



**HAL**  
open science

# Construction auto-stabilisante silencieuse optimale en mémoire d'arbres couvants de degré minimum

Lélia Blin, Pierre Fraigniaud

► **To cite this version:**

Lélia Blin, Pierre Fraigniaud. Construction auto-stabilisante silencieuse optimale en mémoire d'arbres couvants de degré minimum. ALGOTEL 2014 – 16èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications, Jun 2014, Le Bois-Plage-en-Ré, France. pp.1-4. hal-00983011

**HAL Id: hal-00983011**

**<https://hal.science/hal-00983011>**

Submitted on 24 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Construction auto-stabilisante silencieuse optimale en mémoire d'arbres couvrants de degré minimum

Lélia Blin<sup>1†</sup> Pierre Fraigniaud<sup>2‡</sup>

<sup>1</sup> LIP6, Université d'Evry-Val d'Essonne et Université Pierre et Marie Curie.

<sup>2</sup> LIAFA, CNRS et Université Paris Diderot.

---

Motivé, entre autres, par des applications relatives aux réseaux de capteurs, cet article étudie la construction d'arbres couvrants de degré minimum. Nous nous plaçons dans le modèle classique, à états avec un registre par nœud, sous le contrôle d'un ordonnanceur distribué faiblement équitable. Nous présentons un algorithme auto-stabilisant *silencieux* optimal en mémoire pour la construction d'arbres couvrants de degré minimum. Construire un arbre couvrant de degré minimum est NP-difficile. Nous focalisons donc en fait notre étude sur la construction d'arbres couvrants dont le degré est à au plus +1 de l'optimal. Notre algorithme utilise un registre de  $O(\log n)$  bits en chaque nœud, où  $n$  dénote le nombre de nœuds du réseau. Il converge en un nombre de rondes polynomial en  $n$ , et effectue des calculs polynomiaux en  $n$  sur chaque nœud. Plus spécifiquement, notre algorithme construit et se stabilise sur une sous-classe particulière d'arbres couvrants de degré au plus  $\text{OPT} + 1$ . En effet, nous montrons que, sauf si  $\text{NP} = \text{co-NP}$ , il n'existe pas de certification distribuée de la classe entière des arbres couvrants de degré au plus  $\text{OPT} + 1$  impliquant des calculs polynomiaux en chaque nœud. A notre connaissance, ceci est le premier exemple de conception d'algorithmes auto-stabilisants silencieux et compacts se stabilisant sur un sous-ensemble de solutions à un problème naturel pour lequel il n'existe pas de certificat distribué polynomial de l'ensemble de toutes les solutions. Afin de concevoir notre algorithme, nous mettons en évidence une série de résultats intermédiaires pouvant avoir chacun leur propre intérêt. En particulier, nous décrivons un nouvel algorithme auto-stabilisant silencieux optimal en mémoire pour la construction d'arbres couvrants quelconques, convergeant en  $O(n)$  rondes et utilisant seulement 1 bit additionnel comparé à la taille des étiquettes utilisées pour certifier les arbres. Nous décrivons également un algorithme auto-stabilisant silencieux et sans cycle pour transformer tout arbre en tout autre arbre. Enfin, nous décrivons un algorithme auto-stabilisant pour construire et certifier les étiquettes d'un schéma d'étiquetage pour le plus petit ancêtre commun dans les arbres.

La version complète de cet article est disponible sur arXiv (rapport 1402.2496) – voir [4].

---

## 1 Contexte et objectif

L'auto-stabilisation traite de la conception d'algorithmes distribués pour des systèmes dans lesquels les processus sont sujets à des pannes *transitoires*. L'objectif principal de l'auto-stabilisation est d'évaluer la capacité d'un système distribué asynchrone à subir des pannes, à revenir dans un état légal à partir d'un état de départ quelconque, et à rester dans un état légal lorsqu'un état légal est atteint. La légalité d'un état est une notion qui dépend de la tâche à résoudre, comme par exemple, dans le cas de l'élection d'un leader, la présence d'un unique leader qualifie la légalité d'un état.

Une propriété désirable pour un algorithme auto-stabilisant est d'être *silencieux* [6], c'est-à-dire de garantir que l'état de chaque processus reste identique dès qu'un état (global) légal a été atteint. En effet, une telle propriété garantit que l'auto-stabilisation ne surcharge pas le système avec un trafic important entre les processus lorsque ce système est dans un état légal. La conception d'algorithmes auto-stabilisants silencieux est difficile car il faut s'assurer que chaque processus soit capable de décider *localement* de la

---

<sup>†</sup>Support du projet ANR IRIS.

<sup>‡</sup>Support du projet ANR DISPLEXITY, et du projet INRIA GANG.

légalité d'un état (global) du système, en se basant uniquement sur son état individuel et sur les états individuels de ses voisins. Cette difficulté est encore plus aigüe lorsque l'on prend en compte une mesure de complexité pertinente pour les algorithmes auto-stabilisants : la complexité *spatiale*, c'est-à-dire la place mémoire requise en chaque processus pour stocker ses variables [3, 6]. Préserver une mémoire limitée en chaque processus réduit d'autant la capacité de corruption de cette mémoire, et peut en particulier permettre de maintenir des copies redondantes des variables (par exemple, dans un objectif de tolérance aux pannes) sans être dommageable à l'efficacité du système. De plus, dans le modèle classique à états avec un registre par processus (tel qu'utilisé dans cet article), préserver un espace mémoire limité par processus permet à chaque processus de lire les variables dans les registres de ses voisins sans consommer une bande passante trop importante.

Cet article est dédié à la conception d'algorithmes auto-stabilisants silencieux et utilisant un espace mémoire limité, dans le modèle à état avec un registre par processus, sous le contrôle d'un ordonnanceur distribué faiblement équitable. Plus spécifiquement, nous concentrons notre attention sur la conception d'algorithmes auto-stabilisants pour la construction d'*arbres couvrants* dans des réseaux. Dans ce contexte, chaque processus est un nœud d'un réseau modélisé par un graphe  $G = (V, E)$ . Dans le modèle à état avec un registre par processus, chaque nœud a accès en lecture/écriture à ses propres variables, et accès en lecture uniquement aux variables de ses voisins dans  $G$ . Notre objectif est de construire un arbre couvrant  $T$  de  $G$ . Classiquement, l'arbre  $T$  est enraciné en un nœud  $r$ , et est encodé de façon distribuée, chaque nœud  $v$  stockant l'identité  $p(v)$  de son parent dans  $T$ . (Le nœud  $r$  stocke  $p(r) = \perp$ ).

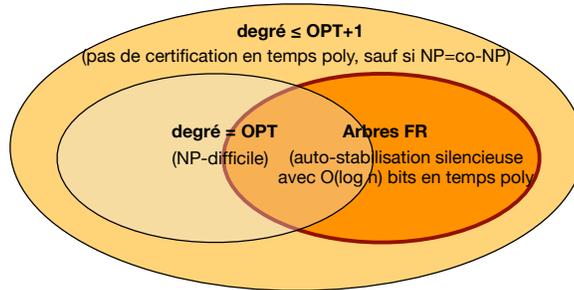
## 2 Certification distribuée d'arbres couvrants de degré minimum

Il existe une littérature abondante sur la construction auto-stabilisante de différents types d'arbres (voir [4] pour les références exactes). Ceci inclut par exemple les arbres couvrants en largeur d'abord (BFS), les arbres couvrants en profondeur d'abord (DFS), les arbres couvrants de poids minimum (MST), les arbres couvrants de diamètre minimal, ainsi que les arbres couvrants objets d'étude de cet article, à savoir les arbres couvrants de degré minimum [5]. Certaines de ces constructions sont même silencieuses et optimales en mémoire. Ces dernières sont implicitement ou explicitement basées sur un mécanisme connu sous le nom de *schéma de certification* [11].

Un schéma de certification pour une propriété  $\mathcal{P}$  affecte à chaque nœud une *étiquette* de façon à ce que, étant donné son étiquette et les étiquettes de ses voisins, chaque nœud puisse décider si  $\mathcal{P}$  est satisfaite ou pas. Plus précisément, si  $\mathcal{P}$  est satisfaite, alors tous les nœuds doivent décider « oui », sinon au moins un nœud doit décider « non ». Par exemple,  $\mathcal{P}$  peut être «  $H$  est un arbre couvrant de  $G$  », où  $H$  est un sous-graphe de  $G$  encodé de façon distribuée (chaque nœud  $v$  stockant un pointeur-parent  $p(v)$ ). Il existe plusieurs schémas de certification compacts et efficaces pour différents types d'arbres, incluant les arbres couvrants [11], les arbres BFS [1] et les arbres MST [10, 11]. Typiquement, dans le contexte de l'auto-stabilisation, un nœud détectant une inconsistance quelconque entre son étiquette et les étiquettes de ses voisins décide « non », et déclenche une procédure de rétablissement. Cette procédure doit assurer que le système retourne dans un état légal, et doit également assurer que les nœuds recalculent des étiquettes adéquates de façon à certifier la légalité de cet état. Dans cet article, nous nous intéressons à la construction auto-stabilisante polynomiale, silencieuse et compacte d'arbres appartenant à une famille d'arbres pour lesquels il est peu probable qu'il existe un schéma de certification polynomial.

Plus spécifiquement, nous concentrons notre attention sur la construction d'arbres couvrants de *degré minimum*. Ainsi, nous avons pour objectif la conception d'un algorithme qui, étant donné n'importe quel réseau  $G$ , construit un arbre couvrant  $T$  de  $G$  dont le degré (c'est-à-dire, le maximum pris sur tous les nœuds  $v$  de  $T$ , du degré de  $v$  dans  $T$ ) est minimum parmi tous les arbres couvrants de  $G$ . Notre intérêt pour ce problème est motivé par les études sur la conception de protocoles MAC pour les réseaux de capteurs sous la spécification 802.15.4 que nous menons actuellement avec nos partenaires STElectronics et Thales dans le cadre du projet IRIS [13]. Il convient également de noter que le problème de construction d'arbres couvrants de degré minimum est également au cœur de plusieurs contextes d'études, incluant les réseaux de communication [7] et bien d'autres domaines scientifiques [9].

Comme CHEMIN-HAMILTONIEN est NP-difficile, nous relaxons en fait légèrement notre tâche en nous



**FIGURE 1:** Trois classes d'arbres couvrants. Notre algorithme construit et se stabilise sur les arbres FR. Les deux autres classes sont difficiles pour l'auto-stabilisation silencieuse.

focalisant sur la construction d'arbres couvrants dont le degré est à au plus  $+1$  du degré minimum  $OPT$  du graphe courant. (La conception d'un algorithme auto-stabilisant de construction d'arbres couvrants de degré  $OPT$ , impliquant un temps de calcul polynomial en chaque nœud, et un nombre polynomial de rondes, est sans espoir, sauf si  $P = NP$ ).

Même s'il est séquentiellement possible de construire un arbre couvrant de degré au plus  $OPT + 1$  en temps polynomial [8], la conception d'un algorithme distribué pour cette tâche est un réel défi. Pour mesurer la difficulté du problème, notons  $\text{near-MDST}(G, T)$  le prédicat «  $T$  est un arbre couvrant de  $G$ , de degré au plus  $OPT + 1$  ». Nous avons montré [4] que, sauf si  $NP = \text{co-NP}$ , il n'existe pas de schéma de certification impliquant un temps de calcul polynomial en chaque nœud pour ce prédicat. Ce résultat négatif nous a conduit à questionner l'existence d'un algorithme auto-stabilisant silencieux, compact (i.e., espace logarithmique), et efficace en temps (i.e., temps de calcul polynomial en chaque nœud, et nombre polynomial de rondes) pour la construction d'arbres couvrants dont le degré est à au plus  $+1$  de l'optimal. Etonnement, nous répondons positivement à cette question *malgré l'absence d'un schéma de certification efficace pour cette classe d'arbres*.

### 3 Un aperçu de nos résultats

Dans [4], nous avons conçu (et prouvé la correction) d'un algorithme auto-stabilisant construisant et se stabilisant sur un arbre couvrant du réseau courant, dont le degré est à au plus  $+1$  du degré minimum de tout arbre couvrant de ce réseau. La complexité spatiale de l'algorithme est de  $O(\log n)$  bits de mémoire en chaque nœud de tout réseau de  $n$  nœuds, ce qui est optimal en conséquence directe de [6], et améliore considérablement la complexité spatiale  $O(n \log n)$  bits de [5]. A partir de tout état, l'algorithme converge vers un état légitime (c'est-à-dire un arbre couvrant de degré au plus  $OPT + 1$ ) en un nombre polynomial de rondes. Enfin, chaque étape de notre algorithme implique un temps de calcul polynomial en chaque nœud activé.

En fait, notre algorithme construit un type particulier d'arbres, que nous appelons *arbres FR* d'après Fürer et Raghavachari [8]. L'algorithme est une version distribuée de l'algorithme séquentiel de ces deux auteurs, et n'accepte que les arbres FR (voir la figure 1). Les arbres FR sont de degré au plus  $OPT + 1$ , mais les arbres de degré au plus  $OPT + 1$  qui ne sont pas des arbres FR sont rejetés par notre algorithme. Ainsi, même partant d'un arbre  $T$  de degré  $\leq OPT + 1$  mais différent d'un arbre FR, notre algorithme transforme  $T$  en un arbre FR  $T' \neq T$ , et se stabilise sur  $T'$ . Ce phénomène est inévitable car, comme nous l'avons indiqué précédemment, vérifier si un arbre couvrant est de degré  $\leq OPT + 1$  ne peut se faire en temps polynomial, sauf si  $NP = \text{co-NP}$ . En revanche, nous montrons qu'il existe un schéma de certification pour les arbres FR utilisant des étiquettes de  $O(\log n)$  bits.

Notre construction d'arbres FR est effectuée en utilisant plusieurs techniques qui peuvent chacune avoir un intérêt en soit. En particulier, nous avons conçu un nouvel algorithme auto-stabilisant silencieux convergent en  $O(n)$  rondes qui construit et se stabilise sur *n'importe quel* arbre couvrant. De plus, la racine de l'arbre devient explicitement un leader. Notre algorithme est simple (il n'implique que quatre règles) et

élégant (il n'utilise qu'un bit de plus que la taille des étiquettes utilisées pour certifier les arbres). Disposer d'un algorithme acceptant n'importe quel arbre couvrant est crucial pour notre algorithme de construction d'arbres couvrants de degré minimum car ce dernier procède par améliorations successives de l'arbre courant, dans le but de faire décroître son degré, ce qui peut impliquer n'importe quelle structure d'arbre. A notre connaissance, les constructions d'arbres couvrants précédemment connues stabilisent sur des formes spécifiques d'arbres (par exemple, BFS), ou sont conçues dans des modèles plus forts (par exemple, le modèle *semi-uniforme*, supposant la présence d'un leader). Aucune de ces constructions existantes n'étaient donc bien adaptées à notre contexte, dans lequel les arbres couvrants peuvent évoluer arbitrairement.

Par ailleurs, pour notre construction d'arbres couvrants de degré minimum, nous avons également conçu un algorithme auto-stabilisant silencieux *sans cycle* pour transformer tout arbre en tout autre arbre. Les algorithmes sans cycle existants pour cette tâche ne sont pas silencieux. Notre algorithme silencieux est basé sur un schéma de certification *redondant* des arbres. Grâce à ce schéma, il est possible de transformer un arbre  $T_1$  en un arbre  $T_2$  tout en préservant la capacité de certifier la propriété d'arbre couvrant à tout moment durant la transformation. Au contraire, les schémas de certification classiques nécessitent de recalculer les étiquettes après que la transformation ait été effectuée, et, surtout, ces étiquettes peuvent être incorrectes durant la transformation.

Enfin, notre algorithme de construction d'arbres couvrants de degré minimum utilise le schéma d'étiquetage informatif de [2] pour le plus petit ancêtre commun dans un arbre. A notre connaissance, c'est la première fois que ce schéma est utilisé dans un algorithme auto-stabilisant. De plus, l'utilisation de ce schéma de façon silencieuse nécessite de concevoir un schéma permettant de le certifier. C'est probablement la première utilisation d'un schéma de certification pour un schéma d'étiquetage informatif.

## 4 Discussion

Il serait intéressant de déterminer si les arbres FR forment la classe ultime d'arbres de degré  $\leq \text{OPT} + 1$  pour laquelle il existe un algorithme auto-stabilisant efficace. Nous avons montré que, sauf si  $\text{NP} = \text{co-NP}$ , on ne peut espérer concevoir un algorithme auto-stabilisant silencieux convergeant en temps polynomial vers la classe de tous les arbres couvrants de degré  $\leq \text{OPT} + 1$ . Il pourrait toutefois exister une sous-classe des arbres couvrants de degré  $\leq \text{OPT} + 1$  incluant les arbres FR, pour laquelle un algorithme auto-stabilisant silencieux efficace existe. Notons qu'il serait appréciable qu'une telle classe inclut l'ensemble des arbres couvrants de degré minimum. Nous laissons la recherche d'une telle classe comme problème ouvert.

## Références

- [1] Y. Afek, S. Kutten, and M. Yung. Memory-efficient self stabilizing protocols for general networks. In *4th Int. Workshop on Distributed Algorithms (WDAG)*, LNCS 486, Springer, pp15–28 (1990)
- [2] S. Alstrup, C. Gavoille, H. Kaplan, and T. Rauhe. Nearest Common Ancestors : A Survey and a New Algorithm for a Distributed Environment. *Theory of Comput. Systems* **37** :441–456 (2004)
- [3] J. Beauquier, M. Gradinariu, and C. Johnen. Memory Space Requirements for Self-Stabilizing Leader Election Protocols. In *18th ACM Symp. on Principles of Distributed Computing (PODC)*, pp199–207 (1999)
- [4] L. Blin et P. Fraigniaud. Polynomial-Time Space-Optimal Silent Self-Stabilizing Minimum-Degree Spanning Tree Construction. Rapport de recherche arXiv 1402.2496 (2014)
- [5] L. Blin, M. Gradinariu Potop-Butucaru, and S. Rovedakis. Self-stabilizing minimum degree spanning tree within one from the optimal degree. *J. Parallel Distrib. Comput.* **71**(3) :438–449 (2011)
- [6] S. Dolev, M. G. Gouda, and M. Schneider. Memory Requirements for Silent Stabilization. *Acta Informatica* **36**(6) :447–462 (1999)
- [7] P. Fraigniaud. Approximation Algorithms for Minimum-Time Broadcast under the Vertex-Disjoint Paths Mode. In *9th European Symposium on Algorithms (ESA)*, pp440–451 (2001)
- [8] M. Fürer and B. Raghavachari. Approximating the Minimum-Degree Steiner Tree to within One of Optimal. *J. Algorithms* **17**(3) : 409–423 (1994)
- [9] R. Kawatra. A multiperiod degree constrained minimal spanning tree problem. *European J. of Operational Research* **143** :53–63 (2002)
- [10] A. Korman, S. Kutten. Distributed verification of minimum spanning tree. *Dist. Computing* **20** : 253–266 (2007)
- [11] A. Korman, S. Kutten, and D. Peleg. Proof labeling schemes. *Dist. Computing* **22**(4) : 215–233 (2010)
- [12] D. Peleg. Informative labeling schemes for graphs. *Theor. Comput. Sci.* **340**(3) :577–593 (2005)
- [13] The IRIS project : <http://www.anr-iris.fr>.