Modélisation temporelle et simulation par filtrage numérique des phénomènes d'amortissement en vibroacoustique

A. Parret-Fréaud, B. Cotté et A. Chaigne

UME - ENSTA ParisTech, 828 boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, France
augustin.parret-freaud@ensta-paristech.fr

CFA2014, 12ème Congrès Français d'Acoustique
Poitiers, 22 – 25 avril 2014

Ce travail porte sur le développement de modèles temporels bien posés et capables de représenter des profils d'amortissement variés dans le domaine fréquentiel, afin d'offrir un cadre de modélisation adapté à une large gamme de matériaux (polymères, bois, mousses...) dans le contexte de simulations temporelles en dynamique des structures et acoustique. La particularité de l'approche consiste à représenter la loi de comportement comme un filtre numérique dont la synthèse est effectuée a partir de données fréquentielles relatives à l'amortissement du matériau considéré. L'ajout de contrainte au processus d'optimisation résultant permet de garantir les propriété de stabilité, causalité et d'adéquation au second principe de la thermodynamique lors de la transposition dans le domaine temporel du filtre obtenu. Les principaux aspects de la méthode ainsi que son intégration dans un schéma numérique permettant la simulation temporelle d'une structure amortie sont présentés et illustrés sur un exemple simple.

1 Introduction

La simulation de la réponse vibratoire et acoustique de structures soumises à des excitations impulsionnelles nécessite une prise en compte précise des phénomènes d'amortissement structurel, dont les conséquences sont multiples, par exemple en terme de rayonnement acoustique ou de directivité. De plus, ce phénomène apparaît également avoir une influence notable vis-à-vis de la perception acoustique des phénomènes vibratoires : sa modélisation fine devient alors très importante dans de nombreux domaines (acoustique des transports, des salles, acoustique musicale) et lors d'applications en synthèse sonore [1, 2].

Historiquement, de tels modèles ont souvent été obtenus dans le domaine fréquentiel, à partir des données de modules d'élasticité complexes $E^\star(f)$ ou bien de facteurs de pertes $\eta(f)$ [1] obtenus à l'aide de *viscoanalyseurs*, par exemple. Si de tels modèles conviennent pour une large gamme de simulations, le formalisme temporel apparaît plus intéressant dans le cas de structures excitées de manière impulsionnelle de par sa prise en compte naturelle des aspects transitoires. Se pose alors la question de la formulation de modèles temporels d'amortissement à caractéristiques fréquentielles données et satisfaisant aux propriétés de stabilité, causalité et d'adéquation au second principe de la thermodynamique. Des formulations temporelles plus ou moins simples sont couramment utilisées pour approcher certaines caractéristiques d'amortissement [3]. D'autres, reposant sur le concept de dérivation fractionnaire (voir par exemple [4]), paraissent particulièrement bien adaptées lorsqu'il s'agit de représenter des phénomènes d'amortissement à faible variation fréquentielle, mais leur traitement numérique est parfois délicat.

Plus récemment, la question du développement de modèles temporels bien posés dans le cadre des comportements de type viscoélastique a été abordée par Collet et coll. [5] à l'aide d'une analyse des propriétés mathématiques du module d'élasticité complexe dans l'espace fréquentiel. Le travail exposé ici dérive d'une problématique similaire, et s'intéresse à une nouvelle approche permettant la réalisation de modèles temporels d'amortissement à même de prendre en compte des réponses à caractéristiques fréquentielles variées, et donc adaptés à une large gamme de matériaux (bois, polymères, matériaux composites...). La particularité de celle-ci repose sur la représentation des variations fréquentielles d'amortissement à l'aide d'un filtre numérique qui garantit les propriétés de causalité et de stabilité lors de sa transposition dans le domaine temporel. On se place dans la continuité de précédent travaux [6] en présentant de nouveaux développements, portant principalement sur l'amélioration de la procédure de construction du modèle ainsi que sur l'étude des propriétés de dispersion et de dissipation du schéma temporel mis en place.

Sur la base d'un problème modèle simple, on commence par détailler en partie 2 la modélisation du comportement retenue. Par la suite, la partie 3 introduit le schéma de résolution numérique mis en place pour réaliser les simulations temporelles, ainsi que ses propriétés de conservation d'énergie, de dispersion et de dissipation. Enfin, sur l'exemple d'une poutre en nylon, la partie 4 détaille la construction pratique d'un modèle à partir de données expérimentales, puis la réalisation de simulations temporelles en étudiant tout particulièrement les propriétés de dispersion et de dissipation du schéma numérique proposé, au regard des choix de discrétisation.

2 Modélisation temporelle par filtrage numérique

2.1 Problème modèle

Avant toute chose, précisons que l'ensemble des développements ici présentés a été réalisé dans le cadre de problèmes unidimensionnels. Nous les illustrerons tout au long de cet article dans le contexte des vibrations longitudinale d'une poutre (masse volumique ρ, longueur L) sous l'hypothèse des petites perturbations (fig. 1). En notant $u(x,t)$, $\varepsilon(x,t)$ et

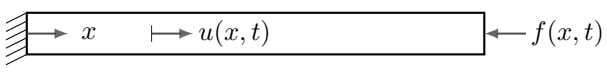


FIGURE 1 – Barre impactée

$\sigma(x,t)$ les champs de déplacement, déformation et contrainte, respectivement, les équations du problème s'écrivent :

$$\sigma(x,t) = \mathcal{E}\left(\varepsilon(x,t)\right) = \mathcal{E}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right), \tag{1a}$$

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} + f(x,t), \tag{1b}$$

où $\mathcal{E}$ désigne la relation de comportement du milieu et $f(x,t)$ un champ d'efforts appliqués à la structure.

1. $\eta(f) = \mathcal{I}m(E^\star(f))/\mathcal{R}e(E^\star(f))$

Par ailleurs, la poutre sera considérée comme encastrée-libre sur ses extrémités, de sorte que $u(x,0) = 0$ et $\sigma(x,L) = 0$.

2.2 Loi de comportement en temps discret

Par la suite, on considère une loi de comportement $\mathcal{E}$ locale, linéaire et invariante dans le temps, que l'on décide de représenter dans le domaine des temps discrets à l'aide d'un filtre numérique noté $\mathcal{H}$. Pour cela, nous introduisons une discrétisation temporelle de pas Δt correspondant à une fréquence d'échantillonnage $f_s = \Delta t^{-1}$ et nous notons $\sigma^n(x) = \sigma(x,t^n)$ et $\varepsilon^n(x) = \varepsilon(x,t^n)$ les valeurs des champs de contrainte et de déformation au piquet de temps $t^n = n\Delta t$. Sous les hypothèses précédemment énoncées pour $\mathcal{E}$, le filtre $\mathcal{H}$ peut alors s'écrire de la manière la plus générale comme une relation de récurrence entre σ^n et ε^n ainsi que leurs valeurs aux piquets de temps précédents :

$$\sigma^{n+1}(x) = H_0\left(\varepsilon^{n+1}(x) + \sum_{l=1}^{N_c} c_l \varepsilon^{n+1-l}(x)\right) - \sum_{m=1}^{N_d} d_m \sigma^{n+1-m}(x). \quad (2)$$

Afin de synthétiser le filtre à partir de données fréquentielles tout en respectant les contraintes de stabilité, causalité et dissipation positive, on étudie par la suite le filtre $\mathcal{H}$ à travers sa fonction de transfert $H(z)$ dans le domaine fréquentiel discret (plan des z), usuellement obtenue par l'application de la transformée en Z à la relation (2). Il vient :

$$H(z) = \frac{\hat{\sigma}(x,z)}{\hat{\varepsilon}(x,z)} = H_0\left[\frac{1+\sum_{l=1}^{N_c} c_l z^{-l}}{1+\sum_{m=1}^{N_d} d_m z^{-m}}\right]. \quad (3)$$

La fonction de transfert peut également s'exprimer en fonction des pôles p_m et des zéros q_l du filtre :

$$H(z) = H_0\left[\frac{\prod_{l=1}^{N_c}(1-q_l z^{-1})}{\prod_{m=1}^{N_d}(1-p_m z^{-1})}\right]. \quad (4)$$

L'intérêt de cette écriture provient du fait qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité et de causalité du filtre $\mathcal{H}$ porte sur les pôles p_m de sa fonction de transfert [7] :

$$|p_m| \leq 1, \ \forall 1 \leq m \leq N_d. \quad (5)$$

Par la suite, on choisit de construire le filtre par une association en parallèle d'un gain pur H_0 et de N_f filtres à 1 pôle simple p_k. La fonction de transfert associée s'écrit :

$$H(z) = H_0 + \sum_{k=1}^{N_f} H_k(z) = H_0 + \sum_{k=1}^{N_f} \frac{H_{0k}}{1-p_k z^{-1}} \quad (6)$$

Remarquons que ce choix correspond à une forme particulière de l'écriture (4) correspondant à $N_c = N_d$ et $p_m \neq p_{m'}$ pour $m \neq m'$ (pôles simples).

A ce stade, compte tenu de la définition (2), il est possible de rapprocher la réponse continue $H^c(\omega)$ du filtre H pour $\omega \in [0, f_s/2]$, qui s'obtient à travers la transformation $z \leftarrow \exp(i\omega f_s^{-1})$, à un module d'élasticité complexe que l'on définit comme :

$$H^c(\omega) = H\left(\exp(i\omega f_s^{-1})\right) = H_r^c(\omega) + iH_i^c(\omega). \quad (7)$$

Par la suite, $\mathcal{H}$ est alors synthétisé par minimisation de la distance entre H^c et un ensemble $\{\omega_k, E_k^*\}_k$ de valeurs de module complexe pour diverses pulsations, selon une procédure d'optimisation sous contraintes détaillée dans la partie 4.

3 Schéma numérique

Cette partie s'attache à introduire et analyser un schéma explicite pour la résolution numérique de problèmes formulés à l'aide du filtre $\mathcal{H}$. Pour des raisons de simplicité, ce schéma est mis en place dans le cadre du problème unidimensionnel (1), mais rien n'empêche *a priori* son extension à d'autre types de problèmes linéaires (poutre en flexion, élasto-dynamique 3D) ainsi qu'à une formulation par éléments finis.

3.1 Formulation

Pour se faire, on conserve la discrétisation temporelle introduite en partie 2.2 et l'on construit une discrétisation spatiale à l'aide de deux grilles décalées (fig. 2). La première, notée $\Omega_{h,0}$, sur laquelle on approche les champs u et f, est obtenue par division de l'intervalle $[0,L]$ en N_h points $x_j = jh$ avec un pas uniforme $h = L/N_h - 1$. La seconde, notée $\Omega_{h,1/2}$ et sur laquelle on approche les champs ε et σ, est constituée par les points $x_{j+\frac{1}{2}} = (j+\frac{1}{2})h$. On introduit également

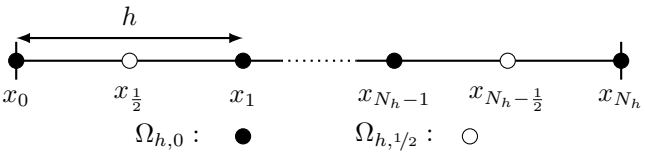


FIGURE 2 – Discrétisation spatiale

les opérateurs $\mathbf{D}_h$ (resp. $\mathbf{D}_h^*$) qui associent à tout champ discret définit sur $\Omega_{h,0}$ (resp. $\Omega_{h,1/2}$) l'approximation centrée à l'ordre 2 de sa dérivée première spatiale, définie sur $\Omega_{h,1/2}$ (resp. $\Omega_{h,0}$) :

$$\mathbf{D}_h \mathbf{v}_h^n = \left[\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h}\right]_j, \quad \mathbf{D}_h^* \mathbf{w}_h^n = \left[\frac{w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{h}\right]_j,$$

où $\mathbf{v}_h^n$ désigne le vecteur des valeurs discrètes de v sur $\Omega_{h,0}$ au piquet de temps t^n. Du point de vue temporel, l'équation dynamique (1b) est approchée par un schéma d'ordre 2 de type « saute mouton ». Concernant la loi de comportement discrète, la transposition temporelle du filtre (6) s'effectue en remarquant que les termes z^{-1} figurant dans la fonction de transfert H sont associés à des retards unitaires de Δt dans le domaine temporel. Finalement, en notant $\mathbf{u}_h^n$, $\mathbf{f}_h^n$, $\boldsymbol{\sigma}_h^n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_h^n$ les champs approchés au piquet de temps t^n, respectivement, le

schéma numérique s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}_{hk}^{n+1} = H_{0k}\mathbf{D}_h\mathbf{u}_h^{n+1} + p_k\boldsymbol{\sigma}_{hk}^n,$$
$$\boldsymbol{\sigma}_h^{n+1} = H_0\mathbf{D}_h\mathbf{u}_h^{n+1} + \sum_{k=1}^{N_f}\boldsymbol{\sigma}_{hk}^{n+1}, \quad (8a)$$
$$\rho\frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - 2\mathbf{u}_h^n + \mathbf{u}_h^{n-1}}{\Delta t^2} = \mathbf{D}_h^*\boldsymbol{\sigma}_h^n + \mathbf{f}_h^n. \quad (8b)$$

Remarquons que la loi de comportement discrète (8a) fait intervenir N_f variables internes $\boldsymbol{\sigma}_{hk}^n$ régies indépendemment par des relations de récurrence qui sont la transposition temporelle de chacun des filtres élémentaires $H_k(z)$ introduits en (6). D'un point de vue mécanique, cette formulation peut être rapprochée des modèles rhéologiques à variables internes classiquement utilisés pour représenter des lois de comportement visco-élastiques [8].

3.2 Analyse énergétique

On choisit d'analyser le schéma (8) ainsi introduit à l'aide d'une méthode énergétique consistant à étudier sa capacité à conserver une énergie discrète [2] et qui, une fois appliquée en s'inspirant des travaux de [9], conduit à l'identité énergétique suivante :

$$\frac{E_h^{n+\frac{1}{2}} - E_h^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = P_h^n - D_h^n. \quad (9)$$

On obtient ainsi une expression reliant la variation d'une énergie discrète E_h entre les piquets de temps $t^{n+1/2}$ et $t^{n-1/2}$ aux puissances P_h^n et D_h^n au piquet de temps t^n provenant des forces extérieures et de la dissipation interne introduite par le filtre $\mathcal{H}$, respectivement. Par soucis de concision, les termes $E_h^{n+\frac{1}{2}}$, P_h^n et D_h^n, qui font intervenir l'ensemble des variables du schéma (8), ne sont pas détaillés ici, tout comme les développements mathématiques fastidieux conduisant à l'obtention de l'identité (9).

Par la suite, le respect des conditions $E_h^{n+\frac{1}{2}} \geq 0$ et $D_h^n \geq 0$ de positivité de l'énergie et de la dissipation se traduit, dans le cadre de la vérification des conditions essentielles de stabilité et causalité (5), par les conditions supplémentaires suivantes :

$$H^c(0) \geq 0, \quad (10a)$$
$$H_{0k}p_k \leq 0, \quad \forall k \in [\![1, N_f]\!], \quad (10b)$$
$$h \geq h_{\min} = \frac{1}{f_s}\sqrt{\frac{H^c(\pi f_s)}{\rho}}. \quad (10c)$$

Les inégalités (10a) et (10b) portant sur les paramètres du filtre sont des conditions suffisantes permettant d'assurer son caractère dissipatif sur la bande de fréquence de la simulation, soit en introduisant son facteur de perte $\eta_H(\omega)$ comme le rapport des parties imaginaires et réelles :

$$\eta_H(\omega) = \frac{H_i^c(\omega)}{H_r^c(\omega)} \geq 0, \quad \forall\omega \in [0, \pi f_s]. \quad (11)$$

La dernière inégalité (10c) est une condition classique de type CFL portant sur les paramètres de la simulation et faisant intervenir la réponse du filtre pour la plus grande pulsation $\omega = \pi f_s$ représentable par la discrétisation temporelle choisie en vertu du théorème de Nyquist-Shannon. Remarquons que la fonction H_r^c étant réelle pour $\omega = \pi f_s$ et strictement monotone croissante sur $[0, \pi f_s]$ sous les conditions (5), (10a) et (10b), elle atteint sa valeur maximale en $\omega = \pi f_s$ de sorte que le rapport $\sqrt{H^c(\pi f_s)/\rho}$ désigne la célérité maximale des ondes longitudinales représentées par le schéma numérique.

3.3 Analyse de la dispersion et de la dissipation

L'analyse de la dispersion du schéma numérique (8) est obtenue par une approche classique, en considérant l'évolution d'une onde propagative discrète $\mathbf{u}_h^n = [w^n \exp(ijk_h^* h)]_j$ (avec $i = \sqrt{-1}$), où le nombre d'onde k_h^* est considéré complexe afin de représenter à la fois les effets de dispersion et de dissipation du schéma numérique. Après avoir injecté $\mathbf{u}_h^n$ dans (8) et appliqué la transformée en Z à l'ensemble, la relation de dispersion est obtenue dans le domaine fréquentiel continu en appliquant le changement de variable $z \leftarrow \exp(i\omega f_s^{-1})$. Il vient après calculs :

$$k_h^*(\omega) = k_{hr}(\omega) + ik_{hi}(\omega) \quad (12)$$
$$= \pm\frac{2}{h}\arcsin\left[\frac{h}{\Delta t}\sqrt{\frac{\rho}{H^c(\omega)}}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right].$$

Ce résultat permet de définir une célérité c_h et un coefficient d'amortissement α_h discrets à travers les relations :

$$c_h(\omega) = \frac{\omega}{k_{hr}(\omega)}, \qquad \alpha_h(\omega) = \omega\frac{k_{hi}(\omega)}{k_{hr}(\omega)}. \quad (13)$$

Dans la suite de l'article, on comparera la dispersion du schéma numérique à celle d'un problème de référence constitué par les équations continues (1) avec une loi de comportement (1a) définie dans le domaine fréquentiel comme la réponse fréquentielle continue $H^c(\omega)$ du filtre numérique $\mathcal{H}$, soit en termes de module d'élasticité complexe :

$$\tilde{\sigma}(\omega, t) = H^c(\omega)\tilde{\varepsilon}(\omega, t). \quad (14)$$

Dans ce cas, la relation de dispersion du problème continu s'écrit :

$$k^*(\omega) = k_r(\omega) + ik_i(\omega) = \sqrt{\frac{\rho}{H^c(\omega)}}\omega. \quad (15)$$

On définit alors par la suite les erreurs relatives de dispersion e_r^k et de dissipation e_i^k par :

$$e_r^k(\omega) = \frac{|k_r(\omega) - k_{hr}(\omega)|}{|k_r(\omega)|}, \quad e_i^k(\omega) = \frac{|k_i(\omega) - k_{hi}(\omega)|}{|k_i(\omega)|}. \quad (16)$$

Remarquons que ces erreurs dépendent simultanément des paramètres de discrétisation spatiale h et temporelle f_s, mais aussi de la réponse $H^c(\omega)$ du filtre $\mathcal{H}$ dans le domaine fréquentiel continu.

4 Exemple d'application

A titre d'illustration numérique, reprenons le problème modèle unidimensionnel (1) illustré figure 1 en considérant une barre en nylon de longueur $L = 1\,\mathrm{m}$ et de masse volumique $\rho = 1149\,\mathrm{kg/m^3}$, excitée en son extrémité droite par un impact que nous modéliserons par une impulsion de type dirac en $t = 0$ ($f(x,t) = \delta(x)\delta(t)$). On souhaite simuler la réponse de la poutre dans la bande fréquentielle $[20\,\mathrm{Hz}, 20\,\mathrm{kHz}]$ des signaux audibles en respectant un critère d'erreur de 5% sur la dispersion et la dissipation.

Afin de synthétiser le filtre $\mathcal{H}$ représentant la loi de comportement en temps discret du milieu, on utilise des valeurs de module complexe obtenues expérimentalement sur un échantillon en nylon par Collet et coll. [5] à l'aide d'une technique de barres impactées. La première étape du processus de simulation consiste à choisir une fréquence d'échantillonnage f_s compatible avec les diverses exigences du problème. En particulier, f_s doit être commune aux étapes de synthèse et de simulation, la réponse d'un filtre numérique n'étant évidemment valable que pour une discrétisation temporelle de même fréquence d'échantillonnage que celle utilisée pour le processus de synthèse. Une fois l'étape de synthèse effectuée, la condition CFL (10c) permet de déterminer le pas d'espace h optimal pour le problème, puis d'accéder aux erreurs de dispersion e_r^k et de dissipation e_i^k permettant de vérifier *a posteriori* la satisfaction des critères d'erreur requis, et/ou de modifier la valeur de f_s le cas échéant.

A ce stade, et compte tenu des commentaires énoncés, on choisit *a priori* une fréquence d'échantillonnage initiale f_s de 180 kHz, soit un rapport de 9 par rapport à la fréquence maximum de la bande fréquentielle considérée. Précisons par ailleurs que les processus de synthèse et de simulation ont été réalisés à l'aide du langage GNU Octave.

4.1 Synthèse du filtre

A partir d'un ensemble de données fréquentielles de module d'élasticité complexe $\{\omega_k, E_k^*\}_k$, le filtre $\mathcal{H}$ est synthétisé par une procédure d'optimisation sous contraintes, comme mentionné dans la partie 2.2. En notant $X = \left[H_0, \{H_{0,k}, p_k\}_k\right]^T$ l'ensemble des paramètres (gains statiques et pôles) du filtre, le problème s'écrit de manière générique comme :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } X \text{ minimisant} && \mathcal{L}(X), \\ &\text{sous les contraintes} && \mathcal{C}_i(X) > 0, \end{aligned} \tag{17}$$

avec $\mathcal{L}$ une fonctionnelle qui mesure la distance entre les données expérimentales et la réponse continue du filtre numérique. En pratique, on choisit d'évaluer l'erreur en norme 2 sur les parties réelle et imaginaire de la réponse, soit :

$$\mathcal{L}(X) = \alpha_r \left[\sum_{j=1}^{N_f} \left(\frac{H_r^c(\omega_j) - \mathcal{R}e\left(E_j^*\right)}{\mathcal{R}e\left(E_j^*\right)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{N_f} \left(\frac{H_i^c(\omega_j) - \mathcal{I}m\left(E_j^*\right)}{\mathcal{I}m\left(E_j^*\right)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

où α_r et α_i sont des coefficients de pondération. De plus, les conditions de stabilité et causalité (5) ainsi que de dissipation positive (10a) et (10b) sont imposées à travers les contraintes d'inégalité $\mathcal{C}_i(X)$.

Notons que le problème résultant est non linéaire, non convexe et possédant de nombreux minima locaux. Sa résolution est effectuée à l'aide d'un algorithme de programmation quadratique séquentielle implanté dans la fonction `sqp` de GNU Octave. Le processus de synthèse du filtre est alors réalisé de manière itérative pour des valeurs croissantes de N_f jusqu'à obtenir la stationnarité de l'erreur associée à $\mathcal{L}$.

La figure 3 présente la réponse du filtre $\mathcal{H}$ à l'issue du processus de synthèse, pour $N_f = 4$, correspondant à une erreur $\mathcal{L}(X_{\mathrm{sol}}) = 0.5$, tandis que le détail des coefficients est récapitulé dans le tableau 1.

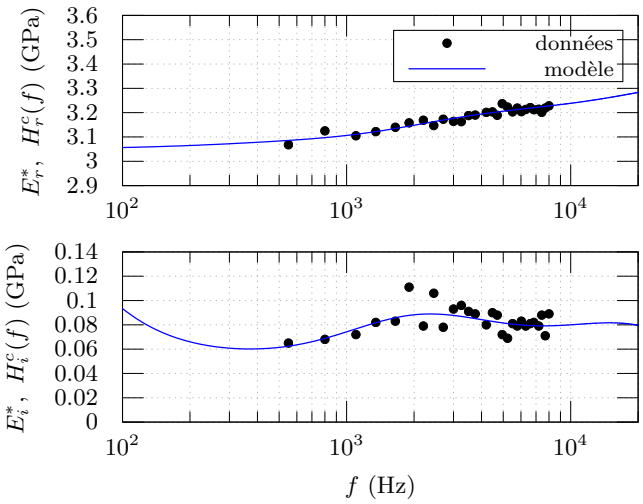


FIGURE 3 – Partie réelle (haut) et imaginaire (bas) des données expérimentales $\{\omega_k, E_k^*\}_k$ [5] et de la réponse $H^c(\omega)$ du filtre pour $N_f = 4$.

$H_0, H_{0,k}$	p_k
$3,4299.10^9$	
$-2,8670.10^5$	$9,8987.10^{-1}$
$-2,7138.10^5$	$9,9991.10^{-1}$
$-1,0050.10^7$	$9,2889.10^{-1}$
$-1,0941.10^8$	$4,6631.10^{-1}$

TABLEAU 1 – Coefficients du filtre $\mathcal{H}$ pour $N_f = 4$.

4.2 Simulation numérique

Une fois le filtre synthétisé, on procède à l'intégration numérique du problème discret (8) pour un pas

temporel cohérent avec la fréquence d'échantillonnage du processus de synthèse, soit $\Delta t = f_s^{-1}$. Du caractère explicite du schéma découle la condition CFL (10c) fixant une valeur minimale $h_{\min}$ de pas de discrétisation spatiale permettant de garantir la stabilité de la simulation. Le pas de maille h est alors choisi comme la plus petite valeur $h \geq h_{\min}$ compatible avec une discrétisation spatiale uniforme de la poutre, soit en notant $E(Y)$ la partie entière de Y :

$$h = \frac{L}{N_e}, \quad \text{avec} \quad N_e = E\left(\frac{L}{h_{\min}}\right) + 1$$

Par ailleurs, remarquons dans la relation (10c) la proportionnalité entre la valeur minimale de pas de maille $h_{\min}$ et la valeur $\sqrt{H^c(\pi f_s)}$. Cela suggère, afin d'obtenir la meilleure approximation spatiale possible, de limiter autant que possible l'amplitude de $\sqrt{H^c(\pi f_s)}$ sans pour autant dégrader la qualité de la représentation du comportement. Cette condition sera d'autant plus utile dans le cas de figure où la valeur de $f_s/2$ se situe bien au delà de la bande fréquentielle correspondant aux données d'entrée du processus d'optimisation, et l'exigence peut alors être intégrée dans le processus d'optimisation à travers une contrainte d'inégalité supplémentaire de la forme $H^c(\pi f_s) \leq H^c_{\max}$.

Afin de comparer par la suite l'influence du choix de h sur la dispersion et la dissipation du schéma, on introduit le rapport $\text{CFL} = h/h_{\min}$, tel que CFL=1 dans le cas idéal correspondant à $h = h_{\min}$.

Pour le problème considéré, on obtient une taille de maille minimale de $9,52\,\text{mm}$, correspondant à un facteur CFL de 1,004. La figure 4 (courbe bleue) représente l'évolution temporelle de la réponse de la poutre au point d'observation $x_{\text{obs}} = L/2$, tandis que la figure 5 représente le spectre associé, en terme de niveau de puissance normalisée L_U^N défini par :

$$L_U^N = 20\log_{10}\left(\frac{\tilde{u}(x_{\text{obs}}, f)}{\max_f \tilde{u}(x_{\text{obs}}, f)}\right).$$

Afin d'étudier le comportement du schéma numérique vis à vis des aspects dispersion et dissipation, on représente sur la figure 6, pour le cas idéal à CFL=1 (courbe noire) ainsi que pour la simulation à CFL=1,004 (courbe bleue), les erreurs relatives e_r^k et e_i^k sur les parties réelles et imaginaires du nombre d'onde, telles que définies par les relations (16). On remarque que l'erreur sur la partie réelle du nombre d'onde, à relier à la vitesse de phase des ondes représentées, reste inférieure à 1 % sur la quasi-totalité de la bande fréquentielle $[0, f_s/2]$. Cependant, la comparaison avec la courbe idéale nous montre une importante variation de e_r^k, et ce malgré une très faible augmentation du coefficient CFL. Concernant la partie imaginaire du nombre d'onde, on constate que l'erreur relative est 10 fois plus importante que pour la partie réelle, ce qui tend à montrer que l'exigence de précision sur la dissipation est déterminante dans le choix de f_s. En revanche, l'augmentation du coefficient CFL a ici moins d'influence, les valeurs de e_i^k à CFL=1 et CFL=1,004 étant quasiment confondues. En tout état de cause, pour la fréquence d'échantillonnage choisie, les erreurs relatives sont de 0,06 % pour e_r^k et de 4,46 % pour e_i^k à 20 kHz, ce qui valide *a posteriori* le choix de f_s au regard des critères de précision énoncés en début de partie.

A partir de la relation de dispersion (15), on peut par ailleurs établir l'expression $\lambda(f)$ de la longueur d'onde du problème continu en fonction de f, soit :

$$\lambda(f) = c(f) f^{-1} = \frac{\mathcal{R}e\left(\sqrt{H^c(f)}\right)}{f\sqrt{\rho}}.$$

Il est alors intéressant de comparer la valeur de h à celle de la plus petite longueur d'onde que l'on souhaite représenter, soit $\lambda(f)$ pour $f = 20\,\text{kHz}$, qui vaut $\lambda_{\min} = 84,53\,\text{mm}$. On en déduit que discrétisation choisie correspond à une résolution spatiale minimale $\lambda_{\min}/h$ d'environ 8 points par longueur d'onde représentable.

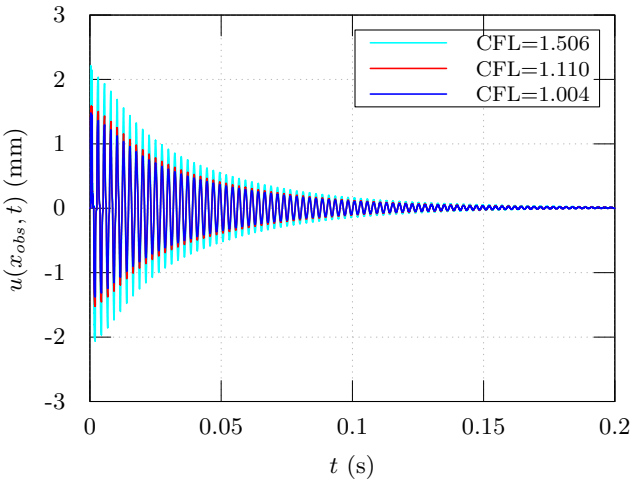


FIGURE 4 – Évolution temporelle $u(x_{\text{obs}}, t)$ à CFL=1,004 (bleu), CFL=1,110 (rouge) et CFL=1,506 (cyan).

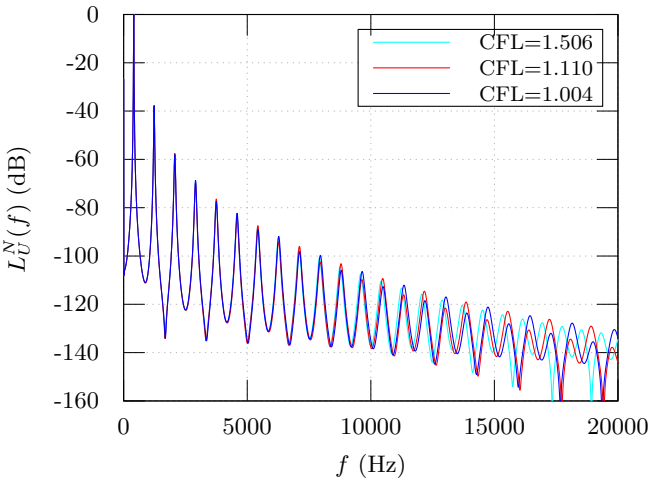


FIGURE 5 – Spectre du niveau de puissance L_U^N à CFL=1,004 (bleu), CFL=1,110 (rouge) et CFL=1,506 (cyan).

Enfin, dans le but d'étudier l'influence du choix de la taille de maille sur la qualité de la solution en

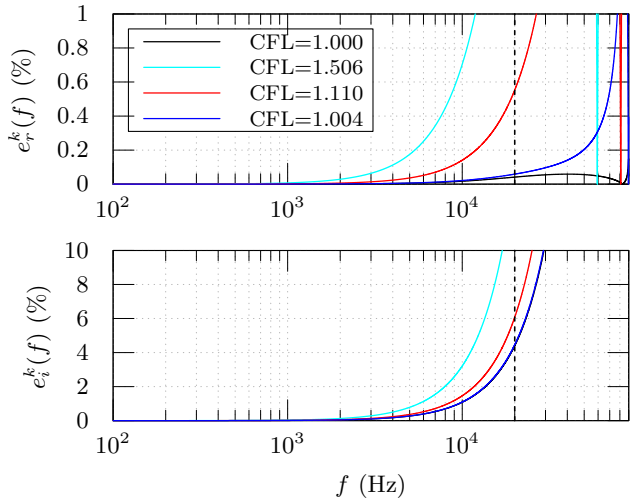


FIGURE 6 – Erreur sur la dispersion (haut) et la dissipation (bas) à CFL=1 (noir), CFL=1,004 (bleu), CFL=1,110 (rouge) et CFL=1,506 (cyan).

terme d'erreur sur la dispersion, deux simulations supplémentaires sont réalisées, pour des tailles de maille de $h = 10,53\,\text{mm}$ et de $h = 14,29\,\text{mm}$, correspondant à des coefficients CFL de 1,110 et de 1,506, respectivement. La figure 6 montre une importante sensibilité de l'erreur sur la dispersion à l'augmentation du rapport CFL qui confirme les tendances précédemment observées, avec des erreurs à 20kHz de 0,55 % à CFL=1,110 et de 3,04 % à CFL=1,506. En outre, l'influence de ces erreurs est visible à partir de 12 kHz et 8 kHz, respectivement, sur le spectre de la figure 5. L'augmentation est également visible concernant l'erreur sur la dissipation, avec des valeurs beaucoup plus élevées, de 6,08 % à CFL=1,110 et de 14,72 % à CFL=1,506. En outre, l'influence de cette erreur est particulièrement visible dès CFL=1,110 sur la figure 4, se traduisant par une sous-représentation des phénomènes dissipatifs.

5 Conclusions

Ce travail présente une nouvelle approche de modélisation temporelle des propriétés d'amortissement des matériaux dont l'originalité repose sur la construction d'un modèle de comportement en temps discret assimilable à un filtre numérique. La synthèse de celui-ci est réalisée à partir de données fréquentielles portant sur le module d'élasticité complexe du matériau à modéliser, par un processus d'optimisation de la réponse fréquentielle en temps continu du filtre. L'ajout de contraintes supplémentaires sur les coefficients du filtre durant ce processus d'optimisation permet de satisfaire aux propriétés de causalité, stabilité et d'adéquation aux principes de la thermodynamique lors de sa transposition dans le domaine temporel discret, qui se présente alors sous la forme d'une relation de récurrence. En outre, le choix de construction du filtre à partir de l'association en parallèle de filtres élémentaires à pôle simple permet d'en proposer une implantation dans un schéma numérique duquel peut être déduite une identité énergétique discrète. Il est ensuite possible de quantifier les erreurs commises sur la dispersion et la dissipation du schéma numérique obtenu et de maîtriser ces dernières par un choix optimal des paramètres de discrétisation spatiale et temporelles, ainsi que du comportement du filtre dans les hautes fréquences.

Pour l'heure, l'approche a été développée sur le problème unidimensionnel des vibrations longitudinales d'une barre en présence d'un schéma de résolution par différences finies en espace et en temps. Signalons cependant qu'il n'y a *a priori* pas d'obstacle majeur à son extension à des problèmes en dimension supérieure, ainsi qu'en présence d'une approximation spatiale de type éléments finis. Ce point fera notamment l'objet de futurs développements.

Références

[1] S. CRANDALL. "The role of damping in vibration theory". In : *Journal of Sound and Vibration* 11.1 (1970), p. 3. DOI : 10.1016/S0022-460X(70)80105-5.

[2] S. BILBAO. *Numerical Sound Synthesis*. 1re éd. Wiley, 2009. ISBN : 9780470510469.

[3] C. LAMBOURG, A. CHAIGNE et D. MATIGNON. "Time-domain simulation of damped impacted plates. II. Numerical model and results". In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 109.4 (2001), p. 1433–1447. DOI : 10.1121/1.135420.

[4] A. C. GALUCIO, J.-F. DEÜ et R. OHAYON. "Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators". In : *Computational Mechanics* 33.4 (2004), p. 282. DOI : 10.1007/s00466-003-0529-x.

[5] P. COLLET, G. GARY et B. LUNDBERG. "Noise-Corrected Estimation of Complex Modulus in Accord With Causality and Thermodynamics : Application to an Impact Test". In : *Journal of Applied Mechanics, vol. 80, issue 1, p. 011018* 80 (jan. 2013), p. 1018. DOI : 10.1115/1.4007081.

[6] A. PARRET-FRÉAUD, B. COTTÉ et A. CHAIGNE. "Modèles temporels d'amortissement en vibroacoustique appliqués à des matériaux viscoélastiques". In : *CFM 2013, 21e congrès français de mécanique.* 2013.

[7] J. O. SMITH. *Introduction to Digital Filters with Audio Applications*. Music signal processing series. W3K Publishing, 2007. ISBN : 9780974560717.

[8] R. M. CHRISTENSEN. *Theory of Viscoelasticity*. Civil, Mechanical and Other Engineering Series. Dover, 2003. ISBN : 9780486428802.

[9] E. BÉCACHE, A. EZZIANI et P. JOLY. "A mixed finite element approach for viscoelastic wave propagation". In : *Computational Geosciences* 8.3 (2005), p. 255. DOI : 10.1007/s10596-005-3772-8.