

# Résolution numérique de problèmes aux limites déterministes par une méthode de type Monte-Carlo Application au problème de Ventcel

JEAN-PAUL MORILLON  
Université de La Réunion  
Laboratoire PIMENT

La résolution numérique de problèmes aux limites peut être faite en mettant en œuvre des méthodes de différences finies, d'éléments finis ou de volumes finis [3]. Des méthodes probabilistes peuvent être appliquées [1] ; afin d'éviter la gestion d'un maillage et la discrétisation des équations du problème - et pour alléger la programmation - nous présenterons, dans cette communication, les représentations stochastiques qui, utilisées directement, conduisent au calcul de la solution.

En effet, les approches des représentations stochastiques des solutions par réalisations de processus solutions d'EDS (équations différentielles stochastiques, voir [5]) fournissent des algorithmes de calcul. L'élaboration de la méthode sera rappelée tant en ce qui concerne les problèmes elliptiques avec des conditions de divers types [6,4], que son utilisation pour les problèmes d'évolution de type parabolique en vue de la résolution du problème de Ventcel.

Considérons un ouvert borné  $G$  de  $R^d$ . On note  $x \in G$  la variable d'espace,  $n$  la normale unitaire intérieure définie sur la frontière  $\partial G$ . Pour le problème de Ventcel, on aura la partition  $\partial G = \cup_j \Gamma_j$  avec  $G$  ouvert polygonal,  $\Gamma_j$  segment ouvert d'extrémités  $S_{j-1}$  et  $S_j$ .

À partir d'EDS et en faisant intervenir la formule de Itô, nous représentons par des intégrales stochastiques les solutions des problèmes aux limites suivants (avec terme de potentiel et de dérive) :

$$(1) \begin{cases} -\frac{1}{2} a \Delta u + \lambda u = f & (G) \\ \frac{\partial u}{\partial n} - \mu u = g_1 & (\partial G) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta u + b \cdot \nabla u = f & (G) \\ u = g_2 & (\partial G) \end{cases}$$

où  $u$  est l'inconnue, fonction scalaire définie sur  $G$ , et les données sont la fonction  $f$  définie sur  $G$ , les fonctions  $g_i$  définies sur  $\partial G$  (dans le cas (3), sur une partie  $\Gamma_i$  de  $\partial G$ ),  $a > 0$ ,  $\lambda > 0$  et  $\mu \geq 0$  supposés constants pour simplifier.

Nous résolverons numériquement le problème de Ventcel pour le laplacien [2]. Il modélise l'échange de chaleur entre un corps  $G$  et le milieu ambiant quand la frontière  $\partial G$  est recouverte d'une couche fine très bonne

conductrice.

$$(3) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\Delta u + \lambda u = f & (G) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_j} - \frac{1}{2}a_j \frac{\partial^2 u}{\partial \tau_j^2} + \mu_j u = g_j & (\Gamma_j) \\ a_j \frac{\partial u}{\partial \tau_j} - a_{j+1} \frac{\partial u}{\partial \tau_{j+1}} = 0 & (S_j) \end{cases}$$

où  $\nu_j$  (respectivement  $\tau_j$ ) désigne la normale unitaire sortante (respectivement la tangente unitaire dans le sens positif) sur  $\Gamma_j$ .

L'algorithme présenté tient compte de la nature parabolique des conditions aux limites et peut s'adapter facilement à la dimension supérieure. Des résultats numériques significatifs seront présentés à la suite de la construction des algorithmes.

## References

- [1] M. Cessenat, R. Dautray, G. Ledanois, P.-L. Lions, É. Pardoux et R. Sentis, *Méthodes probabilistes pour les équations de la physique*, Eyrolles, Paris, 1989.
- [2] K. Lemrabet, *Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 300, Série 1, n° 15 (1985), 531–534.
- [3] B. Lucquin et O. Pironneau, *Introduction au calcul scientifique*, Masson, Paris, 1996.
- [4] J.-P. Morillon, *Numerical solutions of linear mixed boundary value problems using stochastic representations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 40 (1997), 387–405.
- [5] É. Pardoux et D. Talay, *Discretization and simulation of stochastic differential equations*, Acta Applicandae Mathematicae **3** (1985), 23–47.
- [6] J. E. Souza de Cursi, *Numerical methods for linear boundary value problems based on Feynman-Kac representations*, Mathematics and Computers in Simulation **36** (1994), 1–16.