HAL open science

∇^{γ}-quantification des mesures physiques

Jean Louis Jonot

▶ **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. ∇^{γ}-quantification des mesures physiques. [Rapport de recherche] Académie de Versailles. 2015. hal-00986218v9

HAL Id: hal-00986218

https://hal.science/hal-00986218v9

Submitted on 28 May 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

∇^{γ}-QUANTIFICATION DES MESURES PHYSIQUES

JONOT JEAN LOUIS

Abstract. We will quantify the (p,q)-tensors of the universe using the ∇^{γ}-quantification process. This method can be generalised for all the states of a physical system.

1. Le principe de quantification

I)Le principe de superposition

A chaque système physique de l'univers Ω est associé un fibré $\zeta = (E, \Omega, p, \mathcal{H})$ muni d'une connexion ∇ et de fibre hilbertienne. L'état du système est défini par une section locale du fibré $\Gamma(\zeta)$.

Toute superposition linéaire d'états $s = \sum_i c_i s_i$, avec c_i appartenant à $C^{\infty}(\Omega, \mathbb{C})$ *et $\sum_i |c_i|^2 \leqslant 1$ est un état accessible si les $\{s_i(\omega)\}$ forment une base hilbertienne de E_{ω} en chaque événement ω de l'univers Ω. Un état est défini à un facteur de phase $\exp(i\theta)$, il est impossible de distinguer en norme, s et $\exp(i\theta)\, s$ dans une mesure d'état, où θ est une application C^{∞} de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

II)La mesure des grandeurs physiques

a) L'évolution d'un système physique sur un ouvert $U \subset \Omega$, est la donnée d'une section hermitienne $i\Phi$ du fibré $E^* \otimes E$ sur U.

b) Soit $s(\omega)$ l'état dans lequel se trouve le système en $\omega \in \Omega$ où on effectue la mesure, les seuls résultats possibles sont les valeurs propres $\lambda_{\alpha}(\omega)$ de l'observable $\Phi(\omega)$.

c) Notons $\overset{\wedge}{\mathcal{P}}_{\alpha}(\omega) : E_{\omega} \to E_{\omega}$, le projecteur sur le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_{\alpha}(\omega)$. La probabilité de trouver la valeur $\lambda_{\alpha}(\omega)$ lors d'une mesure $\Phi(\omega)$ est $p_{\alpha} = \frac{\|s_{\alpha}(\omega)\|^2_{\omega}}{\|s(\omega)\|^2_{\omega}}$, où $s_{\alpha}(\omega) = \overset{\wedge}{\mathcal{P}}_{\alpha}(\omega)(s(\omega))$.

d) Après une mesure en ω donnant $\lambda_{\alpha}(\omega)$, le nouvel état du système est $s_{\alpha}(\omega)$.

III)L'équation d'évolution

Si s est l'état d'un système, tant que le système n'est soumis à aucune observation, s vérifie l'équation d'évolution

$$\Phi(s) = -i\lambda s, \tag{1.1}$$

λ est une fonction propre de $i\Phi$ définie localement sur U, Φ est l'opérateur d'évolution du système.

2. La ∇^{γ}-quantification

Dans ce qui suit (E, π, Ω, F) est un fibré vectoriel réel ou complexe de dimension finie, de fibre F, dont la base est l'univers Ω qui est une C^{∞}-variété de dimension

Remerciements à Guy Cherbit.

quatre. On note $\Lambda^n\Omega = \wedge^n T^*\Omega$, le fibré des n-formes différentielles sur Ω. L'espace des (p,q)-tenseurs, p fois covariant et q fois contravariant, est noté

$$T^{p,q}\Omega = (\otimes^p T^*\Omega) \otimes (\otimes^q T\Omega),$$

et l'espace total E du fibré est l'espace des états, il est muni d'une connexion

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma\left(\Lambda^1\Omega \otimes E\right).$$

Definition 1. *1)Une section γ du fibré $\mathrm{L}\left(\Lambda^1\Omega \otimes E, E\right)$ est une section de Dirac du fibré des états E.*

2)On définit l'endomorphisme ∇^γ de $\Gamma(E)$ par

$$\nabla^\gamma s = \gamma(\nabla s),\ s \in \Gamma(E).$$

Les endomorphismes de Dirac sont définis par,

$$\gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s), d \in \Lambda^1\Omega \text{ et } s \in \Gamma(E).$$

Le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac $\left\{\gamma^{d^\mu}\right\}$ est

$$\left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \cdots, \gamma^{d^n}\right] = \sum_{s \in \mathrm{Perm}\{1,2,\cdots,n\}} \varepsilon(s)\, \gamma^{d^{s(1)}} \circ \gamma^{d^{s(2)}} \circ \cdots \circ \gamma^{d^{s(n-1)}} \circ \gamma^{d^{s(n)}},$$

et l'anticommutateur ou crochet de Poisson est défini par,

$$\left\{\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \cdots, \gamma^{d^n}\right\} = \sum_{s \in \mathrm{Perm}\{1,2,\cdots,n\}} \gamma^{d^{s(1)}} \circ \gamma^{d^{s(2)}} \circ \cdots \circ \gamma^{d^{s(n-1)}} \circ \gamma^{d^{s(n)}}.$$

Le commutateur définit une section de $\mathrm{L}(\Lambda^n\Omega \otimes E, E)$. On définit l'extension de rang n d'une section γ, par la section $\gamma_n \in \Gamma(\mathrm{L}(\Lambda^n(\Omega) \otimes E, E))$ où

$$\gamma_n\left(\left(d^1 \wedge d^2 \wedge \cdots \wedge d^n\right) \otimes s\right) = \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \cdots, \gamma^{d^n}\right](s),$$

et on prolonge γ_n par $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$-linéarité sur $\Lambda^n(\Omega) \otimes E$.

Toute connexion sur ∇ a une extension $d_n^\nabla : \Gamma(\Lambda^n(\Omega) \otimes E) \to \Gamma\left(\Lambda^{n+1}(\Omega) \otimes E\right)$ avec, $d_0^\nabla = \nabla$, $\Lambda^0(\Omega) \otimes E = E$ et $d_n^\nabla(\psi \otimes s) = d\psi \otimes s + (-1)^n \psi \wedge \nabla s$, $\psi \in \Lambda^n(\Omega)$. L'équation de Dirac-Einstein au rang n est

$$\gamma_n(\nabla_{n-1} s) = \lambda s,\ \nabla_{n-1} = d_{n-1}^\nabla \circ \cdots \circ d_0^\nabla. \tag{2.1}$$

Definition 2. *Une équation d'évolution d'ordre n, des états du fibré E sur un ouvert $U \subset \Omega$, est une équation de la forme 2.1. On note, $E(\nabla, \gamma, \lambda, n)$ cette équation.*

Pour un " *local frame*" sur $E(U)$, les matrices associées γ^d sont les matrices de Dirac. L'équation d'évolution d'un système quantique est $\Phi = \gamma_n \circ \nabla_{n-1}$ si (E, π, Ω, F) est un fibré vectoriel réel et $i\Phi = \gamma_n \circ \nabla_{n-1}$ si le fibré est complexe, le principe de quantification devient le principe de ∇^γ-quantification au rang n.

Example 1. *L'équation $E(\nabla, \gamma, \lambda, 1)$ est une équation d'évolution qui généralise l'équation de Dirac dans les espaces courbes [1] lorsque l'on pose, $\lambda = \frac{mc}{\hbar}$. Le fibré E est l'un des deux fibrés $E = \Omega \times \mathbb{C}^4$ ou $E = T_{\mathbb{C}}\Omega$ et les endomorphismes de Dirac $\gamma^\mu = \gamma(d^\mu)$ dans la base duale $\{d^\mu\}$ de $\{\partial_\mu\}$, vérifient la relation d'anticommutation*

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4, \tag{2.2}$$

avec $(g_{\mu\nu})$ est la matrice de la métrique de Lorentz g sur Ω dans la base $\{\partial_\mu\}$.

Definition 3. *Une équation relativiste quantique est une équation qui lie la connexion ∇ à la section de Dirac γ. Une relation de ce type sera notée $R(\nabla,\gamma)$. Si cette équation dépend de l'équation d'évolution $E(\nabla,\gamma,\lambda,n)$, on note $R(\nabla,\gamma,\lambda,n)$.*

Dans le cas des champs l'équation relativiste $R(\nabla,\gamma)$ a été établie dans l'équation 4.1 et l'équation d'évolution $E(\nabla,\gamma,\lambda,1)$ a été démontrée en 3.4. L'équation $R(\nabla,\gamma,\lambda,1)$, qui fait intervenir l'équation d'état des métriques, est donnée en 5.1 et 5.2. Pour généraliser cette équation à tous les états de l'univers, il faut déterminer un tenseur qui joue un rôle analogue au tenseur de Ricci pour la connexion ∇ sur le fibré des états E.

3. Représentation dans des cartes de trivialisation des fibrés

Dans ce qui suit, $\left(x^1,x^2,x^3,x^4\right)$ est une carte U de l'univers Ω. Soit

$$\left\{\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu},1\leqslant\mu\leqslant 4\right\}$$

les champs de vecteurs sur U linéairement indépendants associés et

$$\left\{d^\nu=dx^\nu,1\leqslant\nu\leqslant 4\right\},$$

la base duale. Sur $E(U)$ il existe un *"local frame"*, noté $\{e_\alpha,1\leqslant\alpha\leqslant n\}$, $n=\dim E$.

3.0.1. *Ecriture locale de l'équation de Dirac-Einstein $E(\nabla,\gamma,\lambda,1)$.* Soit $s=s^\alpha e_\alpha$ alors $\nabla s=\nabla\left(s^\alpha e_\alpha\right)=ds^\alpha\otimes e_\alpha+s^\alpha\nabla e_\alpha=ds^\alpha\otimes e_\alpha+s^\alpha\Gamma^\beta_{\alpha j}d^j\otimes e_\beta$. Sur U la connexion peut s'écrit

$$\nabla e_\alpha=\Gamma^\beta_{\alpha\nu}d^\nu\otimes e_\beta,$$

avec des C^∞ fonctions $\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$ définies sur U à valeurs complexes ou réelles, $\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$ sont les symboles de Christoffel associés à la connexion ∇ et $ds^\alpha=\partial_\nu s^\alpha d^\nu$, $\nabla s=\partial_\nu s^\alpha d^\nu\otimes e_\alpha+s^\alpha\Gamma^\beta_{\alpha\nu}d^\nu\otimes e_\beta=\left(\partial_\nu s^\beta+s^\alpha\Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right)d^\nu\otimes e_\beta$. La section de Dirac γ de E a pour représentation

$$\gamma\left(d^\nu\otimes e_\beta\right)=\gamma^{\nu\sigma}_\beta e_\sigma,$$

et si $\gamma^\nu=\gamma\left(d^\nu\right)$ alors $\left(\gamma^\nu\right)^\alpha_\beta=\gamma^{\nu\alpha}_\beta$.

$\nabla^\gamma s=\gamma\left(\left(\partial_\nu s^\beta+s^\alpha\Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right)d^\nu\otimes e_\beta\right)=\left(\partial_\nu s^\beta+s^\alpha\Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right)\gamma\left(d^\nu\otimes e_\beta\right)$

$\nabla^\gamma s=\gamma^{\nu\sigma}_\beta\left(\partial_\nu s^\beta+s^\alpha\Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right)e_\sigma$. L'équation de Dirac-Einstein $E(\nabla,\gamma,\lambda,1)$ s'écrit localement,

$$\gamma^{\nu\sigma}_\beta\left(\partial_\nu s^\beta+s^\alpha\Gamma^\beta_{\alpha\nu}\right)=-i\lambda s^\sigma \text{ pour tout } \sigma,\ 1\leqslant\sigma\leqslant n.$$

Les matrices de Dirac γ^μ, $1\leqslant\mu\leqslant 4$, sont des matrices carrées d'ordre n dont les coefficients sont des applications C^∞ sur U, à valeurs réelles ou complexes. On note

$$\left(D_\nu s\right)^\beta=\partial_\nu s^\beta+s^\alpha\Gamma^\beta_{\alpha\nu},$$

D_ν est la section locale de $\mathrm{End}(E)$ définie par, $D_\nu=\mathrm{L}_\nu+\Gamma_\nu$, où Γ_ν est la section locale de $\mathrm{End}(E)$ dont la matrice, dans le *"local frame"*, est $\left(\Gamma_\nu\right)^\beta_\alpha=\Gamma^\beta_{\alpha\nu}$ et L_ν est l'endomorphisme de Lie le long du champ $\partial_\nu=\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ défini par, $\mathrm{L}_\nu\, s=\left(\partial_\nu s^\alpha\right)e_\alpha$.

$$\gamma^{\nu\sigma}_\beta\left(D_\nu s\right)^\beta=-i\lambda s^\sigma,$$

l'équation précédente s'écrit

$$\gamma^\nu D_\nu\left(s\right)=-i\lambda s.$$

L'opérateur de l'équation d'évolution est,

$$\Phi = \gamma^{\nu} D_{\nu}. \tag{3.1}$$

On a une équation d'évolution au sens de la ∇^{γ}-quantification si Φ est une section localement hermitienne.

Definition 4. *Φ est l'opérateur de l'équation d'évolution du premier ordre des états.*

L'application aux champs est immédiate si on pose $E = T_{\mathbb{C}}\Omega$, l'équation d'évolution des champs s'écrit

$$\gamma^{\nu} D_{\nu} X = -i\lambda X, \tag{3.2}$$

$\lambda \in \mathrm{Spec}_U(i\Phi)$ et $D_{\nu} = \mathrm{L}_{\nu} + \Gamma_{\nu}$. Le principe de quantification des champs s'énonce ainsi:

"*Si aucune mesure n'est faite dans la carte U, le champ X évolue suivant l'équation $\Phi X = -i\lambda X$, où $\lambda \in \mathrm{Spec}_U(i\Phi)$. Le champ X est un champ propre de l'opérateur d'évolution Φ. Si une mesure en $\omega \in U \subset \Omega$ est $a = a(\omega)$, alors a est une valeur propre de $\Phi(\omega)$. Le champ prend la valeur $X_a(\omega)$ où $X_a(\omega) = \overset{\wedge}{\mathcal{P}}_a(\omega)(X(\omega))$, $\overset{\wedge}{\mathcal{P}}_a(\omega)$ est le projecteur sur le sous-espace propre associé à la valeur propre a. La probabilité de trouver la valeur a lors de la mesure est*

$$p_a = \frac{\|X_a(\omega)\|_{\omega}^2}{\|X(\omega)\|_{\omega}^2}, \tag{3.3}$$

et l'équation d'évolution du champ est $\Phi X = -i\lambda X$ pour un $\lambda \in \mathrm{Spec}_U(i\Phi)$, vérifiant $\lambda(\omega) = a$ et un champ $X(\omega) = X_a(\omega)$."

On a donc fixé en l'évènement ω, de nouvelles conditions à l'évolution du système. On a perturbé l'évolution du champ X en faisant une mesure sur ce champ.

3.0.2. *Quantification des métriques.* A partir d'une connexion ∇ sur les champs, on peut étendre l'endomorphisme ∇_X aux tenseurs de façon unique avec deux conditions sur ∇_X, ∇_X commute avec les contractions, c'est-à-dire,

$$\nabla_X(c(S)) = c(\nabla_X(S))$$

et

$$\nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X(S) \otimes T + S \otimes \nabla_X(T).$$

La connexion sur les $(2,0)$-tenseurs est définie à partir de la connexion initiale ∇ sur les champs en posant, $\nabla\left(d^1 \otimes d^2\right) = \nabla\left(d^1\right) \otimes d^2 + d^1 \otimes \nabla\left(d^2\right)$ et si on se restreint aux sections définies sur une carte U de l'univers, dans la base $\{\partial_{\mu}\}$, on définit la connexion duale ∇_X^* par

$$L_X(d \otimes Y) = d \otimes \nabla_X Y + \nabla_X^* d \otimes Y,\ d \otimes Y(\omega) = d(\omega)(Y(\omega)),$$

de façon plus générale pour un fibré ζ et son dual, on pose

$$L_X(s^* \otimes s) = s^* \otimes \nabla_X s + \nabla_X^* s^* \otimes s,\ s^* \otimes s(\omega) = s^*(\omega)(s(\omega))$$

L_X est la dérivée de Lie le long du champ X. En particulier,

$$\begin{aligned} L_{\partial_\beta}(d^{\sigma} \otimes \partial_{\mu}) &= d^{\sigma} \otimes \nabla_{\partial_\beta}\partial_{\mu} + \nabla_{\partial_\beta}^* d^{\sigma} \otimes \partial_{\mu} \\ 0 &= d^{\sigma}\left(\Gamma_{\beta\mu}^{\tau}\partial_{\tau}\right) + \nabla_{\partial_\beta}^* d^{\sigma}(\partial_{\mu}), \end{aligned}$$

et

$$\nabla_{\partial_\beta}^* d^{\sigma}(\partial_{\mu}) = -\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} \text{ et } \nabla_{\partial_\beta}^* d^{\sigma} = -\Gamma_{\beta\tau}^{\sigma} d^{\tau}$$

$$\nabla_{\partial_\beta}\left(d^\sigma\otimes d^\tau\right)=\nabla\left(d^\sigma\otimes d^\tau\right)\left(\partial_\beta\right)=\left(\Gamma^{\sigma\tau}_{\rho\gamma\delta}d^\rho\otimes d^\gamma\otimes d^\delta\right)\left(\partial_\beta\right)$$
$$\nabla_{\partial_\beta}\left(d^\sigma\otimes d^\tau\right)=\Gamma^{\sigma\tau}_{\rho\gamma\delta}d^\rho\left(\partial_\beta\right)d^\gamma\otimes d^\delta=\Gamma^{\sigma\tau}_{\beta\gamma\delta}d^\gamma\otimes d^\delta,$$

et

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_\beta}\left(d^\sigma\otimes d^\tau\right)&=\nabla^*_{\partial_\beta}d^\sigma\otimes d^\tau+d^\sigma\otimes\nabla^*_{\partial_\beta}d^\tau\\&=-\Gamma^\sigma_{\beta\mu}d^\mu\otimes d^\tau-\Gamma^\tau_{\beta\rho}d^\sigma\otimes d^\rho\\&=-\left(\Gamma^\sigma_{\beta i}+\Gamma^\tau_{\beta j}\right)d^i\otimes d^j,\end{aligned}$$

on a

$$\Gamma^{\sigma\tau}_{\beta ij}=-\left(\Gamma^\sigma_{\beta i}+\Gamma^\tau_{\beta j}\right)$$

Il y a une façon naturelle de décrire les endomorphismes de Dirac sur les $(2,0)$-tenseurs, si γ est une section de Dirac du fibré des champs, c'est également une section du fibré dual

$$\gamma\in\Gamma\left(T\Omega\otimes T^*\Omega\otimes T\Omega\right)\approx\Gamma\left(T\Omega\otimes T\Omega\otimes T^*\Omega\right)$$

et,

$$\gamma\in\Gamma\left(\mathrm{L}\left(\Lambda^1\Omega,\mathrm{End}\left(T\Omega\right)\right)\right)\approx\Gamma\left(\mathrm{L}\left(\Lambda^1\Omega,\mathrm{End}\left(\Lambda^1\Omega\right)\right)\right).$$

On a

$$\left(\gamma^d\right)^*\left(\zeta\right)=\zeta\circ\gamma^d,\ \zeta\text{ et }d\in\Lambda^1\Omega.$$

Ensuite, pour obtenir la section de Dirac sur les $(2,0)$-tenseurs,on pose

$$\left[\gamma^d\right]=\left(\gamma^d\right)^*\otimes\left(\gamma^d\right)^*.$$

$$\left[\gamma^\mu\right]\left(d^\nu\otimes d^\tau\right)=\gamma^{\mu\nu\tau}_{\rho\sigma}d^\rho\otimes d^\sigma=\left(\gamma^\mu\right)^*\left(d^\nu\right)\otimes\left(\gamma^\mu\right)^*\left(d^\tau\right),$$

$$\begin{aligned}\left(\gamma^\mu\right)^*\left(d^\nu\right)\left(\partial_\rho\right)&=d^\nu\circ\gamma^\mu\left(\partial_\rho\right)\\&=d^\nu\left(\gamma^{\mu\sigma}_\rho\partial_\sigma\right)=\gamma^{\mu\nu}_\rho\end{aligned}$$

et

$$\left(\gamma^\mu\right)^*\left(d^\nu\right)=\gamma^{\mu\nu}_\rho d^\rho$$

$$\left[\gamma^\mu\right]\left(d^\nu\otimes d^\tau\right)=\gamma^{\mu\nu}_\rho\gamma^{\mu\tau}_\sigma d^\rho\otimes d^\sigma,$$

il suit

$$\gamma^{\mu\nu\tau}_{\rho\sigma}=\gamma^{\mu\nu}_\rho\gamma^{\mu\tau}_\sigma.$$

On remplace les résultats précédents dans l'équation,

$$\gamma^{\mu\nu\tau}_{\rho\sigma}\left(\partial_\mu a_{\nu\tau}+a_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\tau}\right)=\lambda a_{\rho\sigma},$$

on obtient

$$\gamma^{\mu\nu}_\rho\gamma^{\mu\tau}_\sigma\left(\partial_\mu a_{\nu\tau}-a_{\alpha\beta}\left(\Gamma^\alpha_{\mu\nu}+\Gamma^\beta_{\mu\tau}\right)\right)=\lambda a_{\rho\sigma},$$
$$\gamma^{\mu\nu}_\rho\gamma^{\mu\tau}_\sigma\left(\partial_\mu a_{\nu\tau}-a_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}-a_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\tau}\right)=\lambda a_{\rho\sigma}.$$

Theorem 1. *Si une pseudo-métrique riemannienne g suit une équation d'état de Dirac-Einstein alors dans toute carte U, $g=g_{ij}d^i\otimes d^j$ vérifie l'équation*

$$\gamma^{\mu\nu\tau}_{\rho\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\tau}+g_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\tau}\right)=\lambda g_{\rho\sigma},\tag{3.4}$$

avec

$$\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu\nu\tau}=-\left(\Gamma^\alpha_{\mu\nu}+\Gamma^\beta_{\mu\tau}\right)\ \text{ et }\gamma^{\mu\nu\tau}_{\rho\sigma}=\gamma^{\mu\nu}_\rho\gamma^{\mu\tau}_\sigma.$$

4. Equation relativiste quantique

On rappelle que l'équation relativiste quantique est l'équation qui lie la connexion ∇ à la section de Dirac γ définie sur les états. On part du principe physique que tout système physique peut être quantifié par le procédé de quantification énoncé plus haut. L'équation relativiste d'Einstein est obtenue pour une connexion ∇ qui est la connexion de Levi-Civita d'une métrique g. La connexion ∇ ne permet pas, en général, de définir une métrique sur l'univers Ω, il faut donc trouver un tenseur qui joue le rôle du tenseur métrique. La section de Dirac γ nous permet de construire ce tenseur si le fibré est $E = T_{\mathbb{C}}\Omega$.

Definition 5. *Le tenseur de Poisson $\gamma^{\alpha\beta}$ est défini par,*

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{8}\operatorname{Trace}\left(\left\{\gamma^{\alpha},\gamma^{\beta}\right\}\right) = \frac{1}{4}\operatorname{Trace}\left(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\right).$$

Remark 1. *Lorsque $\gamma^{\alpha\beta}$ est régulier, $\gamma_{\alpha\beta}$ joue le rôle d'un tenseur métrique. Le tenseur de Poisson mesure l'anticommutativité des endomorphismes de Dirac.*

Pour le tenseur de courbure les notations standards sont,

$$R^{\nabla}\left(X,Y\right)\left(Z\right) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

$$R^{\nabla}\left(\partial_\alpha,\partial_\beta\right)\left(\partial_\sigma\right) = \nabla_{\partial_\alpha}\nabla_{\partial_\beta}\partial_\sigma - \nabla_{\partial_\beta}\nabla_{\partial_\alpha}\partial_\sigma = R^{\mu}_{\sigma\beta\alpha}\partial_\mu,$$

et le tenseur de Ricci s'écrit

$$Ric_{\alpha\beta} = R^{\nu}_{\alpha\nu\beta}.$$

La courbure scalaire de ∇ est,

$$R = \gamma^{\alpha\beta}Ric_{\alpha\beta}.$$

Theorem 2. *Si le tenseur de Poisson est régulier, l'équation relativiste d'Einstein est*

$$Ric_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R\gamma_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta},$$

avec $T_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$, $T^{\alpha\beta}$ est le tenseur énergie-impulsion. Si le tenseur de Poisson n'est pas régulier

$$Ric^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R\gamma^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta},\ Ric^{\alpha\beta} = Ric_{hk}\gamma^{h\alpha}\gamma^{k\beta}. \tag{4.1}$$

L'équation d'évolution des champs est donnée par

$$\Phi X = -i\lambda X,$$

et l'équation d'état des métriques

$$\Delta g = \lambda g.$$

Proof. On contracte deux fois l'équation relativiste d'Einstein et on utilise l'égalité fondamentale 2.2 car dans le cas de l'existence d'une métrique g on a, $g^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta}$. Les équations d'évolution ont été démontrées plus haut. □

5. Conclusion

Tout (p,q)-tenseur évolue suivant une équation $E(\nabla,\gamma,\lambda,1)$ où ∇ est l'unique extension à $T^{p,q}\Omega$ de la connexion initiale ∇ sur les champs et γ est l'unique extension à $T^{p,q}\Omega$ de la section γ de Dirac des champs. L'équation relativiste quantique associée est,

$$Ric^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}R\gamma^{\alpha\beta}=\frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}.$$

La quantification d'ordre $n\geqslant 1$ est donnée par l'équation d'évolution $E(\nabla,\gamma,\lambda,n)$. On peut généraliser ce procédé de quantification à tous les fibrés hermitiens et établir les équations d'évolution $E(\nabla,\gamma,\lambda,n)$ dans une carte, la seule difficulté est la généralisation de la notion de tenseur de Ricci dans un fibré quelconque. Si cette construction est possible on pourra définir à chaque équation d'évolution d'un état de l'univers une équation relativiste liant la connexion ∇ à la section de Dirac γ du fibré. Le choix de la connexion ∇ est imposé, naturellement, par la nature hermitienne du fibré des états E.

On veut généraliser l'équation quantique relativiste d'Einstein introduisant la constante cosmologique dans cette équation. Si la métrique de l'univers suit une équation d'état

$$\Delta(g)=\lambda g,$$

l'équation quantique relativiste se généralise de deux façons différentes

$$Ric^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}R\gamma^{\alpha\beta}=\frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}+\Lambda\gamma^{\alpha\beta}, \tag{5.1}$$

ou

$$Ric^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}R\gamma^{\alpha\beta}=\frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}+\Lambda g^{\alpha\beta}. \tag{5.2}$$

On peut supposer que $\Lambda=\Lambda_0$ où Λ_0 représente la constante cosmologique de l'univers, on retombe sur l'équation relativiste d'Einstein si $\gamma^{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}$. On fait l'hypothèse, dorénavant, que la constante cosmologique n'est plus constante mais est proportionnelle à la fonction propre λ donnée par l'équation d'évolution $\Delta(g)=\lambda g$, donc s'écrit, $\Lambda=\Lambda_o\lambda$ où g est la métrique de l'univers. On fait deux mesures dans U en ω_1, ω_2, les valeurs trouvées sont a_1 et a_2. Notons λ_1 et λ_2 les fonctions propres de Δ restreintes à U, vérifiant $\lambda_i(\omega_i)=a_i$ et g_i les métriques propres associées aux fonctions propres telles que

$$g_i(\omega_i)=\overset{\wedge}{\mathcal{P}}_{a_i}(\omega_i)(g(\omega_i)).$$

Dans l'équation 5.1 les fonctions propres λ_1 et λ_2 sont égales, seule la métrique g varie dans le sous-espace propre associé à la fonction propre $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$, l'équation 5.1 devient

$$Ric^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}R\gamma^{\alpha\beta}=\frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}+\Lambda_o\Psi^{\alpha\beta},\text{ avec }\Psi^{\alpha\beta}=\lambda\gamma^{\alpha\beta}.$$

Dans l'équation 5.2 les fonctions propres λ_1 et λ_2 sont distinctes, ainsi que les métriques g_1 et g_2, cette équation ne peut être réalisée que si $\lambda_1 g_1^{\alpha\beta}=\lambda_2 g_2^{\alpha\beta}$, c'est-à-dire,

$$\lambda_1 g_2=\lambda_2 g_1.$$

Cette équation 5.2 permet de définir localement une métrique universelle, sur la carte U, $\eta = |\lambda_1|\, g_2 = |\lambda_2|\, g_1$, dite métrique d'Einstein-Dirac, si les fonctions propres λ_i sont non nulles sur U et l'équation 5.2 devient

$$Ric^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\gamma^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta} + \Lambda_o G^{\alpha\beta},\ G^{\alpha\beta} = \lambda g^{\alpha\beta}.$$

On retrouve l'équation d'Einstein généralisée, en introduisant les tenseurs $\Psi^{\alpha\beta} = \lambda\gamma^{\alpha\beta}$ et $G^{\alpha\beta} = \lambda g^{\alpha\beta}$ et pour constante cosmologique, la constante Λ_o.

References

[1] M. Arminjon, F. Reifler, "Representations of the Dirac wave function in a curved spacetime", Proc. Fifth International Workshop DICE2010 : current issues in quantum mechanics and beyond, Journal of Physics: Conference Series 306 (2011), 012061.

[2] M.A., F. Reifler, Classical-quantum correspondence and wave packet solutions of the Dirac equation in a curved spacetime", 13th International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, (Varna, Bulgarie, 3-8 juin 2011). Journal of Geometry and Symmetry in Physics 24, 77-88 (2011).

E-mail address: `jean-louis.jonot@ac-versailles.fr`