HAL
open science

Recherche d'arbres couvrants complètement indépendants dans des graphes réguliers

Nicolas Gastineau, Benoit Darties, Olivier Togni

To cite this version:

Nicolas Gastineau, Benoit Darties, Olivier Togni. Recherche d'arbres couvrants complètement indépendants dans des graphes réguliers. ALGOTEL 2014 – 16èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications, Jun 2014, Le Bois-Plage-en-Ré, France. pp.1–4. hal-00986223

HAL Id: hal-00986223

https://hal.science/hal-00986223v1

Submitted on 1 May 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Recherche d'arbres couvrants complètement indépendants dans des graphes réguliers

Nicolas Gastineau[1 2], Benoît Darties[1] and Olivier Togni[1]

[1] *LE2I, UMR CNRS 6306, Université de Bourgogne, 9 Rue Alain Savary, 21 000 Dijon, France*
[2] *LIRIS, UMR CNRS 5205, Université Claude Bernard Lyon 1, Villeurbanne, France*

Nous étudions l'existence de r arbres couvrants complètement indépendants dans des graphes $2r$-réguliers et $2r$-connexes, et énonçons des conditions nécessaires à leur existence. Nous déterminons le nombre maximum d'arbres dans les produits cartésiens d'une clique et d'un cycle. Nous montrons que ce nombre n'est pas toujours r.

1 Introduction

Les arbres couvrants sont une structure fortement utilisée dans de nombreuses opérations réseau (protocoles de routage, mécanismes d'évitement de boucles de niveau 2, ...). La notion d'*arbres couvrants complètement indépendants* (CIST- *Completely Independent Spanning Trees*) a été introduite par T. Hasunuma [1] en complément aux travaux antérieurs sur les arbres couvrants indépendants, et trouve de nombreuses applications dans des problèmes de répartition de charge du trafic de diffusion ou encore de robustesse face aux pannes. Soit G un graphe non orienté représentant un réseau avec $V(G)$ l'ensemble de ses nœuds et $E(G)$ celui de ses liens directs. Deux chemins P_1 et P_2 entre deux sommets x et y dans G sont dits *sommets-disjoints* ssi ils ne partagent aucun sommet entre eux, exception faite de leurs extrémités, i.e. $V(P_1) \cap V(P_2) = \{x,y\}$. Soit un ensemble $T_1,\ldots,T_r$ de $r \geq 2$ arbres couvrants de G, on note $E(T_i)$ les liens de T_i et $P_{T_i}(x,y)$ l'unique chemin reliant x à y dans T_i, pour tout $i|1 \leq i \leq r$ et tout $x,y \in V(G)$. Alors les arbres de cet ensemble sont dits *complètement indépendants* ssi pour tout $i|1 \leq i \leq r$, et tout $j|1 \leq j \leq r$ avec $i \neq j$, les deux conditions suivantes sont réunies :

— T_i et T_j ne partagent aucune arête en commun (cad. $E(T_i) \cap E(T_j) = \emptyset$) ;
— pour tout $x,y \in V(G)$, les chemins $P_{T_i}(x,y)$ et $P_{T_j}(x,y)$ dans T_i et T_j sont sommet-disjoints.

Une définition équivalente [1] veut que $T_1,\ldots,T_r$ soit un ensemble de r arbres couvrants complètement indépendants ssi aucun arbre ne partage d'arête commune, et que tout nœud interne de l'un soit feuille dans les $r-1$ autres. Les arbres couvrants complètement indépendants ont été étudiés pour certaines classes de graphes, comme les graphes représentatifs des arêtes de graphes[1], les graphes planaires maximaux [2], très récemment sur les produits cartésiens de deux cycles ou grilles toriques [3], ainsi que les graphes complets, les graphes complets bipartis et tripartis [4]. Le problème de décision consistant à déterminer l'existence de deux CIST sur un graphe G est NP-Complet [2].

Nous nous intéressons à l'existence de r CIST sur les graphes k-réguliers (tous les sommets ont le même degré k). Il a été conjecturé que pour tout graphe $2r$-connexe, il existe r CIST[2]. Un contre-exemple donné dans [5] réfute cette conjecture, mais n'est pas un graphe régulier. Nous proposons d'étudier cette conjecture pour les graphes $2r$-connexes et $2r$-réguliers. Dans la suite, nous présentons d'abord les conditions nécessaires à l'existence de r CIST sur les graphes $2r$-réguliers. Nous déterminons ensuite une classe de graphes à la fois $2r$-réguliers et $2r$-connexes pour lesquels il n'existe pas toujours r CIST. Nous étendons enfin nos résultats et résolvons le problème du nombre maximum de CIST pour cette classe donnée.

2 Conditions nécessaires sur les graphes $2r$-réguliers

Dans cette section, nous considérons un graphe $2r$-régulier G d'ordre n, et supposons qu'il existe un ensemble $\{T_1,\ldots,T_r\}$ de r CIST. Les propositions énoncées ici s'appliquent sur cette configuration unique-

ment. Nous notons $d_H(u)$ le degré de u dans le graphe H, le graphe H étant possiblement un sous-graphe d'un autre graphe. Nous notons $in(T_i)$ l'ensemble des nœuds internes de l'arbre T_i, et $leaf(T_i)$ l'ensemble de ses feuilles (sommets de degré 1). Pour rappel, $in(T_i) \cap in(T_j) = \emptyset | i \neq j, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r$. Tout nœud x est feuille d'au moins $r-1$ arbres, et de degré $2r$ dans G. Nous avons :

Proposition 1. *S'il existe un ensemble $\{T_1, \ldots, T_r\}$ de r* CIST*, tout nœud interne de tout arbre T_i a un degré d'au plus $r+1$ dans T_i.*

Un sommet étant nœud interne d'au plus un arbre, nous avons naturellement $\sum_{i=1}^{r} |in(T_i)| \leq n$. Soit *min* l'indice de l'arbre ayant le plus petit nombre de nœuds internes, cad. $in(T_{min}) \leq |in(T_i)|$ pour tout $i \neq min$.

Proposition 2. *S'il existe un ensemble $\{T_1, \ldots, T_r\}$ de r* CIST*, alors $|in(T_{min})| \leq \lfloor n/r \rfloor$.*
Démonstration. Par l'absurde. Si $|in(T_i)| \geq \lfloor n/r \rfloor + 1$ pour tout i, alors $\sum_{i=1}^{r} |in(T_i)| \geq \lfloor n/r \rfloor r + r > n$ □

Proposition 3. *S'il existe un ensemble $\{T_1, \ldots, T_r\}$ de r* CIST*, alors pour tout i, $1 \leq i \leq r$, on a*

$$\left\lceil \frac{n-2}{r} \right\rceil \leq |in(T_i)| \leq n - \left\lceil \frac{n-2}{r} \right\rceil (r-1) \tag{1}$$

Démonstration. Rappelons que pour tout arbre T_i, $\sum_{v \in V(T_i)} d_{T_i}(v) = \sum_{v \in in(T_i)} d_{T_i}(v) + \sum_{v \in leaf(T_i)} d_{T_i}(v) = 2(n-1)$. Puisque $|in(T_i)| + |leaf(T_i)| = n$, et que $d_{T_i}(v) \leq r+1$ pour tout $v \in in(T_i)$ (d'après la proposition 1), nous obtenons $2(n-1) = \sum_{v \in V(T)} d(v) \leq |in(T_i)|(r+1) + |leaf(T_i)| = |in(T_i)|r + n$, et finalement $\lceil \frac{n-2}{r} \rceil \leq |in(T_i)|$.

Depuis l'inégalité $\sum_{i=1}^{r} |in(T_i)| \leq n$, nous pouvons écrire $in(T_i) \leq n - \sum_{j=1, i \neq j}^{r} |in(T_j)|$. En reprenant l'inégalité $\lceil \frac{n-2}{r} \rceil \leq |in(T_i)|$ précédemment montrée, nous obtenons $in(T_i) \leq n - \lceil \frac{n-2}{r} \rceil (r-1)$. □

Pour un ensemble de r CIST, appelons $E^P = E(G) - \cup_{1 \leq i \leq r} E(T_i)$ l'ensemble des arêtes *perdues*, cad. qui n'appartiennent à aucun arbre. Puisque G est $2r$-régulier, donc que $|E(G)| = rn$, et que chacun des r arbres contient $(n-1)$ arêtes, alors on a $|E^P| = r$. Pour chaque arbre T_i nous appelons E_i^P les arêtes de E^P dont les 2 extrémités appartiennent à $in(T_i)$. Puisque $\cup_{1 \leq i \leq r} E_i^P \subseteq E^P$, alors on a $\sum_{i=1}^{r} |E_i^P| \leq r$.

Tout arbre couvrant de $in(T)$ nœuds internes possède au maximum $in(T)(r-1)+2$ feuilles. Supposons un arbre couvrant idéal T^* dont les nœuds internes $in(T^*)$ sont tous de degré $(r+1)$. La somme des degrés de ses nœuds peut s'écrire $|in(T^*)|(r+1) + (n - |in(T^*)|) = |in(T^*)|r + n$.

Definition 1. *Nous appelons* potentiel extra-degré *d'un arbre couvrant T le nombre de feuilles qu'il aurait pu posséder en plus si tous ses nœuds internes étaient de degré $r+1$, et le notons $ped(T)$. Formellement, $ped(T)$ est la différence entre la somme des degrés d'un arbre idéal de $in(T)$ nœuds internes et la somme des degrés de T, soit $ped(T) = |in(T)|r + n - 2(n-1) = |in(T)|r - n + 2$.*

Pour un arbre couvrant idéal T^*, on a $ped(T^*) = 0$. Autrement, $ped(T) > 0$ et le nombre de nœuds internes de degré strictement inférieur à $r+1$ est borné par $ped(T)$. Remarquons que toute arête perdue $e \in E_i^P$ ayant ses 2 extrémités dans $in(T_i)$ mais n'appartenant pas à T_i augmente $ped(T_i)$ de 2 unités : chacune de ses extrémité doit être incidente à e et adjacente à $r-1$ nœuds internes de chacun des autres arbres dont elle est feuille. Le degré des extrémités de e dans T_i ne peut donc excéder r. En conséquence :

Proposition 4. *S'il existe un ensemble $\{T_1, \ldots, T_r\}$ de r* CIST *sur un graphe $2r$-régulier :*

1. *La somme $\sum_{i=1}^{r} ped(T_i)$ ne peut excéder 2 fois le nombre d'arêtes perdues E^P : $\sum_{i=1}^{r} ped(T_i) \leq 2r$.*
2. *Pour tout i, $1 \leq i \leq r$, on a $2|E_i^P| \leq ped(T_i)$.*

3 Application sur le produit cartésien d'une clique et d'un cycle

Pour deux graphes G et H, le produit cartésien de G et H, noté $G \square H$, est le graphe ayant pour sommets $V(G) \times V(H)$ et pour arêtes $\{(u,u')(v,v') | (u = v \wedge u'v' \in E(H)) \vee (u' = v' \wedge uv \in E(G))\}$. Soient deux entiers $m > 1$ et $\ell > 2$, dans cette section le graphe considéré est $K_m \square C_\ell$, où K_m est une clique d'ordre m et C_ℓ un cycle d'ordre ℓ, et possède $m\ell$ sommets.

Ce graphe peut être construit en considérant une clique originale K^0 de m sommets $\{u_0^0, \ldots, u_{m-1}^0\}$ que l'on aurait dupliqué $\ell - 1$ fois en cliques notées $K^1, \ldots, K^{\ell-1}$, et en notant $\{u_0^i, \ldots, u_{m-1}^i\}$ les sommets de la

clique K^i. Chaque sommet u_j^i est ensuite connecté à son sommet clone dans la clique d'indice immédiatement supérieur, à savoir $u_j^{i+1 \pmod{\ell}}$, pour tout tout i, $0 \leq i \leq \ell-1$, et tout j, $0 \leq j \leq m-1$. Nous réutilisons cette dénomination des sommets dans la suite. Le graphe $K_m \square C_\ell$ est clairement $(m+1)$-régulier et $(m+1)$-connexe. Deux cliques d'indices consécutifs sont dites adjacentes. Chaque sommet u_j^i d'une clique K^i est incident à exactement un sommet u_j^{i-1} (resp. u_j^{i+1}) de la clique d'indice immédiatement inférieur (resp. supérieur). Les indices i d'une clique K^i ou d'un sommet u_j^i sont toukours supposés modulo ℓ dans la suite.

Notre objectif est de montrer qu'il n'existe pas d'ensemble de r CIST dans $K_{2r-1} \square C_\ell$ pour certaines valeurs de r et ℓ. Pour cela, nous supposons l'existence d'un ensemble de r CIST, et montrons qu'il contredit les propositions énoncées dans les sections précédentes et courantes.

Nous considérons le graphe $K_{2r-1} \square C_\ell$ et posons $n = |V(K_{2r-1} \square C_\ell)| = \ell(2r-1)$ son nombre de sommets. Nous supposons l'existence d'un ensemble $\{T_1, \ldots, T_r\}$ de r CIST sur ce dernier. Soit T_{min} l'arbre ayant le plus petit nombre de nœuds internes. D'après la proposition 2, puisque $n = \ell(2r-1)$ nous avons :

$$|in(T_{min})| \leq \lfloor n/r \rfloor = 2\ell - \lceil \ell/r \rceil \tag{2}$$

Puisque $ped(T_{min}) = |in(T_{min})|r - n + 2$, combiné à l'équation 2, nous obtenons :

$$ped(T_{min}) = |in(T_{min})|r - n + 2 \leq -\lceil \ell/r \rceil r + \ell + 2 \leq 2 \tag{3}$$

L'arbre T_{min} satisfait $ped(T_{min}) = 2$ si et seulement si $\ell \equiv 0 \pmod{r}$, et $ped(T_{min}) \leq 1$ autrement.

Dans la suite, nous regardons la répartition des sommets internes de T_{min} dans les différentes cliques de $K_{2r-1} \square C_\ell$ et montrons qu'aucune répartition valide n'est possible. Nous appelons $V(K^i) \cap in(T_{min})$ l'ensemble des sommets internes de T_{min} qui sont dans la clique K^i. Rappelons que puisque $2|E_{min}^P| \leq ped(T_{min})$ par le point 2 de la proposition 4, et que $ped(T_{min}) \leq 2$ dans l'équation 3, on a $|E_{min}^P| \leq 1$.

Proposition 5. *La répartition des nœuds internes de T_{min} dans toute clique K^i, avec $1 \leq i \leq \ell$ est telle que*

1. *si une clique K^i contient k nœuds internes de T_{min}, alors $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ arêtes de K^i sont dites perdues, et appartiennent donc à E_{min}^P ;*
2. *une clique K^i ne peut contenir un nombre de nœuds internes de T_{min} strictement supérieur à 3 : $|V(K^i) \cap in(T_{min})| \leq 3$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq \ell$.*
3. *il ne peut pas y avoir plus d'une clique contenant 3 nœuds internes de T_{min} ;*
4. *s'il existe une clique K^i contenant 3 nœuds internes de T_{min}, alors $l \equiv 0 \pmod{r}$ et $\ell \geq r$;*
5. *il existe au moins une clique K^i contenant strictement moins de 2 nœuds internes de T_{min} ;*
6. *si pour chaque clique K^i on a $V(K^i) \cap in(T_{min}) \geq 1$, alors le nombre de cliques contenant 3 nœuds internes de T_{min} est strictement inférieur à celui contenant exactement 1 nœud interne de T_{min} .*

Démonstration. .

(1) : $\frac{1}{2}k(k-1)$ arêtes lient les k nœuds internes de $V(K^i) \cap in(T_{min})$ entre eux. Seulement $k-1$ sont utilisées dans T_{min}. Les autres sont donc des arêtes perdues et ajoutées à E_{min}^P.

(2) et (3) : Conséquence du point (1), autrement nous aurions $|E_{min}^P| > 1$.

(4) : Si $|V(K^i) \cap in(T_{min})| = 3$, alors $|E_{min}^P| \geq 1$ et donc $ped(T_{min}) \geq 2$. Réutilisé dans l'inéquation 3, on obtient $-\lceil \ell/r \rceil r + \ell + 2 = 2$, et donc $\ell \equiv 0 \pmod{r}$. Puisque $\ell > 0$, on a $\ell \geq r$.

(5) et (6) : L'équation 2 dit que le nombre de nœuds internes de T_{min} est strictement inférieur à deux fois le nombre de cliques. Posons a, b, c et d le nombre de cliques ayant 0, 1, 2 ou 3 nœuds internes, avec $a+b+c+d = \ell$, il faut que $b+2c+3d < 2\ell$, donc que $a+b > 0$. Si $a = 0$, il faut que $d < b$.

□

Lemme 1. *Pour tout $\ell \geq 2$ et tout $r \geq 6$, il n'existe pas d'ensemble de r CIST sur $K_{2r-1} \square C_\ell$.*

Démonstration. Supposons l'existence de r CIST. Soit T_{min} l'arbre tel que $in(T_{min}) = \min_{1 \leq i \leq r} in(T_i)$

Si une clique K^i, $1 \leq i \leq \ell$, ne contenait aucun nœud de $in(T_{min})$, alors connecter les sommets de K^i aux nœuds internes de T_{min} nécessiterait au moins $2r-1 \geq 11$ nœuds dans $\{V(K^{i-1}) \cap in(T_{min})\} \bigcup \{V(K^{i+1}) \cap in(T_{min})\}$, d'où $|V(K^{i-1}) \cap in(T_{min})| \geq 6$ ou $|V(K^{i+1}) \cap in(T_{min})| \geq 6$, et contradiction avec la proposition 5-(2). Soit i l'indice d'une clique telle que $|V(K^i) \cap in(T_{min})| = 1$ (cet indice existe d'après la proposition 5-(5)), et appelons u le seul élément de $V(K^i) \cap in(T_{min})$. Le nœud u est de degré au plus $r+1$ dans T_{min} et doit

être adjacent à au moins un nœud interne v d'une clique incidente K^{i-1} ou K^{i+1}. Donc u ne peut connecter au mieux que r des $2r-2$ autres sommets de K^i à T_{min}, et restent $r-2 \geq 4$ nœuds de K^i qui doivent être incidents à $r-2$ nœuds de $\{V(K^{i-1}) \cap in(T_{min})\} \bigcup \{V(K^{i+1}) \cap in(T_{min})\}$, autres que v qui connecte déjà u. Alors on a forcément $|V(K^{i-1}) \cap in(T_{min})| \geq 3$ ou $|V(K^{i+1}) \cap in(T_{min})| \geq 3$. En conséquence, toute clique K^i avec $|V(K^i) \cap in(T_{min})| = 1$ doit être incidente à une clique contenant 3 sommets internes de T_{min}. Or, il faut plus de cliques contenant un seul nœud interne que de cliques en contenant 3, et on ne peut en avoir plus d'une (propositions 5-(6) et 5-(3)). La seule possibilité est d'avoir une clique K^j de 3 nœuds internes, dont les deux cliques adjacentes K^{j-1} et K^{j+1} contiennent chacune un seul nœud interne de T_{min}. Soit x, resp. y, le nœud interne de K^{j-1}, resp. de K^{j+1}. D'après la proposition 5-(4), on a au moins $\ell \geq r \geq 6$ cliques. Pour assurer la connexité de T_{min}, au moins x ou y doit être adjacent à un nœud interne de K^{j-2} ou K^{j+2}. Supposons qu'il s'agisse de x. Le sommet x ne peut connecter au mieux que $r-1$ sommets feuilles de K^{j-1} à T_{min}. Restent $r-1 \geq 5$ nœuds de K^{j-1} qui doivent être adjacents à des nœuds de $\{V(K^{j-2}) \cap in(T_{min})\} \bigcup \{V(K^j) \cap in(T_{min})\}$, autres que les 2 connectant déjà x à chaque clique voisine. On a donc forcement, $|\{V(K^{j-2}) \cap in(T_{min})\} \bigcup \{V(K^j) \cap in(T_{min})\}| \geq 7$, donc $|V(K^{j-2}) \cap in(T_{min})| \geq 4$ ou $|V(K^j) \cap in(T_{min})| \geq 4$, mais ceci est en contradiction avec la proposition 5-(2). □

En utilisant un raisonnement similaire, nous avons établi les lemmes suivants (preuves non présentées) :

Lemme 2. *Pour tout* $4 \leq r \leq 5$ *et tout* $\ell \geq r+1$*, il n'existe pas d'ensemble de* r CIST *sur* $K_{2r-1} \square C_\ell$.

Lemme 3. *Il n'existe pas d'ensemble de* 5 CIST *sur* $K_9 \square C_3$.

Nous avons ensuite proposé un programme linéaire en nombres entiers (PLNE) afin de résoudre le problème pour des valeurs de m et ℓ fixées. Les résultats suivants montrent que pour certaines valeurs de m et ℓ où $K_{2r-1} \square C_\ell$ est un graphe $2r$-connexe et $2r$-régulier, on peut quand même trouver r CIST :

Lemme 4. *Il existe* 5 CIST *dans* $K_9 \square C_4$ *et dans* $K_9 \square C_5$.

Lemme 5. *Il existe* 4 CIST *dans* $K_7 \square C_3$ *et dans* $K_7 \square C_4$.

En couplant les résultats de la PLNE avec une répétition de motifs, nous obtenons la proposition suivante :

Lemme 6. *Soit* $\ell \geq 3$ *un entier. Il existe* 3 CIST *dans* $K_5 \square C_\ell$.

Appelons $M_{cist}(G)$ le nombre maximum de CIST pour un graphe G donné. En s'appuyant sur les résultats des différents lemmes, nous avons pu proposer une construction de $M_{cist}(K_m \square C_\ell)$ arbres basés sur des motifs pour l'ensemble des valeurs de $m \geq 3$ et $\ell \geq 3$. Nous revendiquons la véracité du théorème suivant :

Theorem 1. *Soient* $m \geq 3$ *et* $\ell \geq 3$ *deux entiers. Nous avons :*

$$M_{cist}(K_m \square C_\ell) = \begin{cases} \lceil m/2 \rceil, & \text{si } m \in \{3,5\} \text{ ou } (m = 7 \wedge \ell \in \{3,4\}) \text{ ou } (m = 9 \wedge \ell \in \{4,5\}); \\ \lfloor m/2 \rfloor, & \text{autrement.} \end{cases}$$

4 Perspectives

En perspectives, nous souhaitons déterminer les conditions suffisantes pour garantir l'existence de r CIST, et poursuivre l'étude de ces derniers sur d'autres classes de graphes, comme les hypercubes, ...

Références

[1] Toru Hasunuma. Completely independent spanning trees in the underlying graph of line graph. *Discrete mathematics*, 234 :149–157, 2001.

[2] Toru Hasunuma. Completely independent spanning trees in maximal planar graphs. *Lecture Notes in Computer Science*, 2573 :235–245, 2002.

[3] Toru Hasunuma and Chie Morisaka. Completely independent spanning trees in torus networks. *Networks*, 60 :56–69, 2012.

[4] Kung-Jui Pai, Shyue-Ming Tang, Jou-Ming Chang and Jinn-Shyong Yang. Completely Independent Spanning Trees on Complete Graphs, Complete Bipartite Graphs and Complete Tripartite Graphs. *Advances in Intelligent Systems and Applications - Volume 1*, 20 :107–113, 2013.

[5] Ferenc Péterfalvi. Two counterexamples on completely independent spanning trees. *EGRES Quick-Proof*, 01, 2011.