



**HAL**  
open science

## Flambage et effet d'échelle dans les structures sandwich

Lionel Leotoing, Sylvain Drapier, Alain Vautrin

► **To cite this version:**

Lionel Leotoing, Sylvain Drapier, Alain Vautrin. Flambage et effet d'échelle dans les structures sandwich. JNC12, Nov 2000, Cachan, France. pp.343-352. hal-00981968

**HAL Id: hal-00981968**

**<https://hal.science/hal-00981968>**

Submitted on 23 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## FLAMBAGE ET EFFET D'ECHELLE DANS LES STRUCTURES SANDWICH

### BUCKLING AND SCALE EFFECTS IN SANDWICH STRUCTURES

L. Léotoing, S. Drapier et A. Vautrin

Département Mécanique et Matériaux - Centre SMS  
Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne  
42023 Saint-Etienne Cedex 02, France  
e-mail: drapier@emse.fr

#### RÉSUMÉ

L'hétérogénéité intrinsèque des structures sandwich pose de réelles difficultés dans l'évaluation et la prédiction de leur réponse en compression plane, ce qui restreint leur application dans la conception d'éléments structuraux. Dans cet article, un nouveau modèle unifié est présenté dont la première application sera de déterminer des solutions analytiques pour le flambage global et local de poutres sandwich. Des expressions pour les charges critiques sont obtenues pour une poutre sur appuis simples, dans un cadre parfait, grâce au calcul de deux valeurs propres : il s'avère que la valeur propre correspondant au mode antisymétrique peut être associée soit à un mode global ou soit à un mode local de flambage (*wrinkling*). On montre ensuite que ces charges locales et globale donnent des prévisions très proches de celles obtenues par des formules plus classiques extraites de la littérature et établies à partir de modèles spécifiques. Ainsi, dans un cadre simplifié, on démontre que des conclusions riches peuvent être extraites à partir de notre modèle unifié capable de modéliser correctement les phénomènes aux deux échelles.

#### ABSTRACT

Due to the intrinsic heterogeneity of sandwich structures, there exists a real difficulty in assessing and predicting their in-plane compressive response which is a major restriction in designing structural applications. In the present paper is presented the first application of a novel unified model for sandwiches, used here to determine closed-form solutions for both global and local buckling. In a perfect framework, analytical critical loads are extracted for a simply supported beam, through the calculation of two eigenvalues : it appears that the antisymmetrical eigenvalue can correspond to the occurrence of global and local buckling (*wrinkling*). Then local and global loads from the model are shown to compare very well with predictions of classical formulae from the literature, established through dedicated models. It is thus demonstrated, in this simplified framework, that rich conclusions can be drawn from our unified model capable of properly predicting the phenomena at both scales.

MOTS CLÉS : MATERIAUX SANDWICH, FLAMBAGE, EFFETS D'ECHELLE

KEYWORDS : SANDWICH MATERIALS, BUCKLING, SCALE EFFECTS

## INTRODUCTION

Depuis près de 50 ans, les structures sandwich ont été largement utilisées et plus particulièrement dans le domaine des transports, notamment en aéronautique, où leur rigidité spécifique élevée en flexion conduit à des gains de poids considérables. Depuis une vingtaine d'années, les structures sandwich ont pénétré de nouveaux domaines, ceci grâce à la fois à une meilleure connaissance de leur comportement, mais aussi à l'apparition de nouveaux procédés industriels qui permettent aujourd'hui leur intégration comme éléments structurels. Cependant, bien que le comportement en traction ou en flexion de ces matériaux soit maîtrisé, il est plus délicat de caractériser la réponse des sandwichs lorsqu'ils sont soumis à des charges déstabilisantes. Par conséquent, en concevant de tels éléments structuraux, la réponse en compression plane peut s'avérer critique et conduit parfois à des dimensionnements très conservateurs.

Depuis les premières utilisations des matériaux sandwich, un nombre considérable d'études théoriques portant sur les instabilités géométriques des poutres, panneaux et coques sandwich ont été menées ([Williams et al., 1941], [Benson and Mayers, 1967], [Allen, 1969], [Hunt et al., 1988], [Starlinger, 1990]). Le nombre restreint d'études expérimentales concernant la mesure des charges de flambage ([Teti and Caprino, 1989] par exemple), ainsi que la grande diversité des approches théoriques sur le sujet soulignent les difficultés liées à la compréhension des phénomènes de flambage dans ces matériaux "stratifiés". Ces difficultés résident dans l'hétérogénéité géométrique et matérielle de ces matériaux composés de trois éléments très différents : deux peaux fines et rigides séparées par une âme épaisse et possédant des caractéristiques mécaniques plus faibles. La nature même de cet assemblage est à l'origine de la coexistence de phénomènes à des échelles différentes, et plus spécialement sous l'effet d'efforts de compression où ces derniers peuvent se combiner. Si on néglige les possibles instabilités à l'échelle de la fibre dans les sandwichs dont les peaux sont en composites, les modes de flambage sont susceptibles d'apparaître à deux échelles différentes : le flambage global (Fig. 1-a) assimilé au flambage d'Euler dans les poutres, et des formes locales comme le flambage local des peaux appelé *wrinkling* (Fig. 1-b,c).

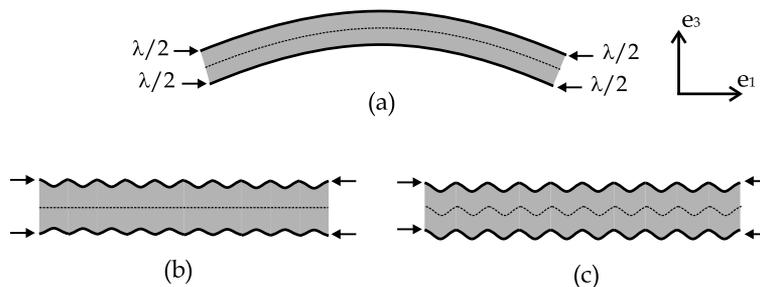


Figure 1: Le flambage des sandwichs aux deux échelles : (a) flambage global (de type Euler) (b) *wrinkling* symétrique des peaux (c) *wrinkling* antisymétrique des peaux.

*Sandwich buckling at two scales : (a) global buckling (Euler's type) (b) symmetrical wrinkling of the skins (c) antisymmetrical wrinkling of the skins.*

L'approche classique concernant le flambage des sandwichs est une approche

découplée ([Williams et al., 1941], [Allen, 1969]), dans laquelle deux différents types de modèles sont proposés pour modéliser les instabilités à chacune des échelles. Le flambage global est généralement étudié par l'intermédiaire d'un modèle de poutre homogène équivalente dans laquelle l'effet du cisaillement transverse est pris en compte. Pour une poutre sandwich simplement appuyée, de longueur  $L$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur totale  $h$ , la charge critique  $\lambda_{EHB}$  est donnée par l'équation (1). La première partie de cette équation est constituée de la charge classique d'Euler alors que la seconde représente la charge lorsque seul le cisaillement transverse est considéré.

$$\frac{1}{\lambda_{EHB}} = \frac{2L^2}{\pi^2 E_p b h_p (h_p + h_a)^2} + \frac{h_p}{G_a b (h_p + h_a)^2} \quad (1)$$

$E_p$  est le module d'Young des peaux,  $h_p$  et  $h_a$  sont respectivement les épaisseurs des peaux et de l'âme, et  $G_a$  est le module de cisaillement transverse de l'âme. Le flambage local des peaux est généralement appréhendé à l'aide d'un modèle différent dans lequel l'une des peaux est modélisée par une poutre sur fondation élastique qui représente l'âme. Ainsi, la difficulté principale de cette approche locale réside dans la capacité de la fondation à reproduire le plus fidèlement possible le comportement mécanique réel de l'âme. La formule classique pour le *wrinkling* des peaux est donnée par l'équation (2), dans laquelle  $E_a$  est le module normal transverse de l'âme et  $Q$  est une constante. Selon les auteurs et les cas étudiés, la valeur de  $Q$  varie de 0,4 à 0,9 et très souvent, la valeur de 0,5 lui est affectée afin de fournir un critère conservateur pour les concepteurs. Des résultats expérimentaux montrent que  $Q$  n'est pas constant [Teti and Caprino, 1989].

$$\sigma_{CR} = Q \sqrt[3]{E_p E_a G_a} \quad (2)$$

Si la charge globale (Eq. 1) donne de bonnes estimations, il n'en est pas de même pour le critère local (Eq. 2) qui offre une certaine dispersion pour le mode symétrique, et d'autant plus pour le mode antisymétrique très rarement décrit. Ainsi, depuis quelques années, des auteurs ont soulevé la nécessité de développer des modèles plus complexes, capables de tenir compte des effets de l'interaction entre les différentes échelles. Cependant, ces modèles sont peu nombreux et présentent pour chacun d'eux des limites majeures ([Hunt et al., 1988], [Frostig and Baruch, 1993], [Starlinger, 1990]).

Cette introduction montre clairement qu'il existe un réel besoin de caractérisation du flambage dans les matériaux sandwich ne pouvant venir que d'un modèle unifié, par nature capable de modéliser les interactions entre les différentes échelles. Notre but ultime est de proposer un outil simple de calcul pour le pré-dimensionnement de structures sandwich. La première étape de cette approche, développée dans cet communication, est de proposer un modèle unifié dans un cadre parfait, sans aucune imperfection géométrique et en considérant des matériaux linéaires élastiques. Nous soulignons la capacité de notre modèle à donner des formes simples et pratiques pour les charges critiques associées aux modes linéaires élastiques de flambage des deux échelles pour une poutre sandwich. Ces formules simples sont ensuite comparées à des formules plus classiques issues d'approches découplées. Le calcul de la sensibilité de chacune des charges vis-à-vis de chaque paramètre géométrique et matériel livre de précieuses indications pour le dimensionnement de structures sandwich.

## PRÉSENTATION DU MODÈLE UNIFIÉ

Un modèle bidimensionnel est considéré dans lequel la position de chaque point par rapport au bas de la poutre est donnée par  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_3 \mathbf{e}_3$  dans  $\Omega = [0, L] \times [0, h]$  (Fig. 1). Les composantes des champs de déplacement sont respectivement  $u_1(\mathbf{x})$  selon  $\mathbf{e}_1$  et  $u_3(\mathbf{x})$  selon  $\mathbf{e}_3$ . Les contraintes sont représentées par le second tenseur de Piola-Kirchhoff, noté  $\mathbf{S}$ , et les déformations sont celles du tenseur  $\gamma$  de Green-Lagrange. Les matériaux considérés sont isotropes et les lois de comportement associées sont simplement écrites à l'aide des modules élastiques précédemment introduits.

### Champs de déplacement

Pour simplifier l'approche, une formulation en déplacement est adoptée. La difficulté principale réside dans le choix de la cinématique qui doit être à la fois suffisamment riche pour pouvoir décrire l'ensemble des phénomènes mais aussi assez simple afin d'obtenir des expressions analytiques utilisables. Des auteurs [Lo et al., 1977] ont mis en évidence la nécessité d'introduire une théorie d'ordre supérieur dans des problèmes dont le chargement extérieur peut varier sur une longueur caractéristique de l'ordre de l'épaisseur de la poutre. Or cette configuration est tout à fait reproduite lors de l'apparition du *wrinkling* dont la longueur d'onde est de l'ordre de  $h$ . Par conséquent, une théorie d'ordre supérieur sera choisie dans l'âme étant donné son rôle prédominant dans l'apparition des phénomènes locaux. Ce choix est confirmé par des calculs Elements Finis qui montrent une évolution cubique du déplacement transverse dans l'épaisseur de la poutre pour un mode local anti-symétrique à courte longueur d'onde. De telles théories ont déjà été mises en oeuvre dans des sandwichs ([Benson and Mayers, 1967], [Frostig and Baruch, 1993]). Pour les peaux, les déplacements sont choisis linéaires en  $x_3$  pour  $u_1(\mathbf{x})$  et constants en  $x_3$  pour  $u_3(\mathbf{x})$ .

Le nombre d'inconnus intervenant dans l'expression des champs de déplacement peut être réduit en considérant des interfaces peau/âme parfaites et donc en assurant la continuité des champs de déplacement. Deux inconnues supplémentaires sont éliminées en assurant la validité de la première équation d'équilibre statique dans la direction  $\mathbf{e}_1$ . Ainsi, les champs de déplacement sont exprimés à l'aide de 5 fonctions inconnues : les déplacements  $u_\alpha(x_1)$  des peaux et un gradient de rotation  $\phi(x_1)$  de l'âme (Eq. 3) (La dérivée première de  $X$  par rapport à  $x_1$  est notée  $X_{,1}$ ). Les suffixes  $^b$  et  $^h$  sont respectivement associés aux données concernant la peau du bas et du haut de la poutre, ils seront par la suite remplacés par le suffixe  $\alpha$  ( $\alpha = b, h$ ).

$$\underline{0 < x_3 < h_p}$$

$$u_1(x_1, x_3) = u_1^b(x_1) - x_3 u_{3,1}^b(x_1)$$

$$u_3(x_1, x_3) = u_3^b(x_1)$$

$$\underline{h_a + h_p < x_3 < h}$$

$$u_1(x_1, x_3) = u_1^h(x_1) - (x_3 - h) u_{3,1}^h(x_1)$$

$$u_3(x_1, x_3) = u_3^h(x_1)$$

$$\begin{aligned}
& \underline{h_p < x_3 < h_a + h_p} \\
u_1(x_1, x_3) &= \frac{(x_3 - h_p)}{h_a} u_1^h(x_1) + \left(1 - \frac{(x_3 - h_p)}{h_a}\right) u_1^b(x_1) \\
&+ \left(\frac{(x_3 - h_p)(-x_3 + h_p + h)}{2h_a}\right) u_{3,1}^h(x_1) \\
&+ \left(-h_p + \frac{(x_3 - h_p)(x_3 - h_p + h)}{2h_a}\right) u_{3,1}^b(x_1) \\
&+ \frac{1}{6}(2x_3 - t)(x_3 + h_p - h)(x_3 - h_p)\phi_{,1}(x_1) \\
u_3(x_1, x_3) &= \frac{(x_3 - h_p)}{h_a} u_3^t(x_1) + \left(1 - \frac{(x_3 - h_p)}{h_a}\right) u_3^b(x_1) \\
&+ (h_a(x_3 - h_p) - (x_3 - h_p)^2)\phi(x_1)
\end{aligned} \tag{3}$$

### Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre du problème sont obtenues grâce au principe des travaux virtuels formulé en déplacement. L'équilibre de la poutre sandwich est exprimé comme la somme des travaux virtuels qui se développent dans  $\Omega$  et aux bords, sous l'effet du champ de déplacement virtuel  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ .

Les composantes du tenseur des contraintes dont les contributions énergétiques sont faibles sont négligées. Ainsi, dans les peaux, seule la contrainte longitudinale est conservée :  $\mathbf{S}^\alpha = S_{11}^\alpha \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ . Dans l'âme, la contrainte normale transverse et celle de cisaillement transverse sont prises en compte :  $\mathbf{S}^a = S_{33}^a \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + S_{13}^a \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3$ . Le tenseur des déformations est exprimé à l'aide des 5 inconnues du problème, sous l'hypothèse des petits déplacements et rotations modérées dans les peaux, et des petits déplacements et petites rotations dans l'âme. Les composantes considérées sont données par l'équation (4), avec  $\eta_{\alpha b} = 1$  si  $\alpha = b$  et  $-1$  si  $\alpha = h$ .

$$\begin{aligned}
\gamma_{11}^\alpha(\mathbf{x}) &= u_{1,1}^\alpha(x_1) + \frac{1}{2} (u_{3,1}^\alpha(x_1))^2 - \left(x_3 + h \frac{\eta_{\alpha b} - 1}{2}\right) u_{3,11}^\alpha(x_1) \\
\gamma_{13}^a(\mathbf{x}) &= \frac{u_1^h(x_1) - u_1^b(x_1)}{h_a} + \left(\frac{1}{2} + \frac{h_p}{h_a}\right) (u_{3,1}^h(x_1) + u_{3,1}^b(x_1)) + \frac{h_a^2}{6} \phi_{,1}(x_1) \\
\gamma_{33}^a(\mathbf{x}) &= \frac{u_3^h(x_1) - u_3^b(x_1)}{h_a} - (2(x_3 - h_p) - h_a)\phi(x_1)
\end{aligned} \tag{4}$$

Ainsi, le travail des efforts internes est simplement donné par les deux intégrales de l'équation (5) et le travail des efforts extérieurs (Fig. 1) constitue la seconde partie de (5).

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\alpha} S_{11}^\alpha \delta \gamma_{11}^\alpha(\mathbf{u}) d\Omega_\alpha + \int_{\Omega_a} (S_{33}^a \delta \gamma_{33}^a(\mathbf{u}) + S_{13}^a \delta \gamma_{13}^a(\mathbf{u})) d\Omega_a \\
& - \frac{\lambda}{2} \left( \delta u_1^\alpha(L) - \frac{h_p}{2} \delta u_{3,1}^\alpha(L) \right) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \text{ C.A.}
\end{aligned} \tag{5}$$

### Problème aux valeurs propres linéarisé

Après un nombre suffisant d'intégrations par parties, les équations d'équilibre à l'intérieur et aux bords de la poutre sont établies. La nature non-linéaire des mécanismes liés au flambage induit un couplage au niveau de ces équations. L'hypothèse classique du préflambage linéaire permet de linéariser la plupart de ces problèmes. Elle consiste à supposer que lors de l'apparition de la première instabilité géométrique, les efforts internes sont encore strictement proportionnels aux efforts appliqués. Ainsi, grâce aux équations d'équilibre aux bords en  $x_1 = L$ , la résultante interne de compression dans les peaux est identifiée à  $\lambda/2$  et le système linéarisé (6) en est déduit ( $\xi = 1/2 + h_p/h_a$ ).

$$\begin{aligned}
 /\delta u_1^\alpha : \quad & \eta_{\alpha b} E_p b h_p u_{1,11}^\alpha + \frac{E_p b h_p}{2} u_{3,111}^\alpha \\
 & + b G_a \left( \frac{u_1^h - u_1^b}{h_a} + \xi (u_{3,1}^h + u_{3,1}^b) + \frac{h_a^2}{6} \phi_{,1} \right) = 0 \\
 /\delta u_3^\alpha : \quad & \frac{\lambda}{2} u_{3,11}^\alpha - \eta_{\alpha b} \frac{E_p b h_p^2}{2} u_{1,111}^\alpha + \frac{E_p b h_p^3}{3} u_{3,111}^\alpha - \eta_{\alpha b} \frac{b E_a}{h_a} (u_3^h - u_3^b) \\
 & - b G_a \xi \left( u_{1,1}^h - u_{1,1}^b + h_a \xi (u_{3,11}^h + u_{3,11}^b) + \frac{h_a^3}{6} \phi_{,11} \right) = 0 \quad (6) \\
 /\delta \phi : \quad & h_a E_a \phi - \frac{G_a}{2} \left( u_{1,1}^h - u_{1,1}^b + h_a \xi (u_{3,11}^h + u_{3,11}^b) + \frac{h_a^3}{6} \phi_{,11} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Les champs de déplacement, solutions de l'équation (6), sont posés sous forme de séries trigonométriques vérifiant les conditions d'appuis simples (Eq. 7), avec ( $\beta_n = n\pi/L$ ).

$$u_1^\alpha(x_1) = \sum_n U_1^{\alpha n} \cos \beta_n x, \quad u_3^\alpha(x_1) = \sum_n U_3^{\alpha n} \sin \beta_n x, \quad \phi(x) = \sum_n \Phi^n \sin \beta_n x \quad (7)$$

L'introduction de ces formes trigonométriques dans le système (6) permet la formulation d'un problème aux valeurs propres (Eq. 8) dont le paramètre est la charge extérieure  $\lambda$  et le vecteur inconnu est  $Y = \langle U_1^{hn}, U_1^{bn}, U_3^{hn}, U_3^{bn}, \Phi^n \rangle$ .

$$([A] - \lambda [B]) \{Y\} = \{0\} \quad (8)$$

La résolution formelle du problème (8) conduit à la détermination de deux valeurs propres  $\lambda_A^{mu}$  et  $\lambda_S^{mu}$  respectivement associées à un mode antisymétrique (Eq. 9) et à un mode symétrique (Eq. 10).

$$\lambda_A^{mu} = \frac{\beta_n^2 E_p h_p b}{6} \left( h_p^2 + \frac{72 G_a E_a (h_a + h_p)^2}{\beta_n^4 E_p G_a h_p h_a^3 + 12 \beta_n^2 E_p E_a h_p h_a + 24 E_a G_a} \right) \quad (9)$$

$$\lambda_S^{mu} = \frac{\beta_n^2 E_p h_p^3 b}{6} + \frac{4 E_a b}{\beta_n^2 h_a} \quad (10)$$

Les courbes de stabilité neutre correspondant à ces deux charges sont tracées sur la figure 2 pour une poutre sandwich donnée ( $E_p = 50000$  MPa,  $E_a = 70$  MPa,  $G_a = 25$  MPa,  $h_p = 1$  mm,  $L = 600$  mm,  $b = 40$  mm) et pour deux épaisseurs d'âme différentes.

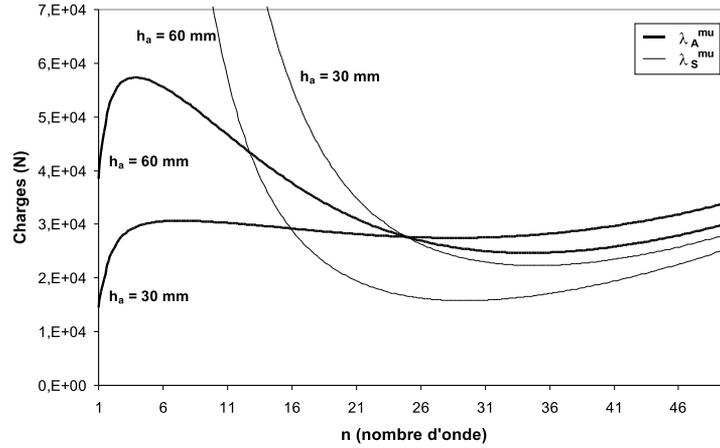


Figure 2: Tracé de  $\lambda_A^{mu}$  et  $\lambda_S^{mu}$  pour deux épaisseurs d'âme différentes.  
*Plots of  $\lambda_A^{mu}$  and  $\lambda_S^{mu}$  for two different thicknesses of the core.*

Comme le montre la figure 2, la valeur du nombre d'onde critique de la charge antisymétrique dépend notamment de l'épaisseur de l'âme. Ainsi, selon la configuration géométrique et matérielle de la poutre, le mode critique antisymétrique peut être soit global ( $n = 1$ ) ou soit local ( $n \gg 1$ ). Cette application numérique simple démontre la capacité de notre modèle à prévoir les deux formes d'instabilité liées à ce mode.

## ANALYSE DES CHARGES CRITIQUES DE FLAMBAGE

### Modes antisymétriques

Deux charges critiques sont donc associées à la valeur propre correspondant au mode antisymétrique. La charge globale est simplement obtenue à partir de l'équation (9) en prenant  $n = 1$ . La charge locale antisymétrique est déterminée grâce à une minimisation de (9) par rapport à  $n$ , pour  $n > 1$ . La difficulté de cette opération réside dans la complexité de la charge obtenue qui peut être simplifiée sous les hypothèses suivantes :  $((h_a/h_p)^2 \gg 1$  et  $(h_p/h_a)(E_p/E_a) \gg 0,25$ ) et qui sont pleinement satisfaites pour des sandwichs classiques ( $h_a/h_p > 10$  et  $E_p/E_a > 100$ ). L'expression simple obtenue (Eq. 11) est en parfait accord avec la solution exacte pour les nombreuses configurations testées ( $< 0.1\%$ ).

$$\lambda_{AL}^{um} = \frac{2bh_p}{h_a} \left( \sqrt{2h_p E_p E_a (h_a + 2h_p)} - \frac{h_p^2 E_p E_a}{h_a G_a} \right) \quad (11)$$

Cette instabilité locale existe seulement lorsque l'expression (9) présente un minimum pour  $n > 1$ , ce qui correspond à la condition suivante (Eq. 12).

$$\frac{2h_p^3 E_p E_a}{G_a^2 h_a^2 (h_a + 2h_p)} < 1 \quad (12)$$

### Wrinkling symétrique

Une procédure identique de minimisation est appliquée à la charge symétrique (Eq. 10) et conduit à l'expression (13). Cette expression a déjà été présentée par des auteurs comme [Frostig and Baruch, 1993], ce qui conforte la validité de notre modèle.

$$\lambda_{SL}^{um} = \frac{2\sqrt{6}}{3} b \sqrt{\frac{E_a E_p h_p^3}{h_a}} \quad (13)$$

Cette expression semble offrir une meilleure précision que la formule classique (Eq. 2) de par sa dépendance vis-à-vis de l'épaisseur de l'âme dont le rôle dans l'apparition des instabilités locales paraît indéniable.

### Comparaison avec des modèles existants

Dans le but d'évaluer la précision de ces formules, les prévisions de notre modèle sont comparées aux prévisions de modèles élaborés pour étudier une forme d'instabilité bien précise. Pour la charge globale, la comparaison effectuée avec la charge classique d'Allen (Eq. 1) montre un écart relatif qui ne dépasse jamais 1% pour les nombreux cas testés.

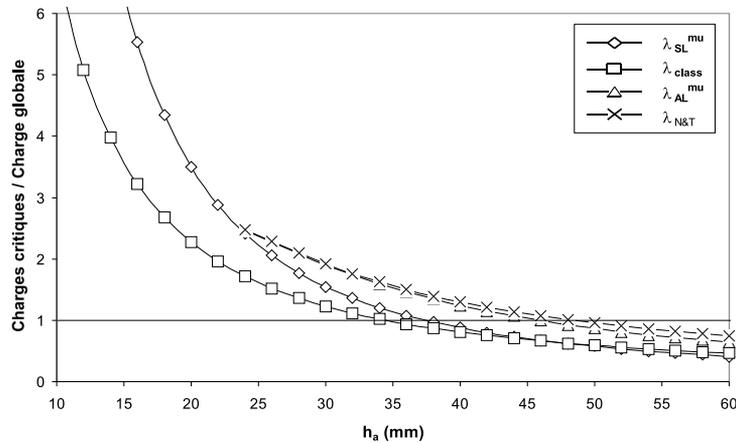


Figure 3: Tracé des charges critiques locales en fonction de l'épaisseur de l'âme..  
*Plot of the local critical loads for varying core thickness.*

La figure 3 propose une comparaison de charges critiques associées aux formes locales d'instabilité. Les charges suivantes sont représentées : les charges locales  $\lambda_{AL}^{mu}$  et  $\lambda_{SL}^{mu}$  du modèle présenté, la charge classique  $\lambda_{class} = 2bh_p\sigma_{CR}$  (Eq. 2) et la charge antisymétrique  $\lambda_{N\&T}$  [Niu and Talreja, 1999]. Le caractère conservatif de la formule classique est bien vérifié pour les deux formes d'instabilité. L'expression (2) donne une bonne approximation de la charge locale symétrique excepté pour des âmes de faible épaisseur. Cette divergence est due à la forme trop simpliste de (2) qui ne tient pas compte de ce paramètre géométrique qui conditionne directement une possible interaction entre les peaux. Concernant la charge locale antisymétrique, on note une très bonne corrélation avec la charge complexe proposée par Niu et Talreja [Niu and Talreja, 1999]. Le tracé incomplet de la charge

$\lambda_{AL}^{mu}$  est lié à la validité de la condition (12) que l'on retrouve pour la détermination de  $\lambda_{N\&T}$ , même si celle-ci n'est pas mentionnée par ces auteurs. Les courbes tracées sur la figure 3 sont normalisées par rapport à la charge globale et montrent qu'il existe une épaisseur d'âme limite à partir de laquelle les phénomènes locaux sont prédominants devant le flambage global.

### Etude de sensibilité

Les expressions obtenues pour les trois formes d'instabilité présentent des combinaisons complexes des paramètres géométriques et matériels qui rendent difficiles l'estimation de l'influence de chacun d'eux sur ces charges critiques. Afin de mesurer le "poids" de ces divers paramètres, un calcul de sensibilité, valable sur une configuration  $C_i$  donnée et pour un paramètre  $\rho$  quelconque, est présenté (Eq. 14).

$$s_\rho = \frac{\partial \lambda}{\partial \rho}(C_i) \frac{\rho}{\lambda(C_i)} \quad (14)$$

La configuration choisie pour la poutre sandwich correspond à celle donnée figure 2 avec  $h_a = 60$  mm. La figure 4 montre clairement que pour le flambage global, le paramètre prépondérant est l'épaisseur de l'âme alors que pour les phénomènes de *wrinkling*, l'épaisseur des peaux est essentielle. De plus, le caractère local des deux formes de *wrinkling* est souligné par la totale indépendance vis-à-vis de la longueur de la poutre.

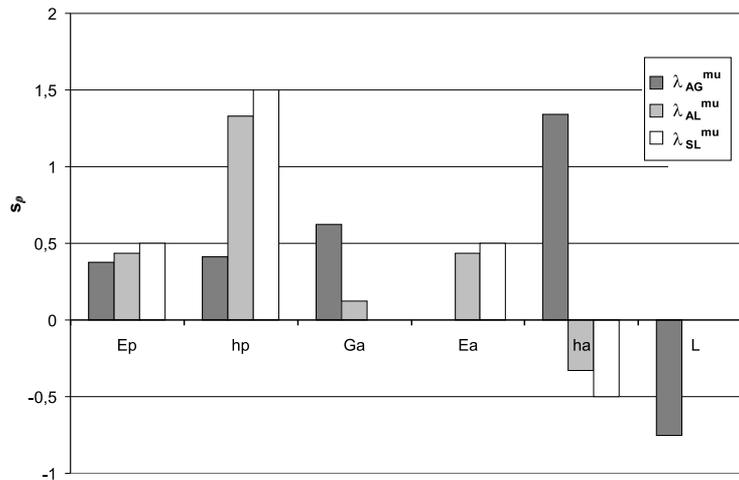


Figure 4: Sensibilités évaluées pour les expressions des trois charges critiques.  
Sensitivities calculated for the three critical load expressions.

Ces sensibilités évaluées sur des configurations complémentaires permettent d'affirmer que lorsque l'épaisseur de l'âme augmente, les sensibilités des deux formes locales tendent vers des valeurs identiques. Dans ces configurations extrêmes, les deux peaux ont tendance à agir indépendamment d'où la confusion des deux formes locales.

## CONCLUSION

Un modèle unifié a été présenté, nous avons démontré, dans un cadre linéaire parfait, ses capacités à atteindre à la fois les formes d'instabilité locales, mais aussi le flambage global. Les charges critiques calculées à partir de la formulation d'un problème aux valeurs propres ont été comparées aux charges classiques généralement retenues lors de la conception de structures sandwich. Une bonne corrélation avec ces modèles locaux et globaux a été montrée, et de plus on a pu mettre en évidence les limites de la formule classique de *wrinkling* pour des âmes peu épaisses. L'évaluation de la sensibilité des trois formules obtenues, vis-à-vis des différents paramètres du sandwich, montrent respectivement l'influence majeure de l'épaisseur de l'âme pour le flambage global et de l'épaisseur des peaux pour les phénomènes locaux. A présent, ce modèle doit être étendu au cadre plus général des problèmes non-linéaires de post-flambage dans lesquels une possible interaction des phénomènes locaux et globaux sera considérée.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Allen, 1969] Allen, H. (1969). *Analysis and design of structural sandwich panels*. Robert Maxwell, M.C., M.P.
- [Benson and Mayers, 1967] Benson, A. and Mayers, J. (1967). General instability and face wrinkling of sandwich plates - unified theory and applications. *AIAA Journal*, 5(4):729–739.
- [Frostig and Baruch, 1993] Frostig, Y. and Baruch, M. (1993). High-order buckling analysis of sandwich beams with transversely flexible core. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(3):476–495.
- [Hunt et al., 1988] Hunt, G., Da Silva, L., and Manzocchi, M. (1988). Interactive buckling in sandwich structures. *Proceedings of the royal society of London*, 417A:155–177.
- [Lo et al., 1977] Lo, K., Christensen, R., and Wu, E. (1977). A high-order theory of plate deformation, part 1 : homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics*, pages 663–668.
- [Niu and Talreja, 1999] Niu, K. and Talreja, R. (1999). Modeling of wrinkling in sandwich panels under compression. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(8):875–883.
- [Starlinger, 1990] Starlinger, A. (1990). *Development of efficient finite shell elements for the analysis of sandwich structures under large deformations and global as well as local instabilities*. PhD thesis, Vienna University of Technology.
- [Teti and Caprino, 1989] Teti, R. and Caprino, G. (1989). Mechanical behavior of structural sandwiches. In Olsson, K. and Reichard, R., editors, *Proceedings of Sandwich Constructions I*, pages 53–68. Engineering Materials Advisory Services Ltd.
- [Williams et al., 1941] Williams, D., Leggett, D., and Hopkins, H. (1941). Flat sandwich panels under compressive end loads. Technical Report 1987, R.A.E.