaitement dual de la notion de vérité. Il y a toujours équivalence entre la vérité d'une proposition et la définition d'un certain ensemble. Munir un phénomène d'une structure ensembliste revient à établir la vérité (ou la fausseté) des propositions correspondantes. Finalement, ce que nous remettons en cause, c'est qu'il soit possible pour des êtres sensori-moteurs de parler et d'accéder à des vérités objectives indépendantes de leurs connaissances préalables et de leurs états sensori-moteur et mental.

## *Formalisation probabiliste*<sup>5</sup>

La formalisation probabiliste d'un phénomène suppose elle aussi l'utilisation d'un système formel de manipulation de signes. Par contre, le lien entre ce système formel et le phénomène n'est pas donné par une interprétation mais par une *description* qui met directement en relation les signes utilisés et les valeurs des variables sensori-motrices qui couplent le modèle au phénomène. Nous appellerons dans la suite cette approche « F+D » (Formalisation + Description) par analogie avec l'approche F+I précédemment décrite, elle est le plus souvent désignée dans la littérature par le qualificatif de « probabilités subjectives ».

Une *description* est, elle aussi, une notion mathématique bien définie par :

- Un ensemble de connaissances préalables  $\pi$  résumant les connaissances du sujet :
  - o L'ensemble des variables appelé espace des phases  $\phi$ ;
  - o Une décomposition ( $\psi$ ) explicitant la distribution de probabilité jointe sur toutes les variables en un produit de distributions plus simples ;
  - o Un ensemble ( $\gamma$ ) de formes paramétriques, une pour chacune des distributions apparaissant dans la décomposition ;
- Un ensemble ( $\theta$ ) de valeurs pour les paramètres apparaissant dans ces formes paramétriques généralement obtenus par apprentissage.

Dans l'approche F+I les signes manipulés par le système formel sont des symboles correspondant à des objets et classes d'objets de l'environnement.

Dans l'approche F+D les symboles manipulés ne sont plus associés à aucun référent distal mais uniquement aux valeurs des variables proximales. Les signes utilisés sont les valeurs des variables sensorielles, motrices et internes du système sensori-moteur considéré. Lorsque il interagit de manière pertinente avec son environnement toutes ces variables ne sont pas indépendantes, certaines varient de manières étroitement corrélées.

Par exemple, lorsqu'on fume une pipe, les sensations olfactives, tactiles, kinesthésiques et visuelles ne sont pas quelconques. Odeur du tabac, chaleur, poids de la pipe et fumée forment

---

<sup>5</sup> Un livre de référence sur les probabilités subjectives est [Jaynes, 2003], des références classiques peuvent être trouvées dans [Bessière et al., 1999a], des exemples d'applications dans [Bessière et al., 2008] et une présentation formelle ainsi que de nombreuses références bibliographiques récentes dans [Bessière et al., 2012]

un tout perceptif cohérent. La perception des unes rend probable celle des autres. Que l'une manque ou diffère, révèle en général un fait important. Les signes manipulés par le système formel, c'est-à-dire les valeurs de ces différentes variables, ne sont pas des symboles : ils n'ont, pris isolément, aucune contrepartie dans l'environnement, aucune valeur distale. Aucune des informations transmises par le nez, la main, le bras ou la rétine, n'est en soit significative. Pas plus que la couleur d'un pixel sur une rétine n'a de signification et ne permet de se faire une idée quelconque de l'image. C'est l'ensemble des interdépendances entre ces variables qui est caractéristique et que nous avons baptisé « *description* ». La connaissance des valeurs de certaines d'entre elles permet de prédire les valeurs probables des autres. Lorsqu'on saisit une pipe qui fume, on s'attend à la sensation de chaleur. Ceci s'applique aussi bien aux variables motrices qu'aux variables sensorielles. Si l'on tient une pipe allumée, il est probable que les prochains ordres envoyés au bras soient pour la porter à la bouche. « Être pipe ou ne pas être pipe ? », telle n'est plus la question. Seule reste la question de savoir quelles actions peuvent être prises étant donné la situation considérée.

L'approche F+D tranche le nœud gordien de la catégorisation. Elle ne manipule pas de symbole référant aux objets et aux classes d'une hypothétique réalité supposée objective. Elle manipule uniquement des valeurs de variables, dont la contrepartie est proximale : un courant électrique dans un capteur ou un actionneur de robot, une activité neuronale dans une zone du CNS<sup>6</sup>.

L'analogie pertinente pour l'approche F+I est celle de la langue. L'analogie pertinente pour l'approche F+D est celle de l'image. L'environnement n'est pas appréhendé par des mots, forcément réducteurs, sinon caricaturaux, mais par les descriptions, de véritables « images » où les probabilités tiennent lieu de « niveaux de gris ». L'inférence n'est pas une manipulation linguistique contraignante, mais peut être vue comme l'application d'un ensemble de filtres et d'opérateurs de composition permettant de combiner directement les unes avec les autres ces différentes « images mentales » probabilistes.

---

<sup>6</sup> Central Nervous System

## *Probabilités subjectives et simplicité*

Le paragraphe final du livre d'Alain Berthoz<sup>7</sup> sur la simplicité est le suivant : «La simplicité est une façon de *vivre avec son monde*. Elle est élégance plutôt que sobriété, intelligence plutôt que logique froide, subtilité plutôt que rigueur, diplomatie plutôt qu'autorité. La simplicité est florentine, elle *anticipe* plutôt qu'elle réagit, elle impose *ses lois et ses grilles d'interprétation*, elle est *tolérante*. Elle est *adaptative* plutôt que normative ou prescriptive, *probabiliste* plutôt que déterministe. Elle *tient compte du corps ému* autant que de la conscience claire, elle tient compte du *contexte*. La simplicité est *intentionnelle*, elle respecte l'énergie, mais, parfois, en consomme. Elle tient compte du temps *vécu*, elle *part du sujet*, elle permet le *changement de point de vue*, la création, elle autorise la tolérance qui est opinion maîtrisée. Voilà en somme, ce qu'est la simplicité pour moi ; au lecteur de juger.»<sup>8</sup>

Les probabilités subjectives sont un modèle du raisonnement rationnel, une alternative et une extension de la logique, qui semble remplir un certain nombre des caractéristiques simples énumérées ci-dessus. Les probabilités subjectives, comme leur nom l'indique, *partent du sujet*. Le choix des variables ( $\phi$ ), de la décomposition ( $\psi$ ) et des formes paramétriques ( $\gamma$ ) est central et organise le point de vue du sujet sur le monde. Changer ces connaissances préalables ( $\pi$ ) c'est *changer de point de vue*. Les outils formels existent pour combiner, mettre en concurrence, sélectionner parmi différents points de vue afin de parvenir à une décision plus éclairée. Pour un système sensori-moteur utilisant l'approche F+D, le sujet *vit avec son monde et tient compte de son corps ému* car ses raisonnements sont étroitement couplés avec l'environnement par les valeurs des variables sensorielles et motrices et avec ses proprioceptions par les valeurs des variables d'état. Il impose à la réalité *ses lois et ses grilles d'interprétation* par le biais des décompositions ( $\psi$ ) et des formes paramétriques ( $\gamma$ ) qu'il utilise mais reste *tolérant* à de larges variations autour de ces lois par l'usage des probabilités. Ses raisonnements sont *intentionnels* car organisés par des questions<sup>9</sup> probabilistes adressées à la description. Ces questions tiennent compte du contexte et souvent, organisées autour de filtres temporels, tiennent compte du *vécu* et *anticipent* les évolutions futures. Enfin,

---

<sup>7</sup> Voir [Berthoz, 2009]

<sup>8</sup> Les italiques ne sont pas dans le texte d'origine.

<sup>9</sup> Pour la définition formelle d'une question probabiliste voir [Bessière et al., 2012]

l'apprentissage par l'identification des paramètres ( $\theta$ ) est au cœur du fonctionnement de l'approche F+D et lui confère son caractère *adaptatif*.

Ne pas vouloir démontrer, ne pas chercher la vérité, relaxer cette trop exigeante quête d'absolu, c'est peut être là qu'est la clef de la simplicité. C'est peut être cette voie qu'ont suivit les systèmes cognitifs sensori-moteurs. Le projet scientifique d'élaborer une théorie de la simplicité fondée sur les probabilités subjectives est, en tous cas, assez prometteur pour mériter d'être suivi.

Apostel Léo ; (1967a) ; Syntaxe, sémantique et pragmatique dans *Logique et connaissance scientifique* ; Encyclopédie de la Pléiade ; Editions Gallimard ; Paris, France

Apostel Léo ; (1967b) ; Logique et dialectique dans *Logique et connaissance scientifique* ; Encyclopédie de la Pléiade ; Editions Gallimard ; Paris, France

Berthoz A. ; (2009) ; *La simplicité* ; Editions Odile Jacob, Paris, France

Bessière, P., Dedieu, E., Lebeltel, O., Mazer, E. & Mekhnacha, K.; (1999a) ; Interprétation ou description (I) : Proposition pour une théorie probabiliste des systèmes cognitifs sensori-moteurs ; *Intellectica* ; Vol. 26-27, pp. 257-311

Bessière, P., Dedieu, E., Lebeltel, O., Mazer, E. & Mekhnacha, K. ; (1999b) ; Interprétation ou description (II) : Fondements mathématiques de l'approche F+D ; *Intellectica*; Vol. 26-27, pp. 313-336

Bessière, P., Laugier, C. and Siegwart, R., editors ; (2008) ; *Probabilistic Reasoning and Decision Making in Sensory-Motor Systems* ; Springer Verlag, volume 46 of STAR collection.

Bessière, P., Mazer, E., Ahuacztin, J-M. & Mekhnacha, K. ; (2012) ; *Bayesian Programming* ; Taylor & Francis, in press.

Harnad S. ; (1989) ; Mind, Machines and Searle ; *Journal of theoretical and experimental artificial intelligence* ; 1: 5-25

Harnad S. ; (1990) ; The symbol grounding problem ; *Physica D*, 42 : 335-346 ; 1990

Hofstadter Douglas ; (1979) ; *Gödel, Escher, Bach : an Eternal Golden Braid* ; Basic Books Inc ; New York, U.S.A. ou *Gödel, Escher, Bach : les Brins d'une Guirlande Eternelle* ; InterEditions ; Paris, France ; 1985

Jaynes E. T. ; (2009) ; *Probability Theory: the Logic of Science* ; Cambridge University Press, Cambridge, Grande-Bretagne

Kleene Stephen C. ; (1967) ; *Mathematical Logic* ; John Wiley & sons ; New York, USA ; ou *Logique mathématique* ; Armand Colin ; Paris, France ; 1971

Knecht Herbert H. ; (1981) ; *La logique chez Leibniz : Essai sur le rationalisme baroque* ; Dialectica, Lausanne, Suisse

Piaget Jean (sous la direction de) ; (1967) ; *Logique et connaissance scientifique* ; Encyclopédie de la Pléiade ; Editions Gallimard ; Paris, France